

GEOMETRIA DE MASAS

- Momentos de primer orden (estáticos). Centro de masas.
- Teoremas de Pappus-Guldin
- Momentos de segundo orden (inercia)
- Teorema de Steiner
- Tensor de inercia. Momentos y direcciones principales
- Elipsoide de inercia
- Aplicaciones

GEOMETRIA DE MASAS

- **Momentos de primer orden (estáticos)**
 - Respecto a un punto
 - Respecto a una recta
 - Respecto a un plano
- **Centro de masas**
 - Elementos de simetría
 - Concentración de la masa
 - Coordenadas del CM.

GEOMETRIA DE MASAS

- **Momentos de primer orden (estáticos)**
 - Respecto a un punto O

$$\mathbf{M}_O = \sum_i m_i \mathbf{r}_i = \iiint \mathbf{r} dm = \iiint \mathbf{r} \rho dV$$

- Respecto a un punto O' distinto

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + m \cdot \overrightarrow{OO'}$$

Momentos de primer orden (estáticos)

- Respecto a una recta con vector unitario $\mathbf{u}$

$$\mathbf{M} = (\mathbf{u} \times \mathbf{M}_O) \times \mathbf{u} \equiv (\mathbf{M}_O)_\perp$$

O: punto de la recta

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{M}_O) \times \mathbf{u} = \mathbf{M}_O - \mathbf{u}(\mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u})$$

- No depende del punto de referencia de la recta

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}'$$

- Respecto a otra recta paralela (mismo $\mathbf{u}$)

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + m \cdot \overrightarrow{AA'}$$

AA': distancia entre rectas

Momentos de primer orden (estáticos)

- Respecto a un plano con vector normal $\mathbf{u}$

$$M = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u} \equiv (M_O)_\perp \text{ (escalar)}$$

O: punto del plano

- No depende del punto de referencia sobre el plano

$$M = M'$$

- Respecto a otra plano paralelo (mismo $\mathbf{u}$)

$$M' = M + m \cdot \left| \overrightarrow{AA'} \right|$$

AA': distancia entre planos

Centro de masas

- Definición. Punto G es centro de masas del sistema si

$$\mathbf{M}_G = \sum_i m_i \mathbf{r}_i = 0$$

G: C.M.

- Entonces, si la recta contiene a G

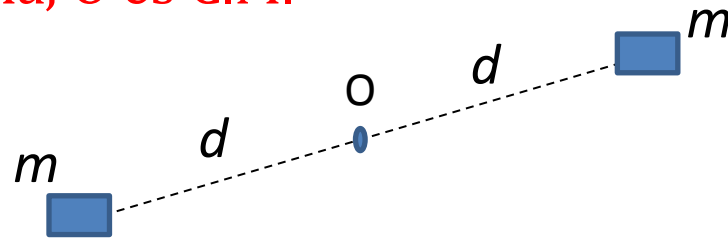
$$\mathbf{M} = 0$$

- Y si el plano contiene a G

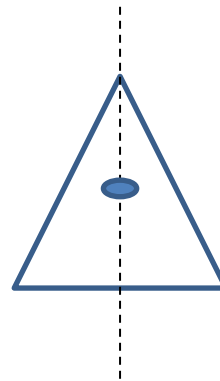
$$M = 0$$

Centro de masas. Simetrías

- Si O es centro de simetría, O es C.M.



- Si tiene eje de simetría, C.M. está en dicho eje



- Si tiene plano de simetría, C.M. está en dicho plano

Coordenadas del centro de masas

- VOLUMEN

$$\vec{r}_G = \frac{\iiint_V \vec{r} \cdot dm}{\iiint_V dm} = \frac{\iiint_V \vec{r} \cdot dV \cdot \delta}{\iiint_V dV \cdot \delta}$$

- SUPERFICIE

$$\vec{r}_G = \frac{\iint_S \vec{r} \cdot dm}{\iint_S dm} = \frac{\iint_S \vec{r} \cdot dS \cdot \sigma}{\iint_S dS \cdot \sigma}$$

- CURVA

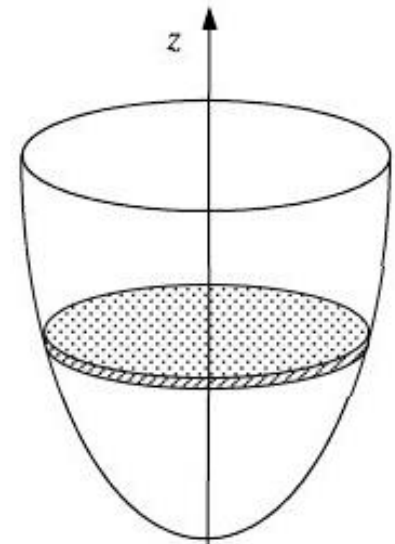
$$\vec{r}_G = \frac{\int_l \vec{r} \cdot dm}{\int_l dm} = \frac{\int_l \vec{r} \cdot dl \cdot \lambda}{\int_l dl \cdot \lambda}$$

CENTRO DE MASAS. EJEMPLOS

VOLUMEN

$$\vec{r}_G = \frac{\iiint_V \vec{r} \cdot dm}{\iiint_V dm} = \frac{\iiint_V \vec{r} \cdot dV \cdot \delta}{\iiint_V dV \cdot \delta}$$

Cálculo de la posición del C.M. de una figura homogénea de revolución (esfera, paraboloides, etc)

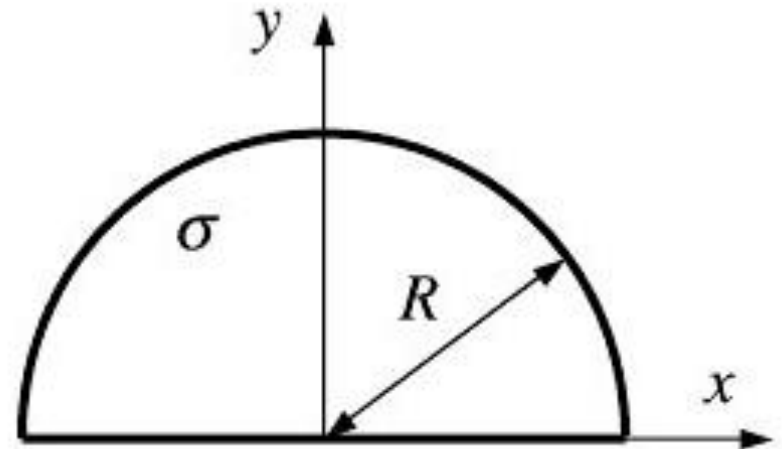


CENTRO DE MASAS. EJEMPLOS

SUPERFICIE

$$\vec{r}_G = \frac{\iint_S \vec{r} \cdot dm}{\iint_S dm} = \frac{\iint_S \vec{r} \cdot dS \cdot \sigma}{\iint_S dS \cdot \sigma}$$

Cálculo de la posición del C.M. de un semicírculo homogéneo (densidad superficial σ constante)

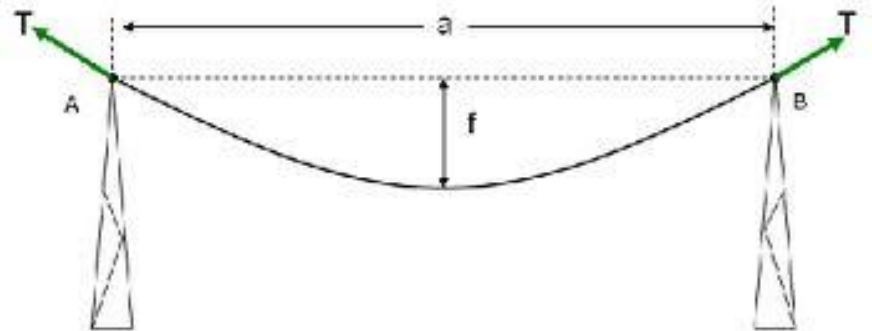


CENTRO DE MASAS. EJEMPLOS

CURVA

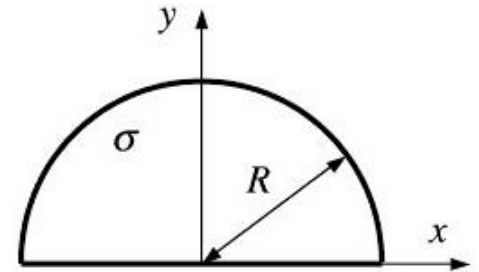
$$\vec{r}_G = \frac{\int_l \vec{r} \cdot dm}{\int_l dm} = \frac{\int_l \vec{r} \cdot dl \cdot \lambda}{\int_l dl \cdot \lambda}$$

Cálculo de la posición del C.M. de una catenaria



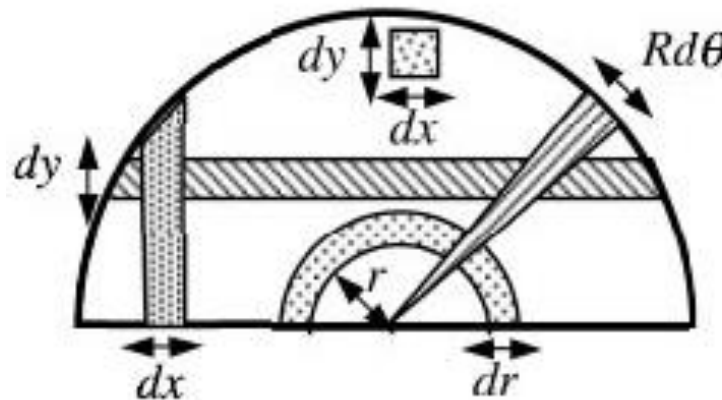
CENTRO DE MASAS. EJEMPLOS

Cálculo de la posición del C.M. de un semicírculo homogéneo (densidad superficial σ constante)



$$x_{CM} = \frac{\iint x \sigma dx dy}{\iint \sigma dx dy} ; y_{CM} = \frac{\iint y \sigma dx dy}{\iint \sigma dx dy}$$

- Dividimos el área en su conjunto de diferenciales de área .
En general tenemos muchas posibilidades:



- Elegimos una, de forma que la integral sea más sencilla de resolver.

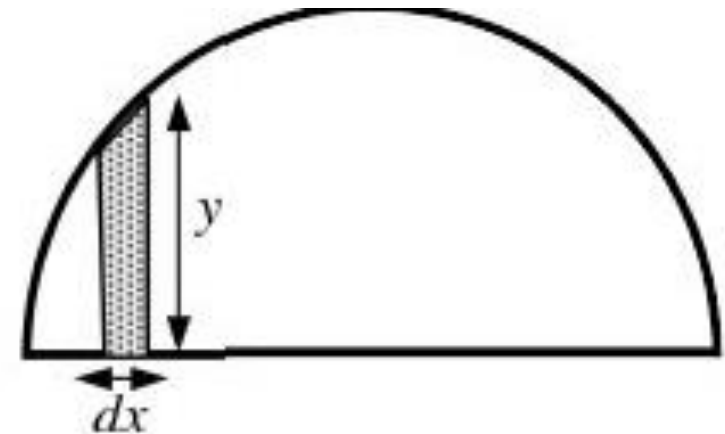
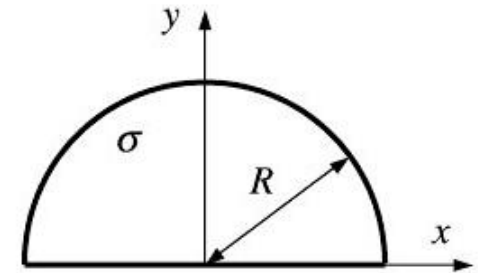
CENTRO DE MASAS. EJEMPLOS

$$x_{CM} = \frac{\iint x \sigma dx dy}{\iint \sigma dx dy}$$

$$\left. \begin{array}{l} dA = y dx \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{array} \right\} \Rightarrow dA = \sqrt{R^2 - x^2} dx$$

$$\int x dA = \int_{-R}^R x \sqrt{R^2 - x^2} dx = \left[-\frac{1}{3} (R^2 - x^2)^{3/2} \right]_{-R}^R = 0 \Rightarrow x_{CM} = 0$$

Cálculo de la posición del C.M. de un semicírculo homogéneo (densidad superficial σ constante)



CENTRO DE MASAS. EJEMPLOS

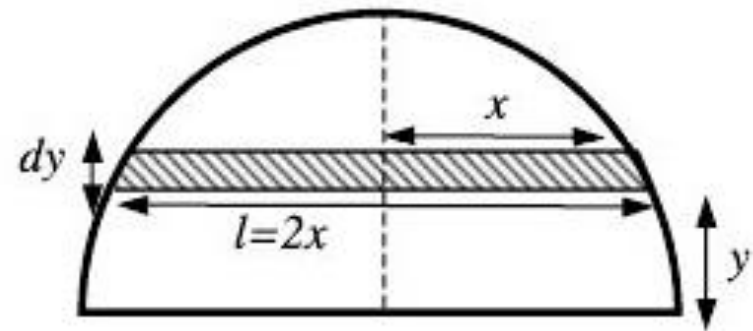
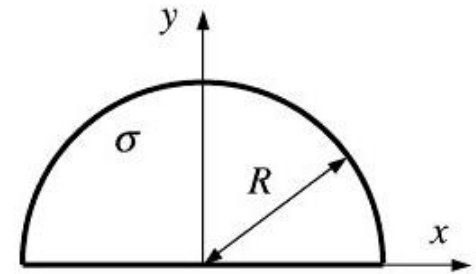
$$y_{CM} = \frac{\iint y \sigma dx dy}{\iint \sigma dx dy}$$

$$\left. \begin{array}{l} dA = 2x dy \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{array} \right\} \Rightarrow dA = 2\sqrt{R^2 - y^2} dy$$

$$\int y dA = \int_0^R 2y \sqrt{R^2 - y^2} dy = \left[-\frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \right]_0^R = \frac{2}{3} R^3$$

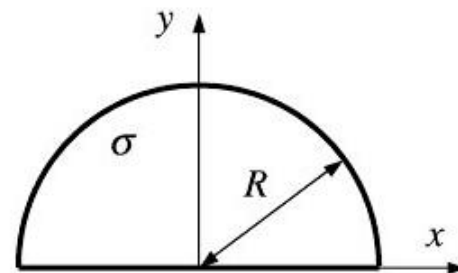
$$\Rightarrow y_{C.M.} = \frac{\int y dA}{A} = \frac{\frac{2}{3} R^3}{\frac{\pi}{2} R^2} = \frac{4R}{3\pi}$$

Cálculo de la posición del C.M. de un semicírculo homogéneo (densidad superficial σ constante)

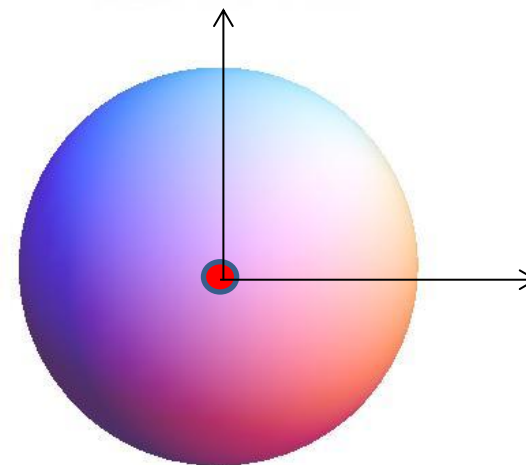
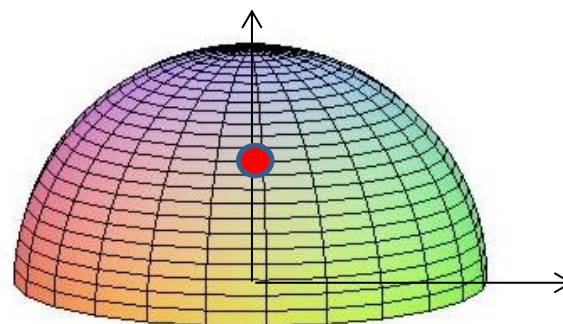
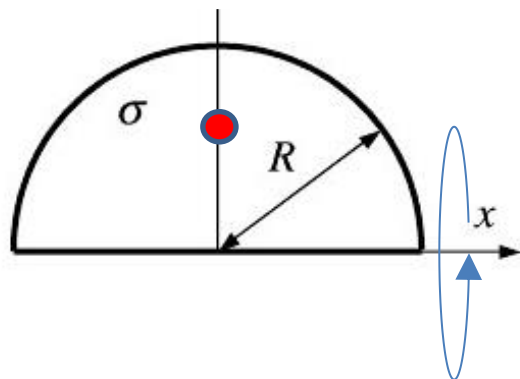
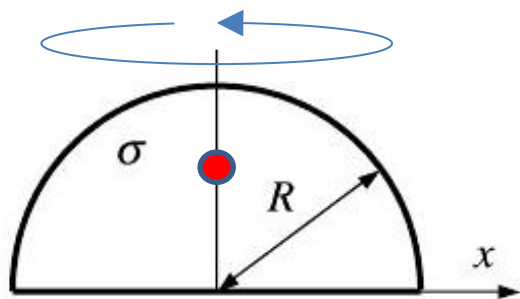


CENTRO DE MASAS. EJEMPLOS

Cálculo de la posición del C.M. de un
semicírculo homogéneo (densidad
superficial σ constante)



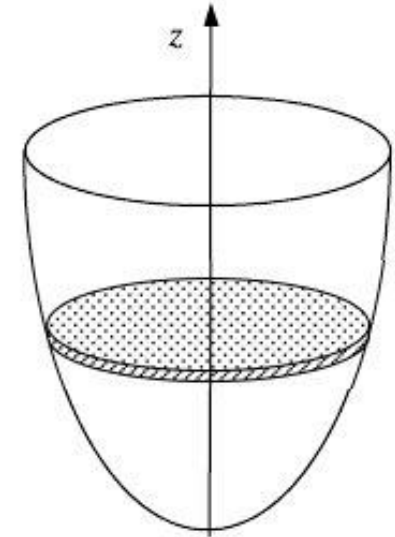
$$x_{CM} = 0 ; \quad y_{CM} = \frac{4}{3\pi} R \approx 0,42R$$



CENTRO DE MASAS. VOLUMENES

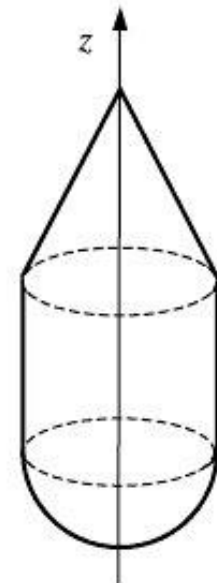
Otros ejemplos de aplicación de este método es calcular la posición del C.M. de una figura homogénea de revolución (esfera, paraboloides, etc) dividiéndola por ejemplo en infinitas rodajas perpendiculares al eje de revolución. Cada rodaja sería un disco cuya posición representativa en los cálculos sería la de su centro:

$$z_{C.M.} = \frac{\int z_{rodaja} dm_{rodaja}}{M}$$



Por otro lado, no es necesario que dicha división en elementos de masa sea en un número infinito de ellos. Se puede dividir la figura en un número finito de piezas, y utilizar para cada pieza la posición de su centro de masas:

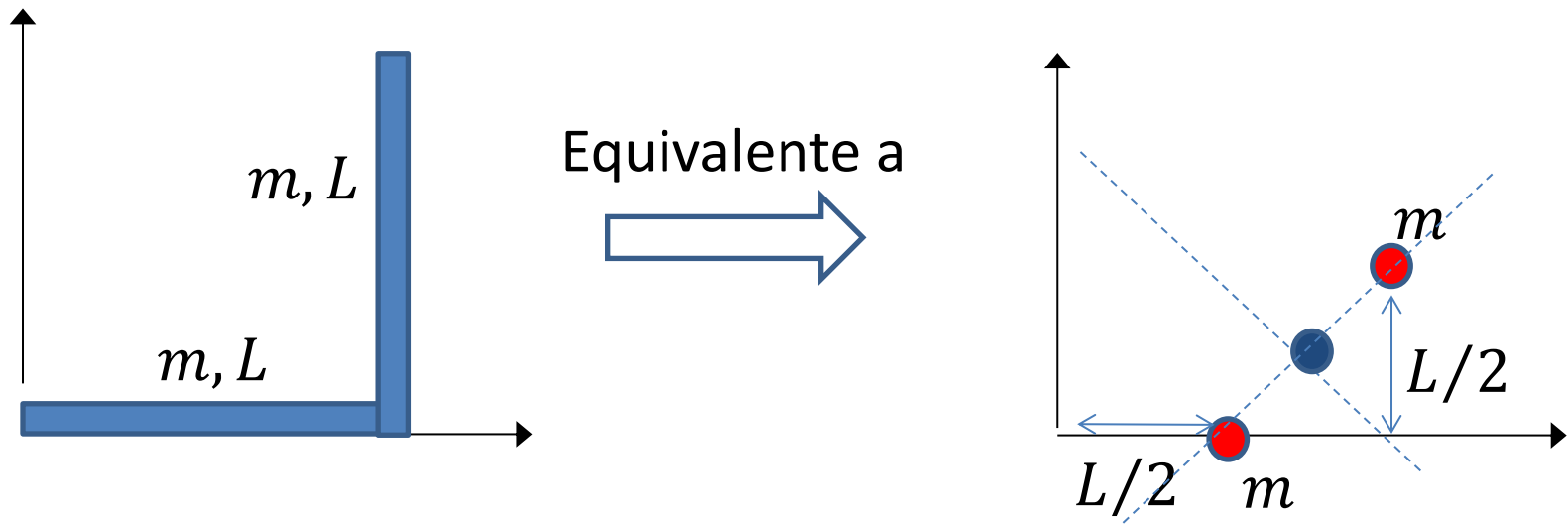
$$\vec{r}_{C.M.} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_{cono} \vec{r}_{cono} + m_{cilindro} \vec{r}_{cilindro} + m_{semiesfera} \vec{r}_{semiesfera}}{m_{cono} + m_{cilindro} + m_{semiesfera}}$$



Problemas de Examen – junio 2011

Un sistema plano de masas está constituido por dos varillas homogéneas, iguales, de longitud L y masa m . La varilla OA está situada, a partir del origen, sobre el eje OX de unos ejes cartesianos OXY, y la varilla AB está situada perpendicularmente a la anterior por su extremo A y dirigida según la dirección OY. Calcular:

a) Las coordenadas del centro de masas del sistema.



$$x_{CM} = \frac{m \cdot \frac{L}{2} + m \cdot L}{2m} = 3\frac{L}{4} ; \quad y_{CM} = \frac{m \cdot 0 + m \cdot \frac{L}{2}}{2m} = \frac{L}{4}$$

GEOMETRIA DE MASAS

- Centro de masas. Momentos de primer orden (estáticos)
- **Teoremas de Pappus-Guldin**
- Momentos de segundo orden (inercia)
- Teorema de Steiner
- Tensor de inercia. Momentos y direcciones principales
- Elipsoide de inercia
- Aplicaciones

Teoremas de Pappus-Guldin

- Aplicables a la determinación del centro de masas de distribuciones continuas, relacionan la posición del centro de masas de una curva y de una superficie plana con el área y el volumen engendrado al girar alrededor de un eje de su plano.

- **Teorema 1:**

$$\text{área } S = \text{longitud } L(\textit{curva}) \cdot \text{longitud } s(CM)$$

- **Teorema 2:**

$$\text{volumen } V = \text{area } S(\textit{placa}) \cdot \text{longitud } s(CM)$$

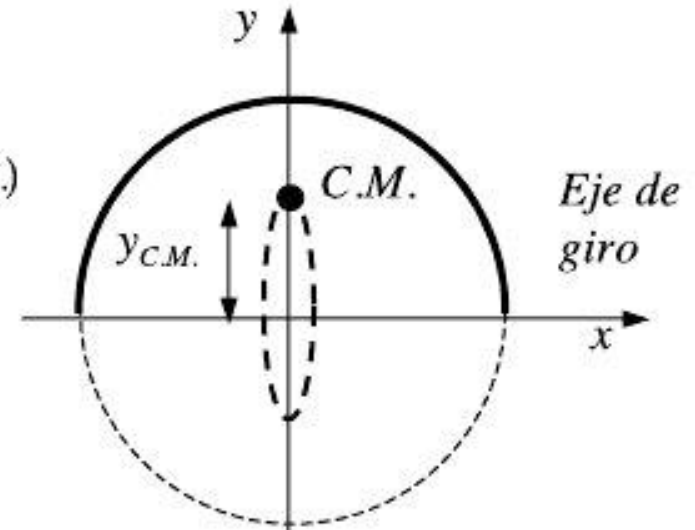
- No pueden utilizarse para determinar el centro de masas de cuerpos con volumen

Teoremas de Pappus-Guldin. Ejemplos

Ejemplo: C.M. de un alambre semicircular de radio R .

$$A_{\text{sup. esférica}} = L_{\text{semicircunferencia}} \text{ (recorrido del C.M. de la semicircunf.)}$$

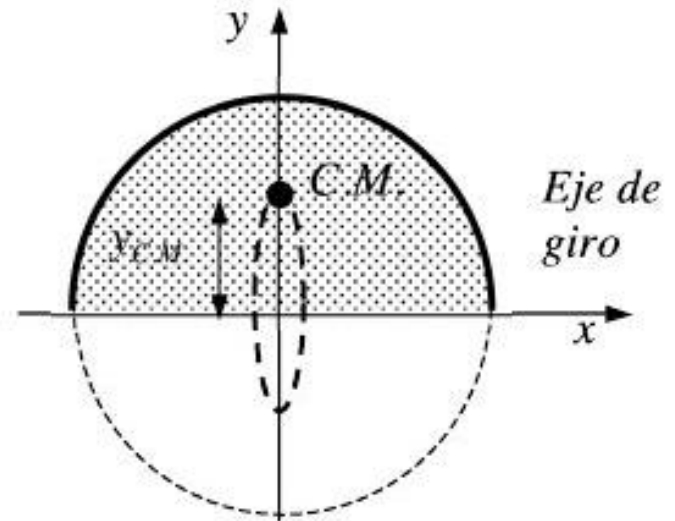
$$\Rightarrow 4\pi R^2 = \pi R (2\pi y_{C.M.}) \Rightarrow y_{C.M.} = \frac{2R}{\pi}$$



Ejemplo: C.M. de un semicírculo de radio R .

$$V_{\text{esfera}} = L_{\text{semicírculo}} \text{ (recorrido del C.M. del semicírculo)}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\pi}{2}R^2 (2\pi y_{C.M.}) \Rightarrow y_{C.M.} = \frac{4R}{3\pi}$$



GEOMETRIA DE MASAS

- Centro de masas. Momentos de primer orden (estáticos)
- Teoremas de Pappus-Guldin
- **Momentos de segundo orden (inercia)**
- Teorema de Steiner
- Tensor de inercia. Momentos y direcciones principales
- Elipsoide de inercia
- Aplicaciones

GEOMETRIA DE MASAS

- **Momentos de segundo orden (inercia)**
 - Respecto a un punto
 - Respecto a una recta
 - Respecto a un plano
- **Productos de inercia**
- **Relaciones entre momentos de inercia**

GEOMETRIA DE MASAS

- **Momentos de inercia (dinámicos)**

- Respecto a un punto O

$$I_O = \sum_i m_i r_i^2 = \iiint r^2 dm = \iiint r^2 \rho dV$$

- Respecto a una recta con vector unitario $\mathbf{u}$

$$I_r = \sum_i m_i |(\mathbf{u} \times \mathbf{r}_i) \times \mathbf{u}|^2 = \iiint |(\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{u}|^2 dm$$

O: punto de la recta

GEOMETRIA DE MASAS

- **Momentos de inercia (dinámicos)**
 - Respecto a un plano con vector normal $\mathbf{u}$

$$I_{\pi} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u})^2 = \iiint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{u})^2 \rho dV$$

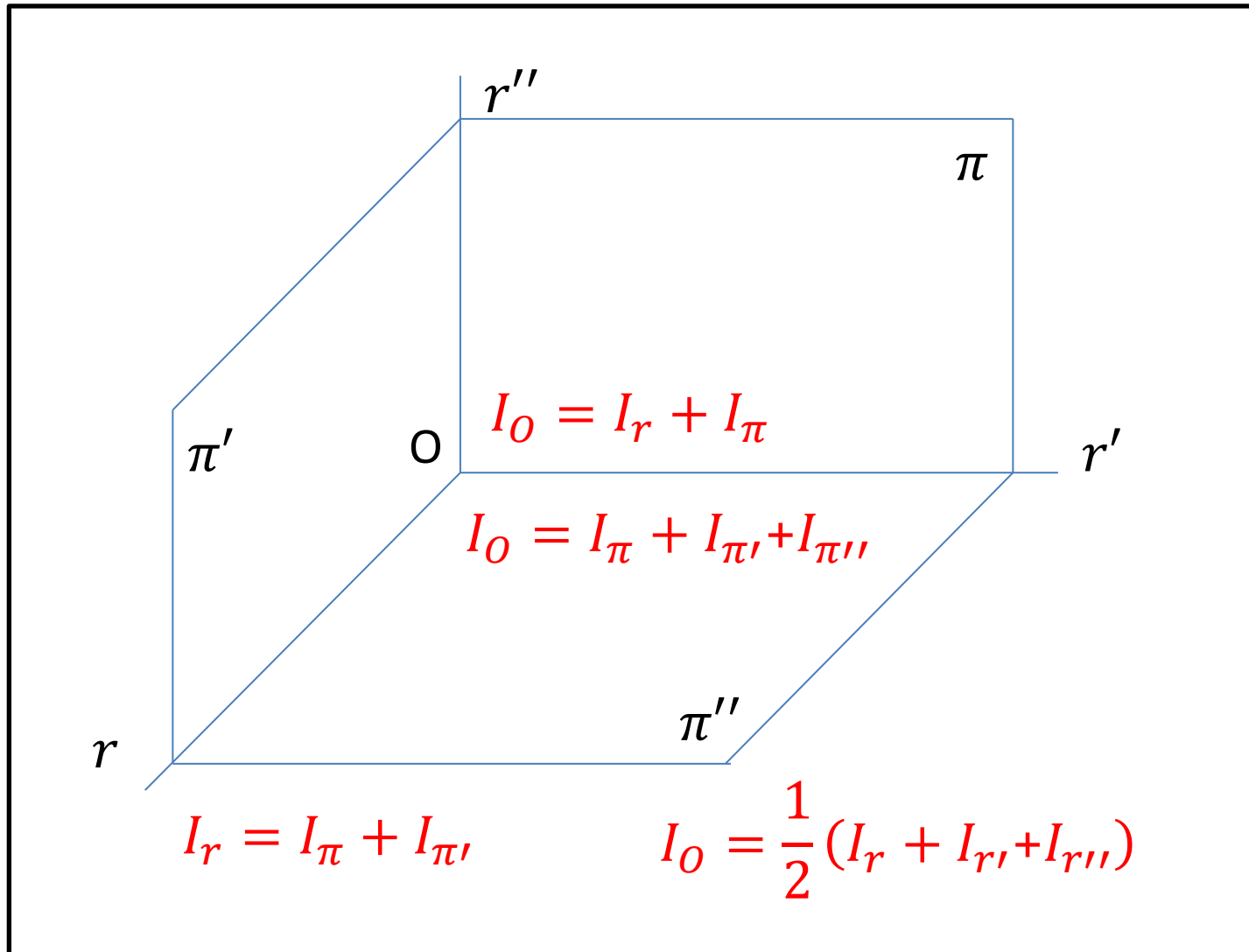
O: punto del plano

- **Productos de inercia**

$$P_{\pi\pi'} = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{r}'_i \cdot \mathbf{u})$$

O,O': puntos de los planos

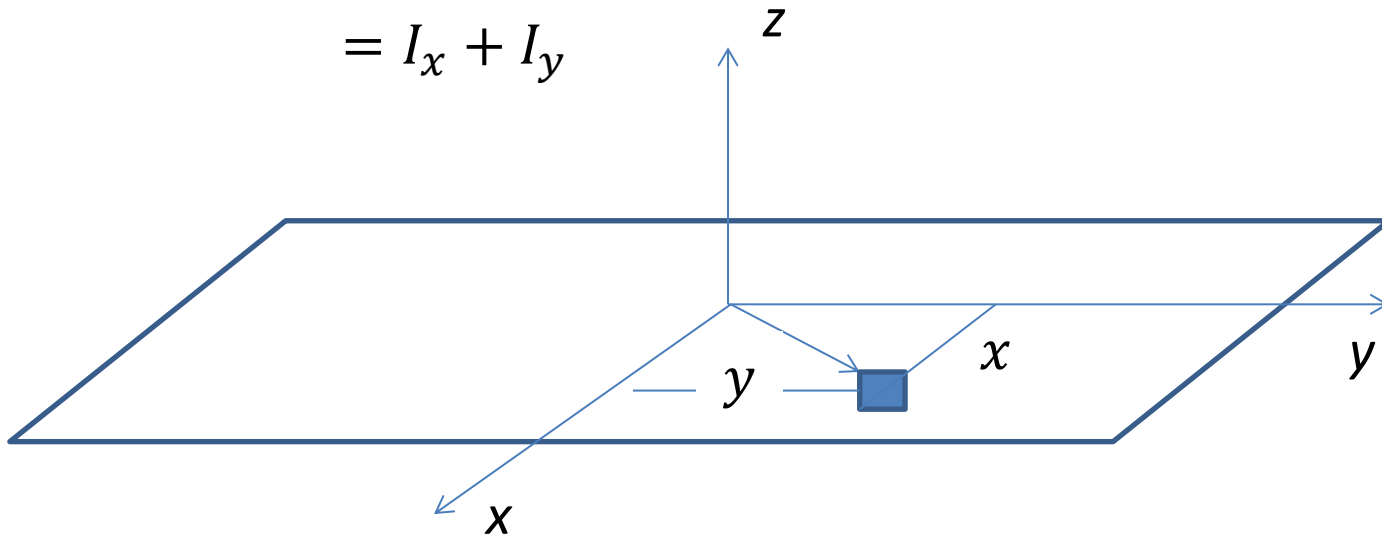
Relaciones entre momentos de inercia



Momentos de inercia - Simetrías

- Para las figuras planas ($z = 0$)

$$I_O = \int (x^2 + y^2) dm = I_z = \int x^2 dm + \int y^2 dm$$
$$= I_x + I_y$$



Anillo de radio R:

$$I_O = \int (x^2 + y^2) dm = \int R^2 dm = MR^2 = I_x + I_y$$

Momentos de inercia - Simetrías

Anillo de radio R:

$$I_o = \int (x^2 + y^2) dm = \int R^2 dm = MR^2 = I_x + I_y$$

Por simetría

$$I_x = I_y$$

Luego

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_o = \frac{1}{2} MR^2$$

– Disco homogéneo de radio R ?

Momentos de inercia - Simetrías

Esfera de radio R: Respecto al origen de coordenadas

$$\begin{aligned} I_O &= \int (x^2 + y^2 + z^2) dm = \int r^2 \rho dV \\ &= \rho \int_0^R r^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{5} \rho R^5 \end{aligned}$$

Al ser

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

Obtenemos

$$I_O = \frac{3}{5} MR^2$$

Momentos de inercia - Simetrías

Esfera de radio R: Respecto a un eje arbitrario

$$I_0 = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z)$$

Al ser por simetría

$$I_x = I_y = I_z$$

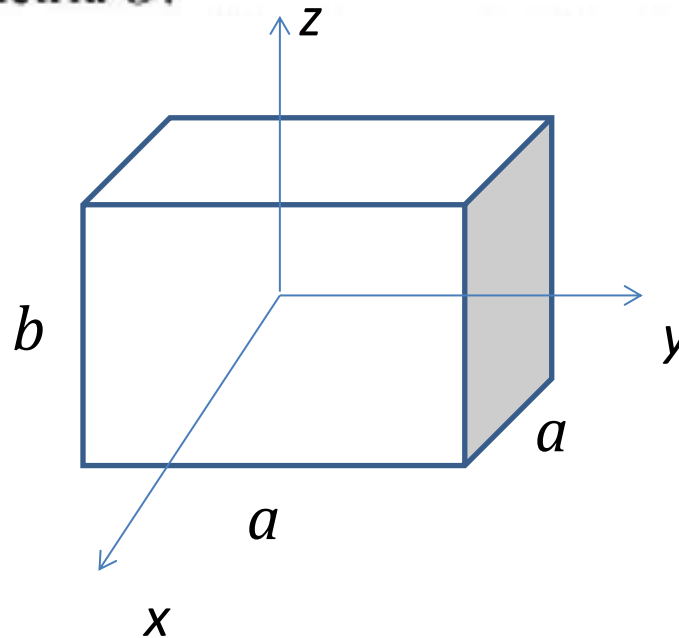
obtenemos

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3} I_0 = \frac{2}{5} MR^2$$

Problemas de Examen – junio 2011

Un sólido homogéneo, cuya densidad de masa es ρ , tiene la forma de un paralelepípedo cuyos lados tienen de longitudes a , a y b . Calcular:

a) Momentos de inercia respecto a unos ejes cartesianos OX , OY y OZ con origen en su centro de simetría O .



$$(\mathbf{u} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{r}_{\perp} \rightarrow I_{eje} = \iiint r_{\perp}^2 dm$$

Problemas de Examen – junio 2011

Paralelepípedo : Respecto al eje z

$$\begin{aligned} I_z &= \int (x^2 + y^2) dm = \rho \int x^2 dx dy dz + \rho \int y^2 dx dy dz \\ &= \rho ab \int x^2 dx + \rho ab \int y^2 dy \end{aligned}$$

Al ser por simetría

$$\int x^2 dx = \int y^2 dx = \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx = \frac{a^3}{12}$$

obtenemos

$$I_z = \rho \frac{a^4 b}{6}$$

Problemas de Examen – junio 2011

Paralelepípedo : Respecto al eje z

Al ser

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{a^2 b}$$

Obtenemos finalmente

$$I_z = \frac{M a^2}{6}$$

De forma análoga, respecto al eje x

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) dm = \rho \int y^2 dx dy dz + \rho \int z^2 dx dy dz \\ &= \rho a b \int y^2 dy + \rho a^2 \int z^2 dz \end{aligned}$$

Paralelepípedo : Respecto al eje x

donde ahora

$$\int z^2 dz = \int_{-b/2}^{b/2} z^2 dz = \frac{b^3}{12}$$

Por tanto,

$$I_x = \rho \frac{a^2 b}{12} (a^2 + b^2) = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

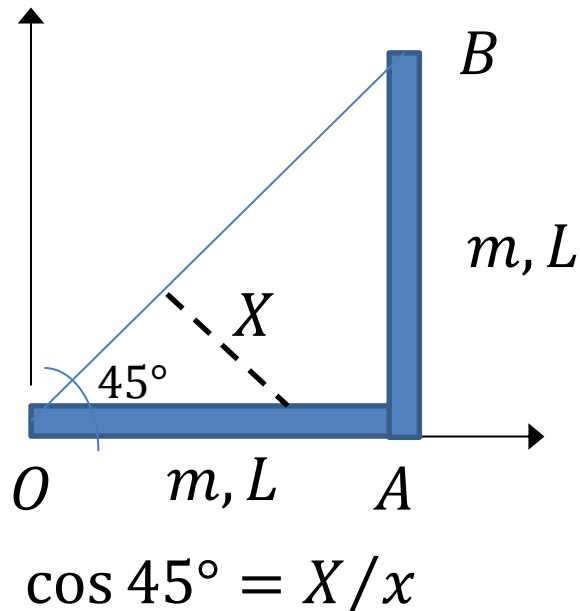
Y por simetría, finalmente

$$I_y = I_x = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2)$$

Problemas de Examen – junio 2011

Un sistema plano de masas está constituido por dos varillas homogéneas, iguales, de longitud L y masa m . La varilla OA está situada, a partir del origen, sobre el eje OX de unos ejes cartesianos OXY, y la varilla AB está situada perpendicularmente a la anterior por su extremo A y dirigida según la dirección OY. Calcular:

- Las coordenadas del centro de masas del sistema.
- El momento de inercia del sistema respecto a la recta OB.



Por simetría

$$I_1 = I_2$$

Donde

$$I_1 = \int X^2 dm$$

$$\text{Con } X = x \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } dm = \lambda dx$$

Problemas Propuestos de Examen

Una figura plana tiene forma de sector circular de radio R y ángulo α . La densidad superficial de masa es σ . Calcular:

- a) Momentos de inercia respecto a los ejes de simetría de la figura.
- b) Valor del ángulo para que la elipse central de inercia sea una circunferencia.

Se tiene un cono de masa M , cuya base es un círculo de radio R , con semiángulo de abertura de 45° , y cuyo vértice está situado en el origen de un sistema cartesiano $OXYZ$. Calcular:

- a) Momentos de inercia respecto al plano OXY y al eje OZ .
- b) Momento de inercia respecto a la generatriz contenida en el plano OYZ ($y \geq 0, z \geq 0$).

GEOMETRIA DE MASAS

- Centro de masas. Momentos de primer orden (estáticos)
- Teoremas de Pappus-Guldin
- Momentos de segundo orden (inercia)
- **Teorema de Steiner**
- Tensor de inercia. Momentos y direcciones principales
- Elipsoide de inercia
- Aplicaciones

TEOREMA DE STEINER. Momentos de inercia

- Relaciona los momentos de inercia con sus momentos relativos respecto al centro de masas, y a ejes y planos paralelos que pasan por el centro de masas.
- Respecto a un punto

$$I_O = I_{CM} + m \cdot d^2(O, CM)$$

- Respecto a una recta

$$I_r = I_{rCM} + m \cdot d^2(r, rCM)$$

TEOREMA DE STEINER. Momentos de inercia

- Relaciona los momentos de inercia con sus momentos relativos respecto al centro de masas, y a ejes y planos paralelos que pasan por el centro de masas.
- Respecto a un plano

$$I_{\pi} = I_{\pi CM} + m \cdot d^2(\pi, \pi CM)$$

- **Productos de inercia**

$$P_{\pi\pi'} = P_{\pi CM, \pi' CM} + m \cdot d(\pi, \pi CM) \cdot d(\pi', \pi' CM)$$

MATRIZ DE INERCIA

- Matriz 3X3 simétrica, cuyos elementos son los momentos y productos de inercia en coordenadas cartesianas, con la representación

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

- Relativa al sistema de coordenadas con origen en el punto O. Si se elige O como el centro de masas, se denomina **matriz central de inercia**.

MATRIZ DE INERCIA. Aplicación

- Conocida la matriz de inercia

$$I = \begin{pmatrix} I_x & -P_{xy} & -P_{xz} \\ -P_{xy} & I_y & -P_{yz} \\ -P_{xz} & -P_{yz} & I_z \end{pmatrix}$$

el momento de inercia del sistema respecto a una recta con vector unitario **u** está dado por

$$I_r = u^T \cdot I \cdot u = (u_x \quad u_y \quad u_z) \cdot I \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Problemas Propuestos de Examen

Una figura plana tiene forma de sector circular de radio R y ángulo α . La densidad superficial de masa es σ . Calcular:

- Momentos de inercia respecto a los ejes de simetría de la figura.
- Valor del ángulo para que la elipse central de inercia sea una circunferencia.

Se tiene un cono de masa M , cuya base es un círculo de radio R , con semiángulo de abertura de 45° , y cuyo vértice está situado en el origen de un sistema cartesiano $OXYZ$. Calcular:

- Momentos de inercia respecto al plano OXY y al eje OZ .
- Momento de inercia respecto a la generatriz contenida en el plano OYZ ($y \geq 0, z \geq 0$).

DIRECCION Y MOMENTOS PRINCIPALES

- La matriz de inercia es diagonalizable, en un nuevo sistema de coordenadas con origen en O, con la representación

$$I = \begin{pmatrix} I'_x & 0 & 0 \\ 0 & I'_y & 0 \\ 0 & 0 & I'_z \end{pmatrix}$$

- **Direcciones principales:** ejes Ox' , Oy' , Oz'
- **Momentos principales de inercia** (I'_x, I'_y, I'_z)

Determinación de la Dirección y los momentos principales

- Diagonalización de la matriz de inercia I . Ecuación de valores propios (λ)

$$I \cdot v = \lambda v$$

- **Direcciones principales:** ejes $v = (Ox', Oy', Oz')$
- **Momentos principales de inercia** $\lambda = (I'_x, I'_y, I'_z)$

ELIPSOIDE Y ELIPSE DE INERCIA

- En el espacio tridimensional (elipsoide)

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2P_{xy}xy - 2P_{xz}xz - 2P_{yz}yz = 1$$

- En el plano (elipse)

$$I_x x^2 + I_y y^2 - 2P_{xy}xy = 1$$

- En ambos casos, lugar geométrico de los puntos cuya distancia al origen coincide con el radio de giro del momento de inercia en esa recta:

$$d = \sqrt{\frac{I_r}{m}}$$

Problemas Propuestos de Examen

Una figura plana tiene forma de sector circular de radio R y ángulo α . La densidad superficial de masa es σ . Calcular:

- Momentos de inercia respecto a los ejes de simetría de la figura.
- Valor del ángulo para que la elipse central de inercia sea una circunferencia.

Se tiene un cono de masa M , cuya base es un círculo de radio R , con semiángulo de abertura de 45° , y cuyo vértice está situado en el origen de un sistema cartesiano $OXYZ$. Calcular:

- Momentos de inercia respecto al plano OXY y al eje OZ .
- Momento de inercia respecto a la generatriz contenida en el plano OYZ ($y \geq 0, z \geq 0$).