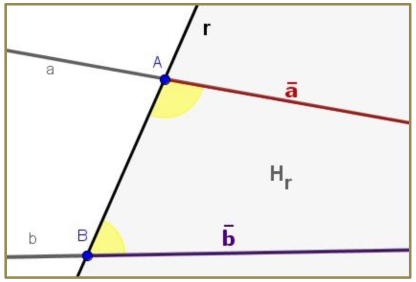
¿Cómo hacer una demostración? Ejemplo. Ejercicio 4.8: AXIOMA V DE EUCLIDES

- Sea r una recta que corta a otras dos **a** y **b** en en los puntos **A** y **B**, y $\mathbf{H_r}$ uno de los semiplanos determinados por r. Denotamos $\bar{a}$, $\bar{b}$ las semirrectas determinadas por **a** y **b** en ese semiplano; $\bar{r}_{AB}$, la semirrecta con vértice en **A** y pasa por **B**; $\bar{r}_{BA}$, la semirrecta con vértice en **B** y pasa por **A**; **∠A={$\bar{r}_{AB}$, $\bar{a}$}; ∠B={$\bar{r}_{BA}$, $\bar{b}$}.**

Si **∠A+∠B** es **menor que un ángulo llano** entonces las semirrectas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ **se cortan en un punto**.

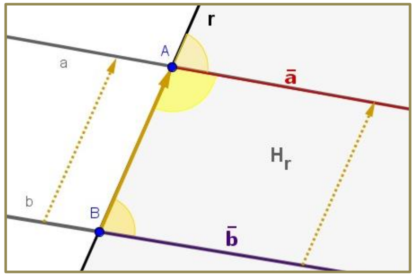


(Es el axioma que uso Euclides en "Los Elementos", y es equivalente al axioma de las paralelas).

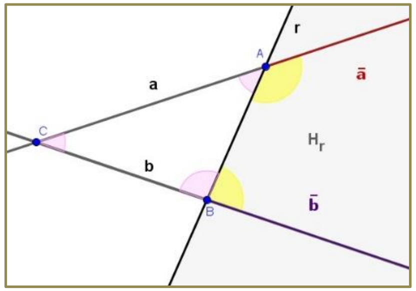
¿Cómo probarlo?

En primer lugar, como siempre deberíamos hacer un dibujo de la situación para aclarar las ideas *(Ver dibujo 1)*.

Después, antes de ver qué técnica aplicamos (encontrar el punto directamente, por el contrarrecíproco, reducción al absurdo,…) deberíamos asegurarnos de entender la situación de los elementos que nos dan y ver qué relación tiene con resultados ya conocidos. En principio parece que el resultado es *evidente*; pero hay que probarlo.



1) En primer lugar, está claro que las rectas **a y b no pueden ser paralelas**. Si lo fuesen, la suma **∠A +∠B** sería un ángulo llano. Para comprobarlo, bastaría hacer una traslación paralela que llevase B a A. *(Ver dibujo 2)*.



2) Como **a y b** no son paralelas, **se cortan en algún punto C**. Habrá que comprobar que $C \in H_r$. De manera "natural", surge el investigar qué ocurre si C estuviese en el otro semiplano. Al hacer el dibujo de la situación *(Ver dibujo 3)*, observamos que tenemos el triángulo **ΔABC**. Para este triángulo, la suma de los ángulos formados en **A** y **B** es menor que un llano. Además, los ángulos **∠A** y **∠B** del enunciado son precisamente los suplementarios de los correspondientes ángulos del triángulo.

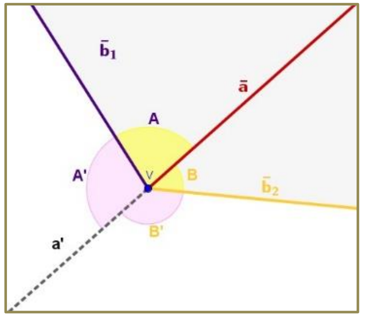
Pero resulta que si la suma de dos ángulos está definida (y es menor que un llano), entonces la suma de sus suplementarios no está definida (no es menor que un llano). Por eso debe ser $C \in H_r$. , con lo que las semirrectas $\bar{a}$ y $\bar{b}$ se cortan en el punto **C**.

Todos estos razonamientos parecen evidentes, pero faltaría probar la última afirmación, sobre la suma de dos ángulos, y la de sus suplementarios. Eso podría demostrarse aparte, como consecuencia del siguiente ejercicio:

Ejercicio: Sean A y B dos ángulos no nulos, y A', B' sus correspondientes ángulos suplementarios. Son equivalentes:

a) La suma de **A y B está definida** y es menor que un ángulo llano.

b) La suma de **A' y B' NO está definida**. (Hablando impropiamente, *"su suma es mayor que un ángulo llano"*).



Demostración:

Podemos tomar representantes de los ángulos, de manera que tengan en común el vértice **V** y un lado $\bar{a}$ (semirrecta en que se divide una recta **a**). El otro lado de **A** puede tomarse como la semirrecta $\bar{b}_1$ determinada por una recta $\mathbf{b_1}$, y el otro lado de **B** la semirrecta $\bar{b}_2$ determinada por una recta $\mathbf{b_2}$. *(Ver dibujo)*.

Por tanto, **A**$=\angle\{\bar{a}, \bar{b}_1\}$, **B**$=\angle\{\bar{a}, \bar{b}_2\}$. Denotamos **a'** la otra semirrecta en que se divide **a**. Los complementarios serán **A'**$=\angle\{\bar{b}_1, \mathbf{a'}\}$, **B'**$=\angle\{\bar{b}_2, \mathbf{a'}\}$.

Por definición la suma de **A** y **B** está definida y es el ángulo $\angle\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$, cuando la semirrecta $\bar{a}$ esté en su interior; y la de **A', B'** cuando sea **a'** la que está en su interior.

La suma es un ángulo llano sólo cuando $\bar{b}_1$ y $\bar{b}_2$ forman una recta, en ese caso tanto **A y B** como **A' y B'** suman un ángulo llano.

Por último, cuando no forman un ángulo llano, la semirrecta $\bar{a}$ está en el interior de $\angle\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ precisamente cuando **a'** no está en el interior de $\angle\{\bar{b}_1, \bar{b}_2\}$ (si $\bar{a}$ está en uno de los semiplanos determinados por **b**, entonces **a'** está en el otro semiplano).