Tema 1

Oscilaciones libres y forzadas

TUTV-II

Oscilaciones Libres: Dinámica

Juan José Miralles Canals. Tutor InterCampus.

Centro Asociado de Albacete

Índice

- 2.1. Dinámica del m.a.s
- 2.2. Sistemas físicos modelizables-m.a.s.
- 2.3. Resolución de problemas

Bibliografía

- **French.** ***Vibraciones y Ondas*****. Capítulo 3**
- **Ryley-Sturges.** ***Ingeniería Mecánica*****. Volumen II. Dinámica. Capítulo 21**
- **Rañada.** ***Dinámica Clásica*****. Capítulo 6**

Objetivos

- A partir de la resolución de la dinámica de un sistema físico con un grado de libertad, deducir la ecuación diferencial de un oscilador libre (MAS)
- Saber usar la solución del oscilador libre en función de las condiciones iniciales
- Resolver problemas de oscilaciones donde intervengan muelles horizontales y verticales
- Resolver problemas de oscilaciones con arreglos de muelles y ligaduras del movimiento.
- Determinar la constante de un resorte equivalente a un conjunto de resortes en serie y paralelo
- Analizar bajo que condiciones un péndulo simple se puede modelizar mediante un MAS

Objetivos

- Saber identificar la dinámica de un sistema físico con un grado de libertad, a partir de la ecuación diferencial del movimiento.

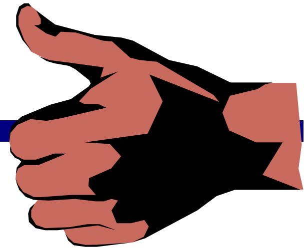
- Saber obtener la ecuación diferencial del movimiento, en un sistema físico con un grado de libertad, a partir de la segunda ley de Newton.

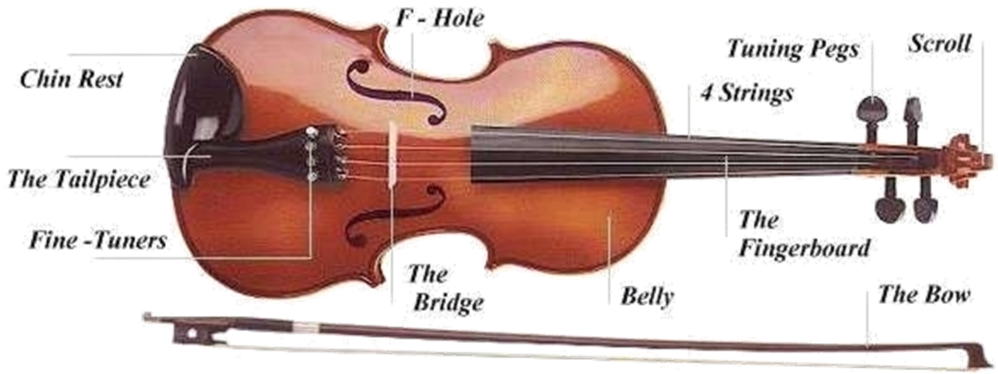
- Saber obtener la ecuación diferencial del movimiento, en un sistema físico con un grado de libertad, a partir de la conservación de la energía mecánica.

- Saberidentificar la frecuencia natural, en la dinámica de un sistema físico con un grado de libertad, susceptible de oscilar como un MAS.

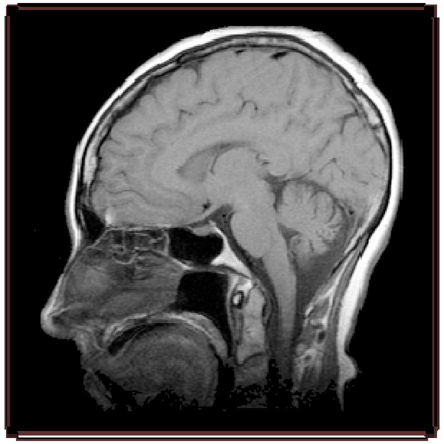
- Saber graficar la posición, velocidad y aceleración de un sistema físico, a partir de la determinación de la ecuación diferencial del movimiento del mismo.

Vibraciones positivas

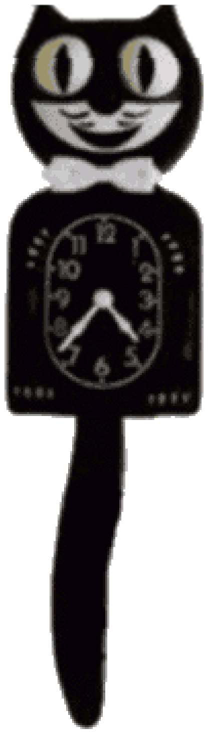




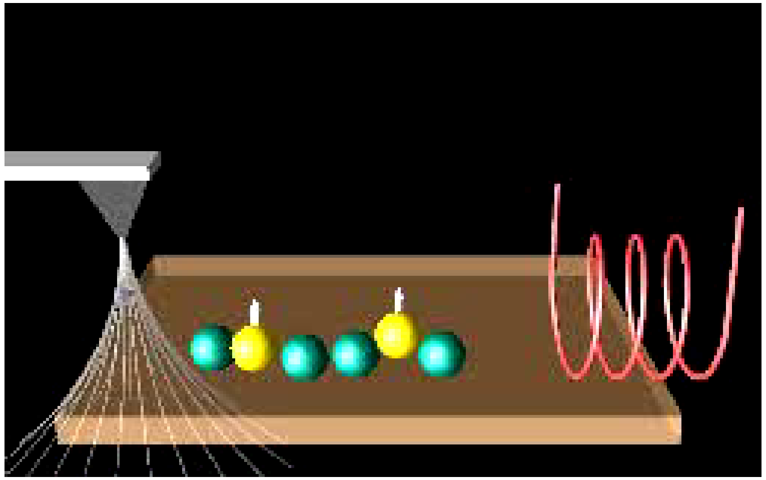
Instrumentos musicales



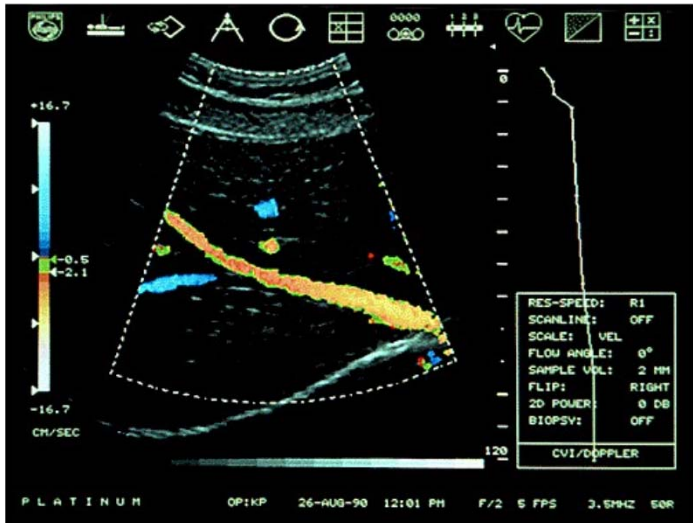
IRM



Microscopio de fuerza atómica – (AFM)



Ultrasonidos



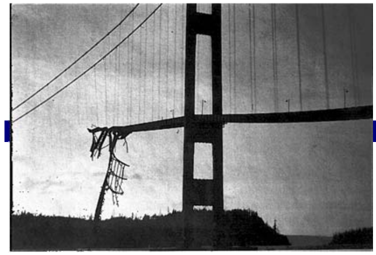
Medidas de tiempo

Diapositiva 6

J1

Lp«jhqhv#gh#xqd#fdeh}d#kxpdqd#rewhqlgdv#sru#uhvrqdqfld#p

Mxdq1Pludoohv>#3:23525345



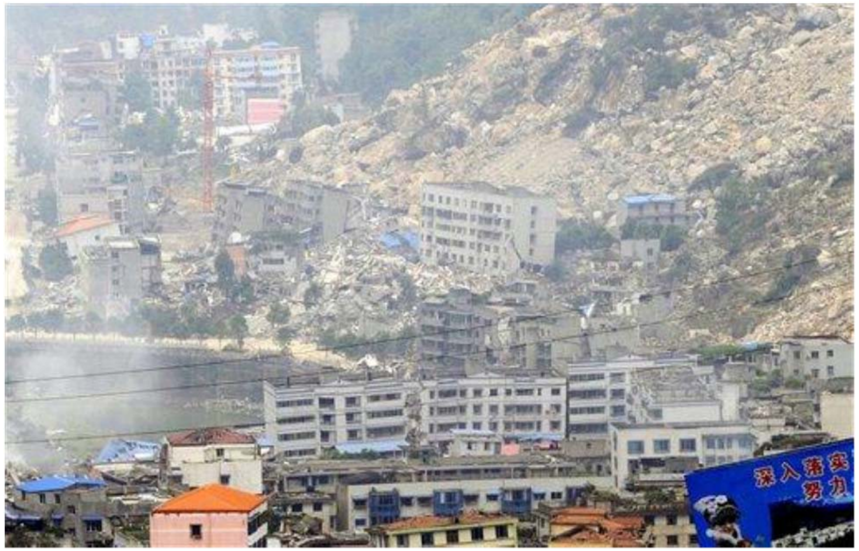
Vibraciones indeseables

Tacoma Narrows Bridge (1940)

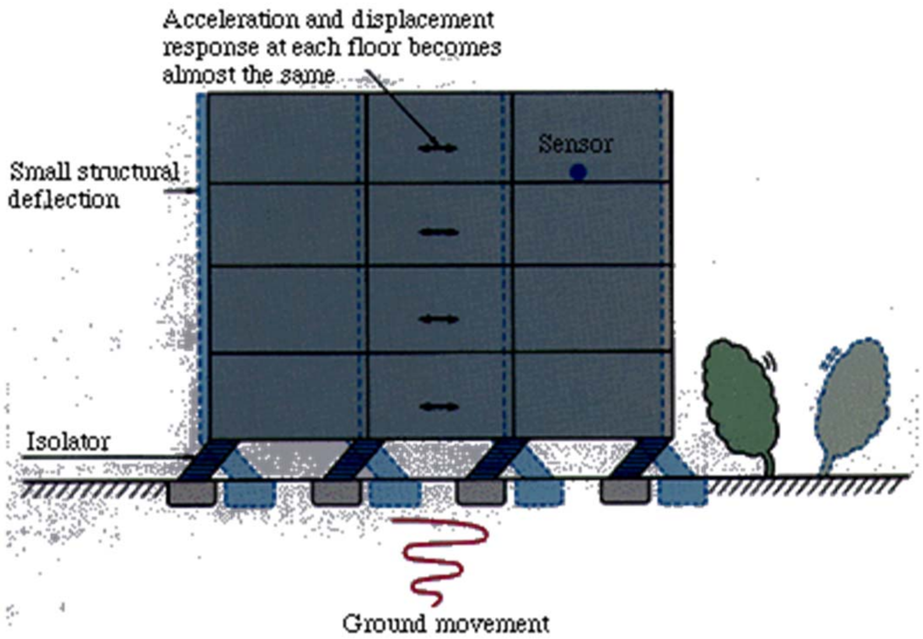
Vibraciones induicidas no controladas, producen catástrofes:

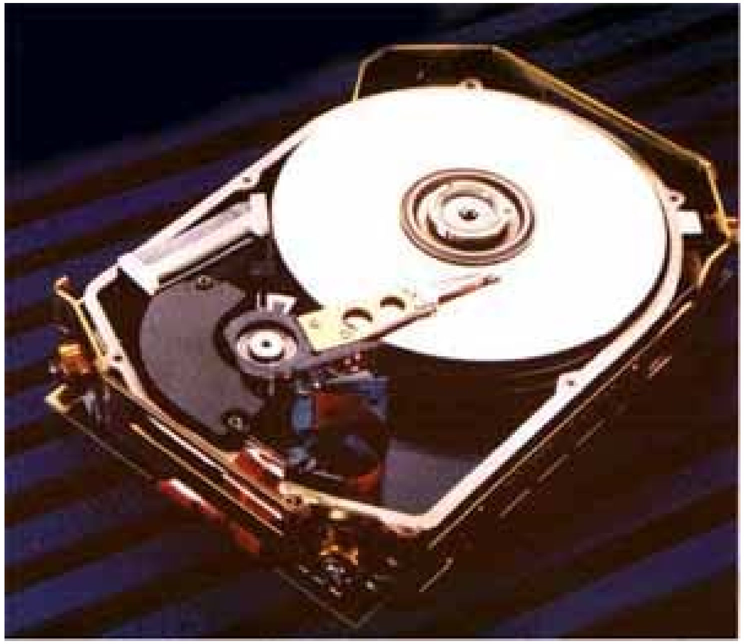
Kobe, Japón 1995

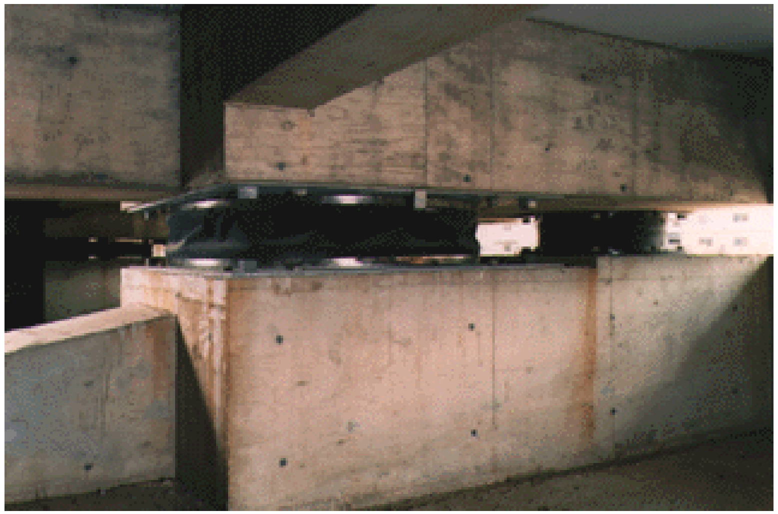
Sichuan Province, China, 2008



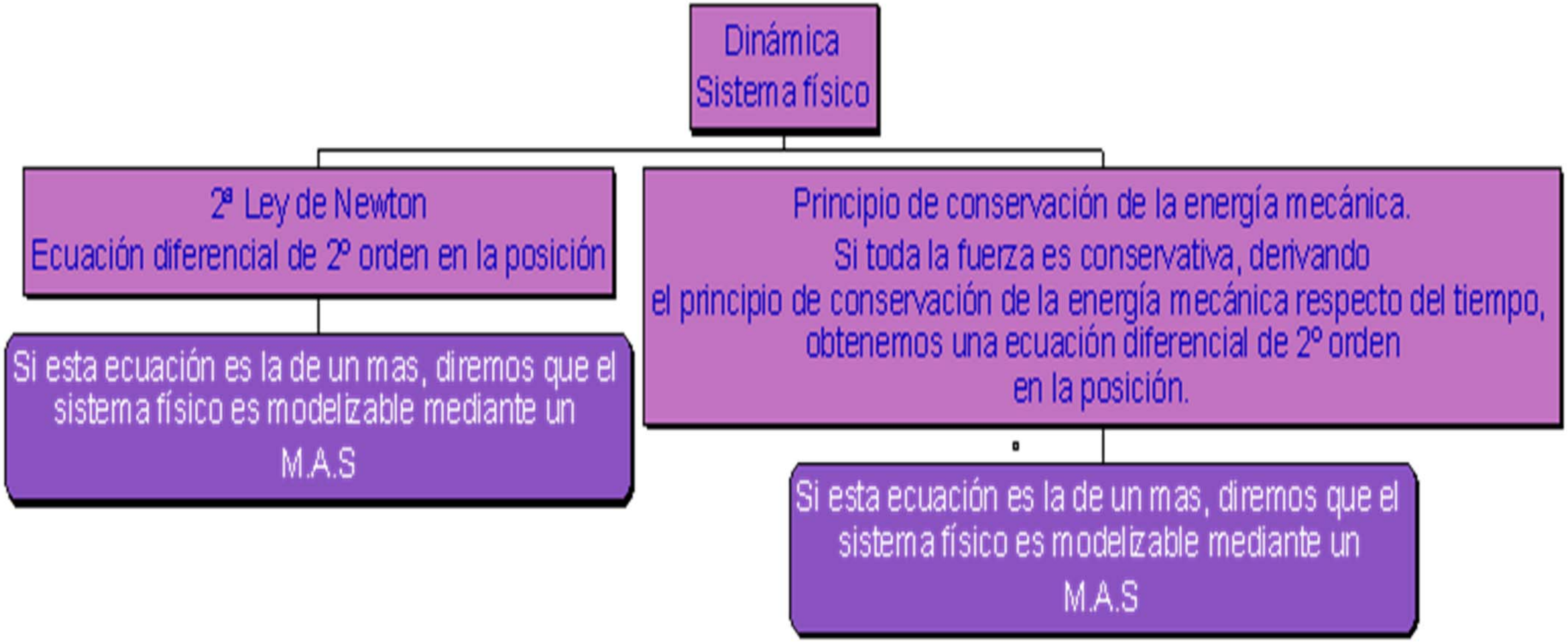
Necesidad de controlar y aislar las vibraciones







Dinámica del M.A.S



Dinámica del M.A.S. Solución

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Solución del m.a.s en función de las *condiciones iniciales*, posición x_o y velocidad v_o

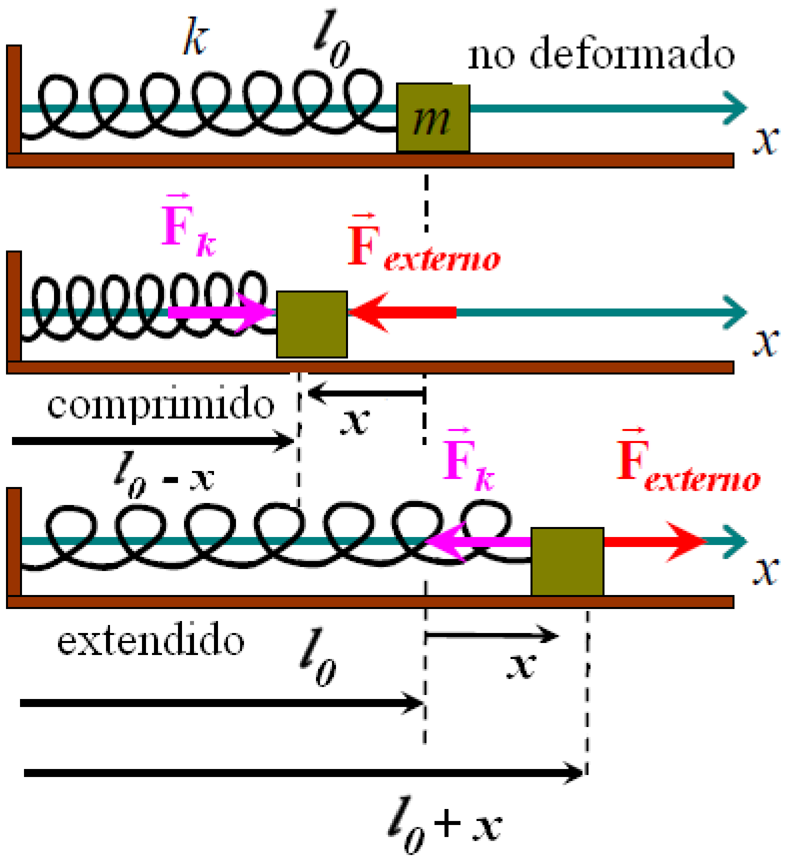
$$x(t) = A(x_0, v_0)\,Cos(\omega_0 t + \delta(x_0, v_0))$$

Las constantes de integración se obtienen como:

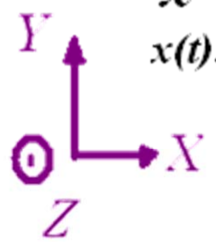
$$A = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_0 w_0}\right)$$

Oscilaciones muelle-masa

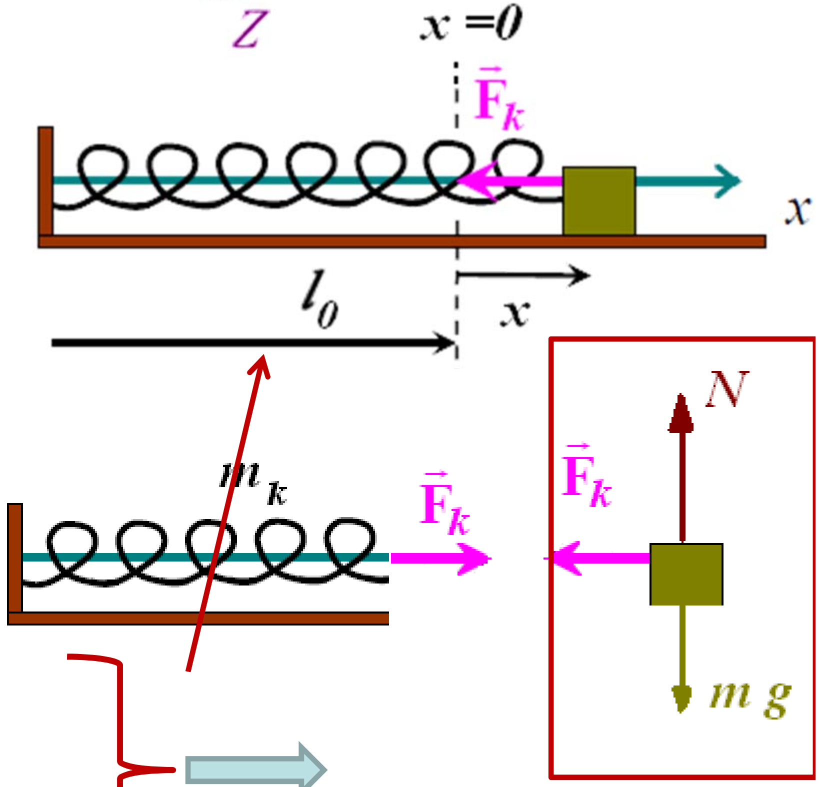


$$\vec{F} = -k\,\vec{\Delta x}$$



$x = 0$ no deformado

$x(t)$: posición de la masa m

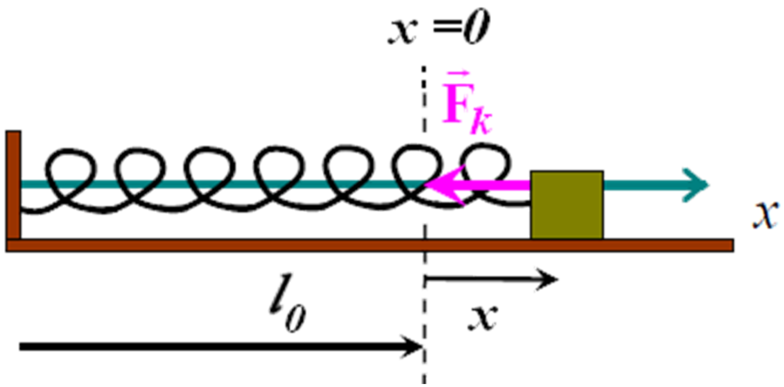


$$N - m\,g = 0 \Longrightarrow N = m\,g$$

$$-k\,x = m\,a = m\,\ddot{x} \Longrightarrow m\,\ddot{x} + k\,x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

Oscilaciones muelle-masa



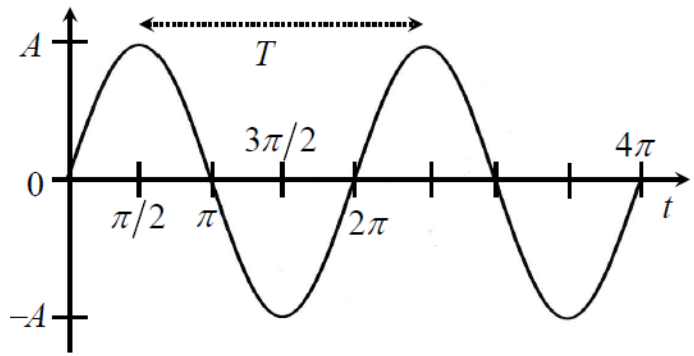
$$\ddot{x} + \boxed{\frac{k}{m}}\, x = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

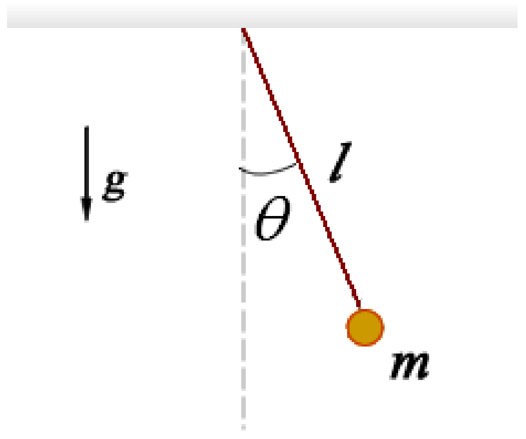
$$w_0^{\,2} = \boxed{\frac{k}{m}} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

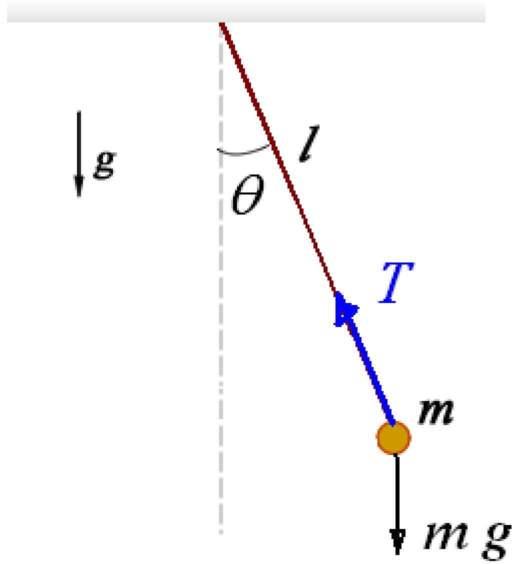
$$\boxed{x(t) = A(x_0, v_0)\, Cos(\omega_0 t + \delta(x_0, v_0))}$$

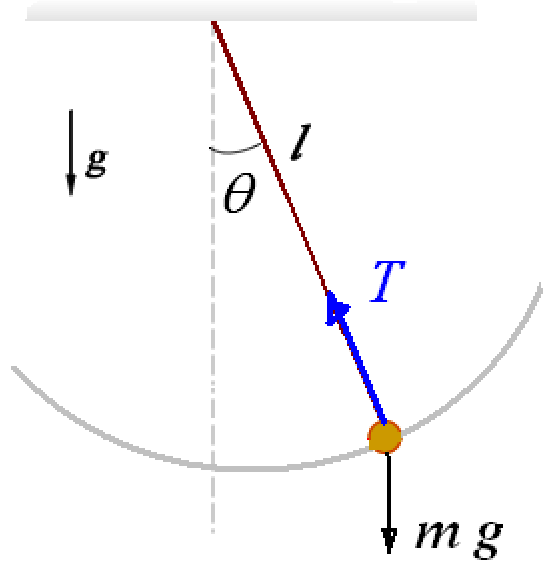
$$\boxed{A = \frac{\sqrt{x_0^2 \omega_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}} \qquad \boxed{\delta = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_0 w_0}\right)}$$

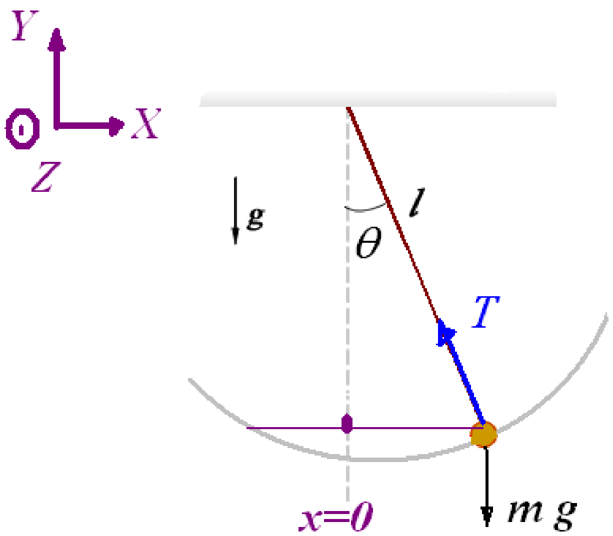


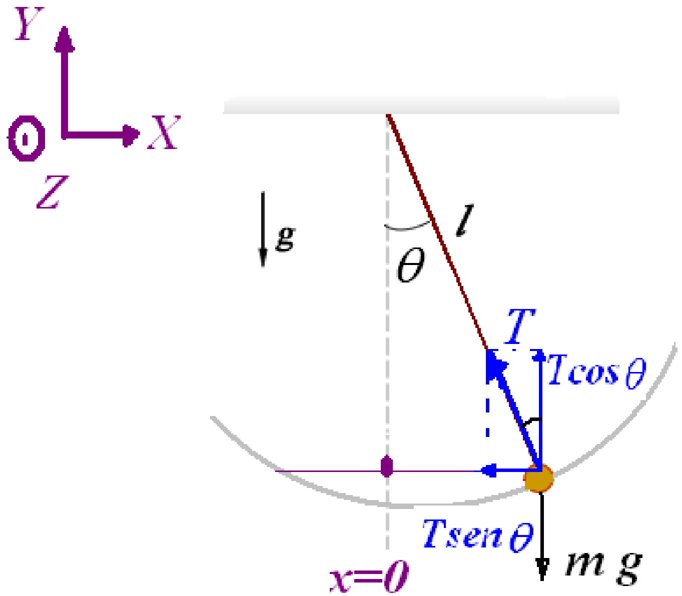
Oscilaciones péndulo ideal



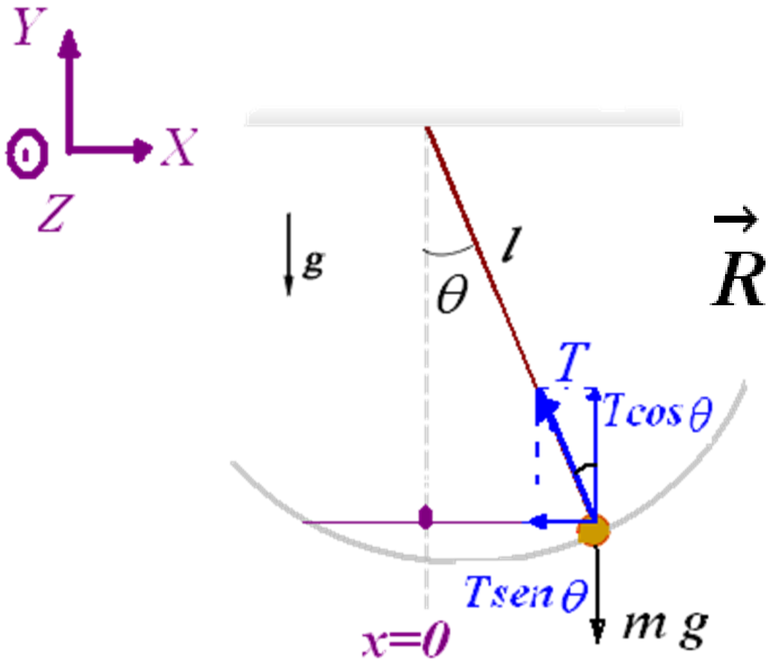








Oscilaciones péndulo ideal



Segunda ley de Newton

$$\vec{R} = m\,\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} m\,\ddot{x} = -T\,\mathrm{sen}\theta \\ m\,\ddot{y} = T\cos\theta - m\,g \end{cases}$$

Ángulo pequeño $\theta <<$

$$\left.\begin{aligned} m\,\ddot{x} &\simeq -T\,\theta \\ m\,\ddot{y} &\simeq T - m\,g \end{aligned}\right\} \Leftarrow \begin{aligned} \mathrm{sen}\theta &\simeq \theta \\ \cos\theta &\simeq 1 \end{aligned}$$

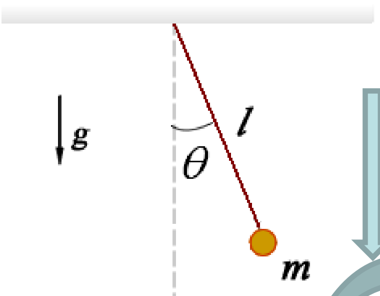
Geometría

$$\left.\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{x}{l} \Longrightarrow x = l\sin\theta \simeq l\;\theta \Longrightarrow \ddot{x} \simeq l\;\ddot{\theta} \\ \cos\theta &= \frac{y}{l} \Longrightarrow y = l\cos\theta \simeq l = \mathrm{cte} \Longrightarrow \ddot{y} \simeq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$m\,\ddot{x} \simeq -m\,g\,\frac{x}{l}$$

$$T \simeq m\,g$$

Oscilaciones péndulo ideal



$$\ddot{x} \simeq l\,\ddot{\theta}$$

$$\ddot{y} \simeq 0$$

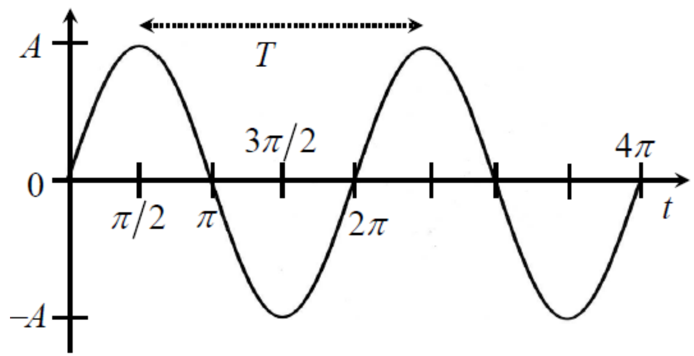
$$m\,\ddot{x} \simeq -m\,g\,\frac{x}{l} \Rightarrow \ddot{x} + \boxed{\frac{g}{l}}\,x = 0$$

$$\ddot{\theta} + \boxed{\frac{g}{l}}\,\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}(t) + \boxed{\omega_0^2}\,x(t) = 0}$$

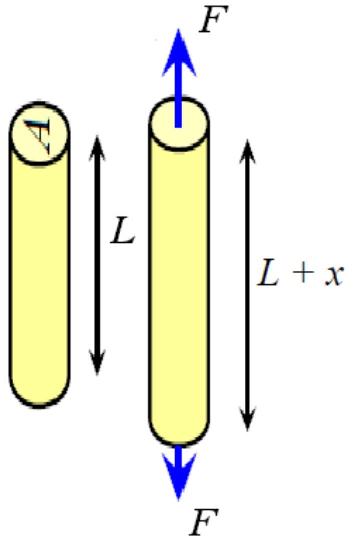
$$w_0^2 = \frac{g}{l} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \Longrightarrow T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\boxed{x(t) = A(x_0, v_0)\,Cos(\omega_0 t + \delta(x_0, v_0))}$$

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}} \qquad \boxed{\delta = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_0 w_0}\right)}$$



Oscilaciones elásticas



$$\frac{F/A}{x/L} = -Y$$

$$F = -\frac{A\,Y}{L}\,x$$

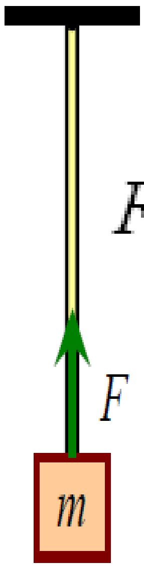
Elasticidad

$$\frac{\text{Tensión}}{\text{Deformación}} = \text{cte}$$

$$(\text{Deformaciónn} < 0.1\,\%\,L)$$

Oscilaciones elásticas

Se cuelga un cuerpo de masa m del extremo de un alambre, el alambre se alarga, y luego se somete a vibraciones.



Dinámica:

$$F - m\,g = m\,a$$

$$\ddot{x} + \frac{A\,Y}{L\,m}\,x + g = 0$$

$$x = y - x_e = y - g\,\frac{L\,m}{A\,Y}$$

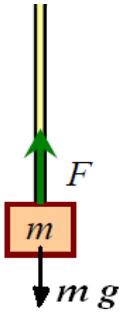
$$\boxed{\ddot{y} + \frac{A\,Y}{L\,m}\,y = 0}$$

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{g}{x_e}\,y = 0}$$

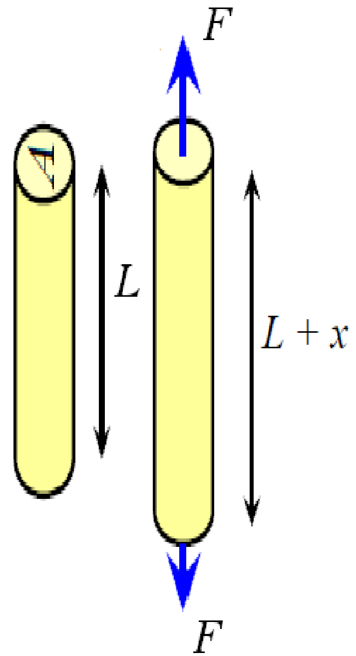
Equilibrio:

$$F = m\,g = \frac{A\,Y}{L}\,x_e$$

$$\boxed{\frac{m\,L}{A\,Y} = \frac{x_e}{g}}$$



Oscilaciones elásticas



$$\frac{F/A}{x/L} = -Y$$

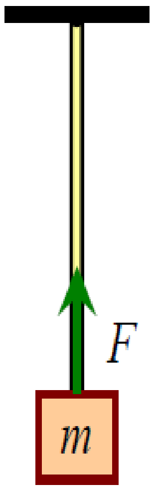
$$\frac{m\,L}{A\,Y} = \frac{x_e}{g}$$

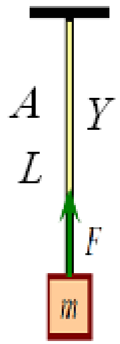
$$\ddot{y} + \frac{g}{x_e}\,y = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{A\,Y}{L\,m}\,y = 0$$

$$k_e = \frac{A\,Y}{L}$$



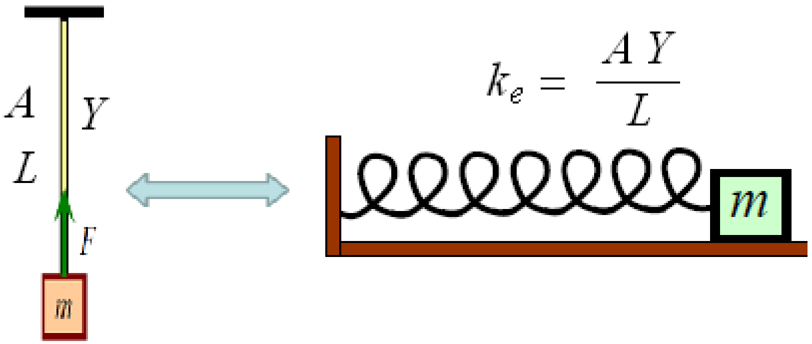


$$k_e = \frac{A\,Y}{L}$$

$$w_0^{\,2} = \frac{g}{x_e} = \frac{A\,Y}{L\,m} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{A\,Y}{L\,m}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,L}{A\,Y}}$$

PTV-2.1

PTV-2.1- Se cuelga una masa de 3 kg de un alambre de cobre y se deja oscilar libremente en la dirección vertical. ¿Cuál es la frecuencia (Hz) aproximada de oscilación? (La longitud del alambre es L= 36 cm y su superficie es A = 2.0 x 10^{-7} m^2)



$$k_e = \frac{A\,Y}{L}$$

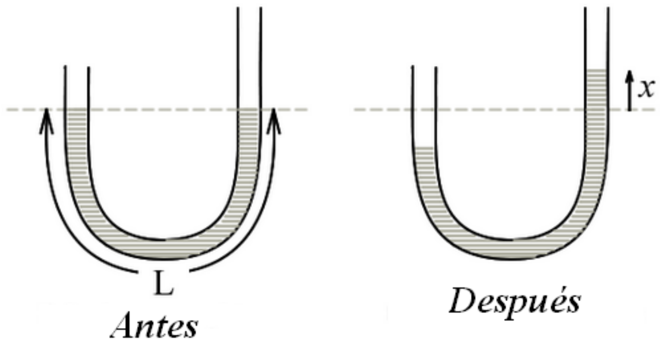
$$\ddot{y} + \frac{A\,Y}{L\,m}\, y = 0$$

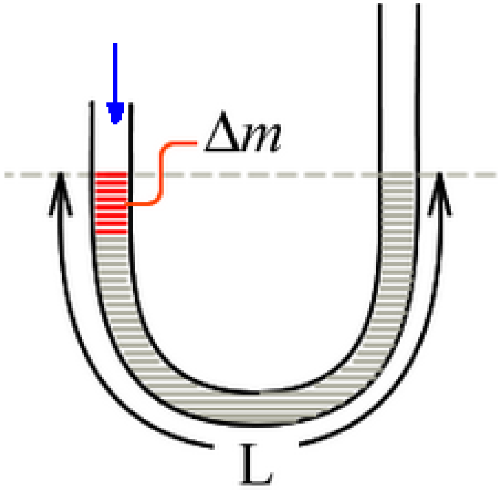
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m\,L}{A\,Y}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\ \text{kg} \times 36 \times 10^{-2}\ m}{2.0 \times 10^{-7}\ m^2 \times \mathbf{11} \times \mathbf{10^{10}}\ \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{m^2}}}} = 0.044\ s$$

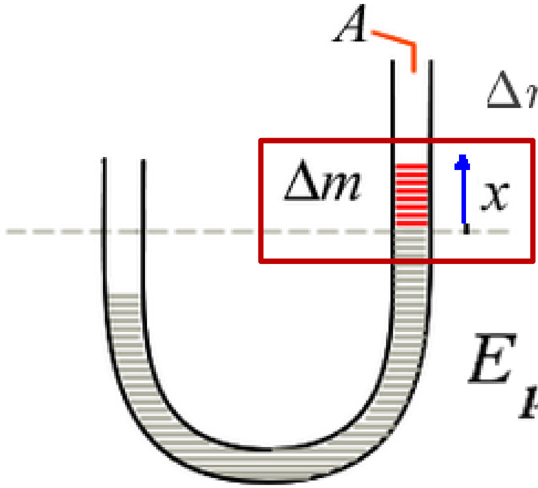
$$\nu = \frac{1}{0.044} = 22.72\ \text{Hz}$$

Oscilaciones en fluidos. PTV-2.2

PTV-2.2- Un tubo en U abierto por ambos extremos, en contacto con la atmósfera, está lleno de un fluido incompresible de densidad ρ. El área de la sección transversal A del tubo es uniforme y de valor A. La longitud total de la columna de líquido es L. Se utiliza un pistón para presionar la altura de la columna del fluido, en una longitud x_0, en uno de los lados del tubo, y a continuación, se elimina rápidamente el pistón. ¿Cuál es la frecuencia del movimiento resultante? Suponer flujo laminar y que no hay rozamiento en las paredes del tubo U.







$$E_p = 0$$

$$\Delta m = \rho A x$$

$$E_m = cte$$

$$v_x = dx/dt$$

$$E_p = \Delta m g x = (\rho A x) g x = \rho A g x^2$$

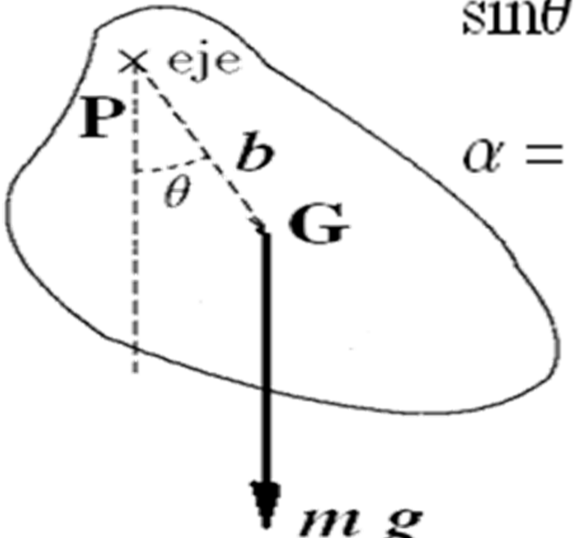
$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}\rho A L v^2 + \rho A g x^2$$

$$0 = \frac{dE_m}{dt} = \rho A L v \frac{dv}{dt} + 2\rho A g x \frac{dx}{dt}$$

$$0 = v_x \rho A \left(L \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 g x \right) \Rightarrow \begin{cases} 0 = L \dfrac{d^2 x}{dt^2} + 2 g x \\ \boxed{\ddot{x} + \dfrac{2g}{L} x = 0} \end{cases}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

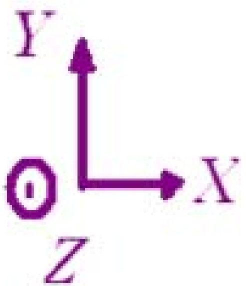
Péndulo físico



$$\sin\theta \simeq \theta \qquad \alpha = \ddot{\theta}$$

$$\vec{M}_P^{\vec{p}} = \vec{PG} \wedge \vec{p} = -\sin\theta\, b\, m\, g\, \vec{k}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\sin\theta\, b\, m\, g = I_{P,z}\,\alpha \\ -\theta\, b\, m\, g = I_{P,z}\,\ddot{\theta} \end{array}\right\} \Rightarrow$$



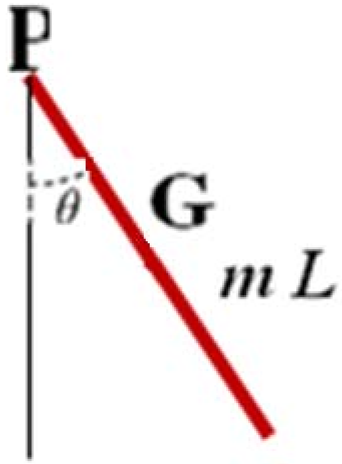
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{b\, m\, g}{I_{P,z}}\,\theta = 0} \Leftrightarrow \text{M.A.S} \quad \boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0}$$

$$\Rightarrow \quad w_0^{\,2} = \frac{b\, m\, g}{I_{P,z}} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{b\, m\, g}{I_{P,z}}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{P,z}}{b\, m\, g}}$$

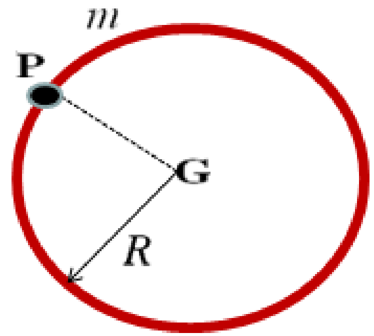
PTV-2.3

PTV-2.3-Calcular el tipo de oscilación y el período de oscilación, en su caso, de los siguientes péndulos físicos: a) Una regla de masa m y longitud L, respecto de un extremo. b) Un anilló homogéneo, de radio R y masa m, suspendido de un punto de su periferia. c) Un disco homogéneo de masa m y radio R, suspendido en un punto de su periferia.

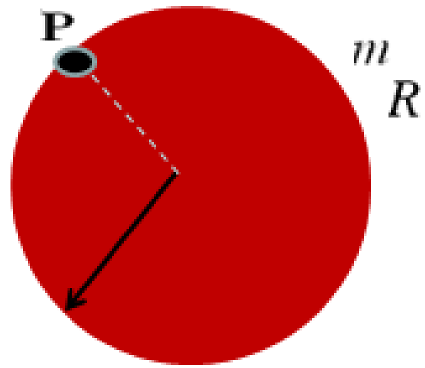
Regla



Anillo

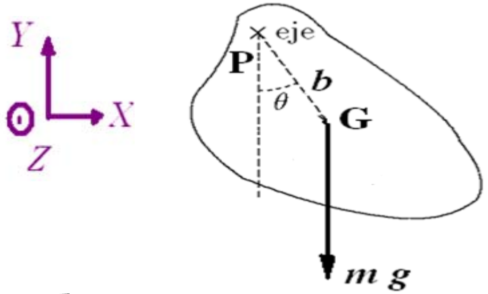


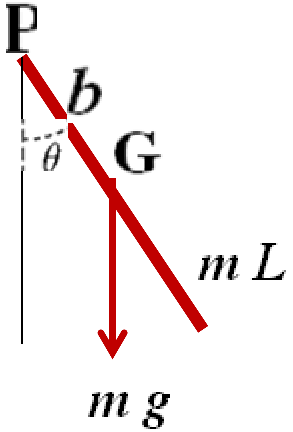
Disco



Regla

$$\ddot{\theta} + \frac{b\,m\,g}{I_{P,z}}\,\theta = 0$$

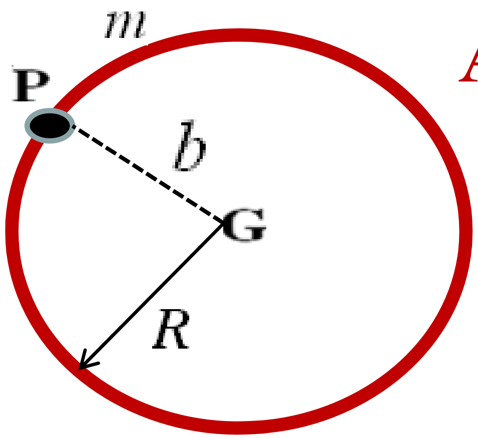




$$I_{P,z} = I_{G,z} + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\,m\,L^2 + m\,\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3}\,m\,L^2$$

$$b = \frac{L}{2}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{3\,g}{2\,L}\,\theta = 0} \Rightarrow w_0^{\,2} = \frac{3\,g}{2\,L} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{3\,g}{2\,L}} \Longrightarrow T = 2\,\pi\sqrt{\frac{2\,L}{3\,g}}$$



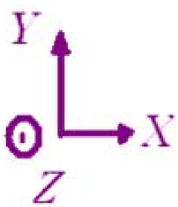
Anillo

$$b = R$$

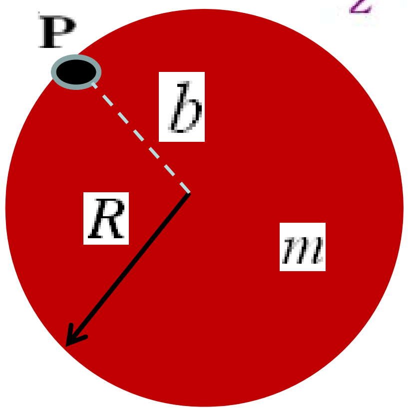
$$I_{P,z} = I_{G,z} + m\,R^2 = m\,R^2 + m\,R^2 = 2\,m\,R^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{b\,m\,g}{I_{P,z}}\,\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{2\,R}\,\theta = 0$$

$$w_0^{\,2} = \frac{g}{2\,R} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{g}{2\,R}} \Longrightarrow T = 2\,\pi\sqrt{\frac{2\,R}{g}}$$



Disco



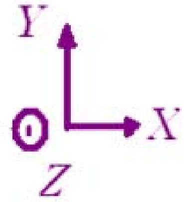
$$\ddot{\theta} + \frac{b\,m\,g}{I_{P,z}}\,\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2\,g}{3\,R}\,\theta = 0$$

$$b = R$$

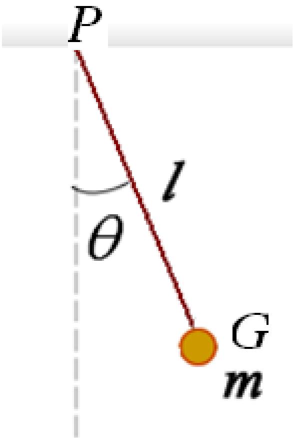
$$I_{P,z} = I_{G,z} + m\,R^2 = \frac{1}{2}\,m\,R^2 + m\,R^2 = \frac{3}{2}\,m\,R^2$$

$$w_0^{\,2} = \frac{2\,g}{3\,R} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{2\,g}{3\,R}} \Longrightarrow T = 2\,\pi\sqrt{\frac{3\,R}{2\,g}}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{b\,m\,g}{I_{P,z}}\,\theta = 0 \quad\Rightarrow\quad w_0^{\,2} = \frac{b\,m\,g}{I_{P,z}} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{b\,m\,g}{I_{P,z}}} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{P,z}}{b\,m\,g}}$$



Péndulo

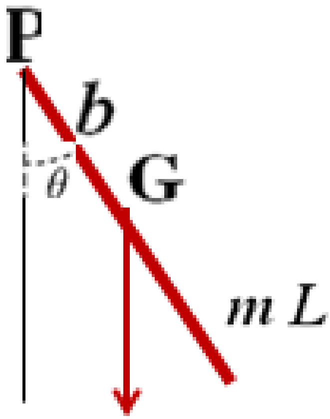


$b = l$

$I_{P,z} = m\,l^2$

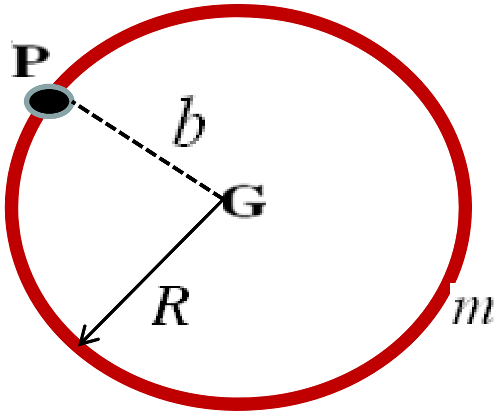
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Regla



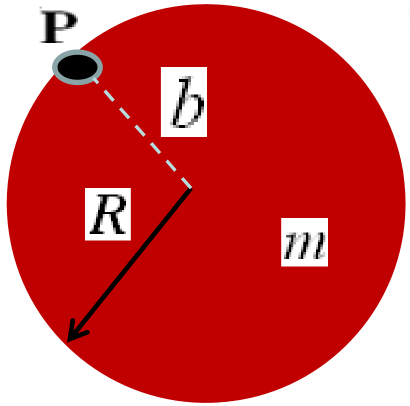
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\,L}{3\,g}}$$

Anillo



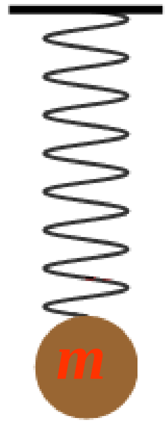
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\,R}{g}}$$

Disco

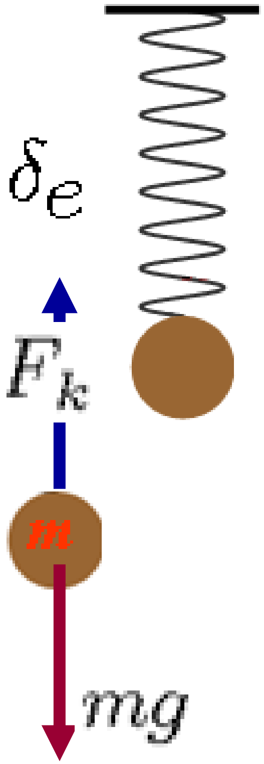


$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\,R}{2\,g}}$$

PTV-2.4 a) Obtener la ecuación de movimiento para la masa m. ¿Oscila? b) En su caso obtener frecuencia y período. c) Determinar la posición de la masa m en todo instante de tiempo.



Equilibrio · *Dinámica*



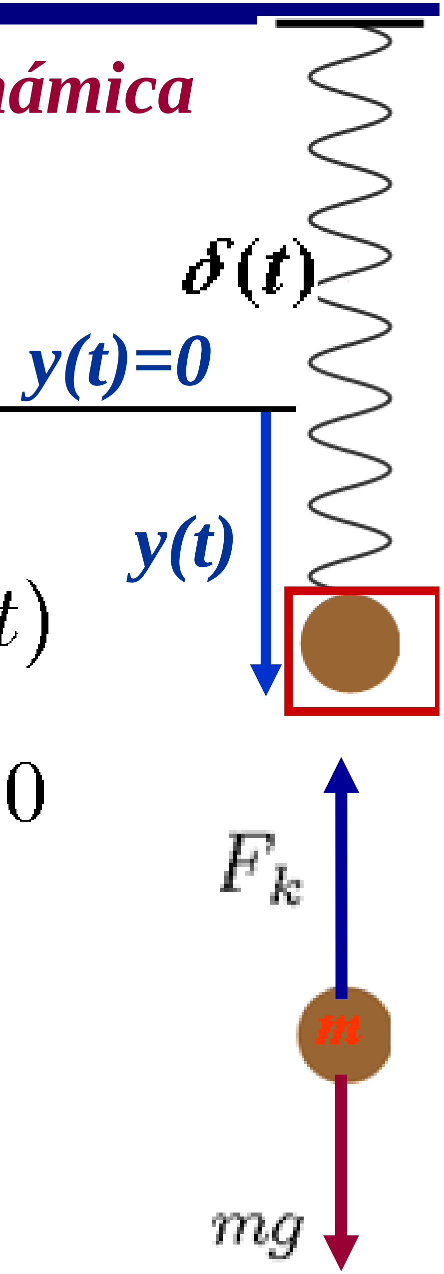
$$\delta(t) = \delta_e + y(t)$$

$$F_k - m\,g = (-)m\ddot{y}(t)$$

$$F_k = k\,\delta(t)$$

$$k\,(\delta_e + y(t)) - m\,g = (-)m\ddot{y}(t)$$

$$m\ddot{y}(t) + \boxed{\cancel{k\,\delta_e - m\,g}} + k\;y(t) = 0$$



$$F_k - mg = 0$$

$$F_k = k\,\delta e$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\,y = 0$$

$$\boxed{k\,\delta e - mg = 0}$$ **L.E**

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0$$

m.a.s

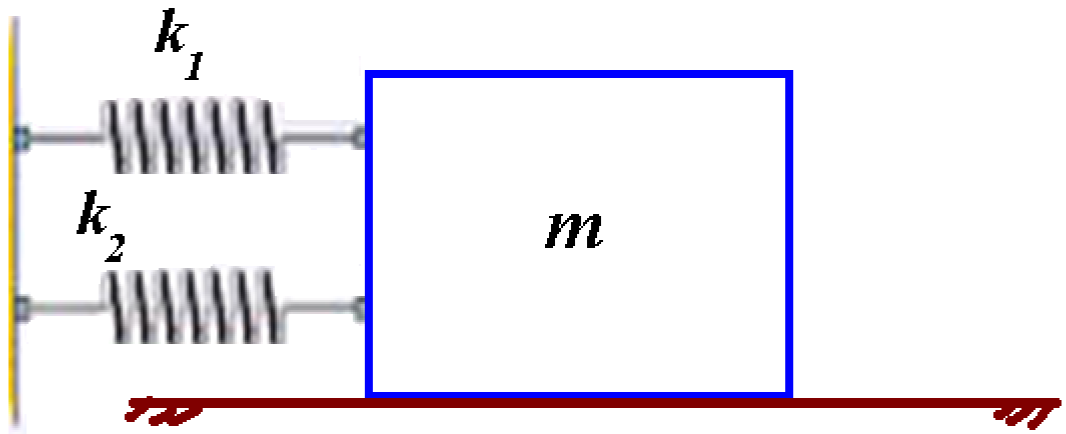
$$w_0^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow T = \frac{2\pi}{w_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$y(t) = A\cos(w_0 t + \delta)$$

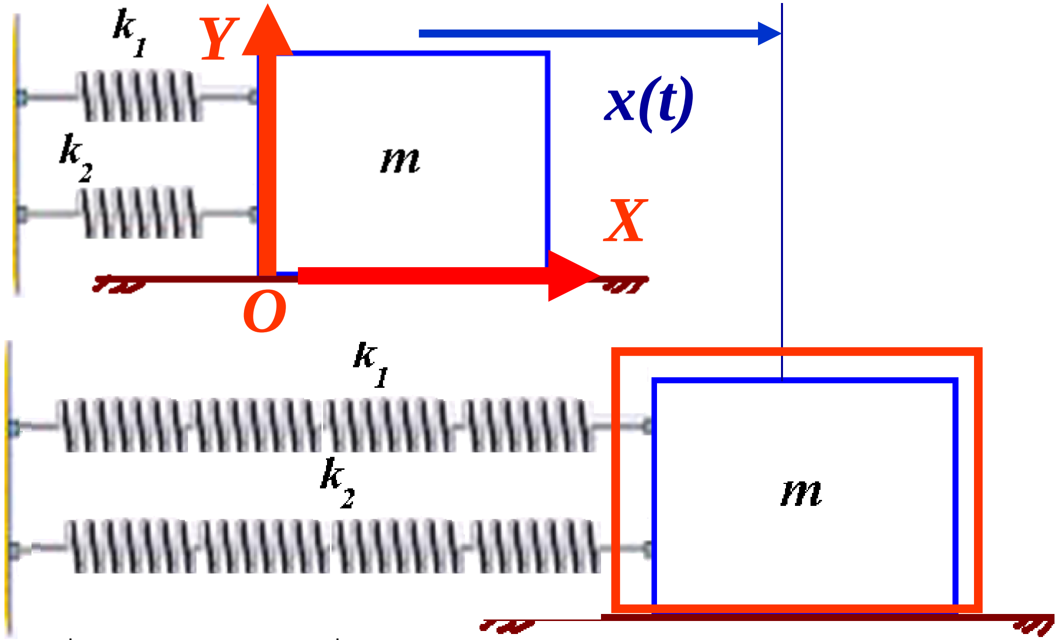
$$A = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}$$

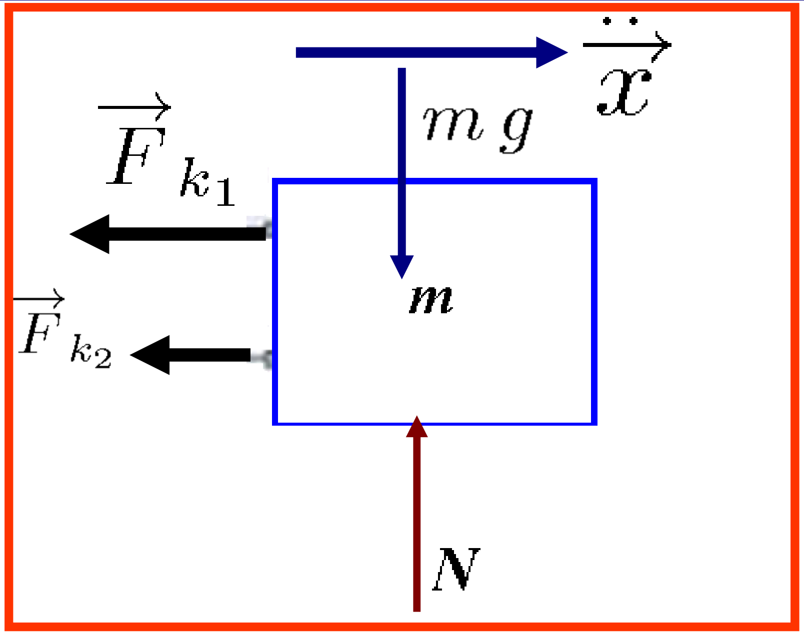
$$\delta = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_0 w_0}\right)$$

PTV-2.5 (Resortes en paralelo) **Una partícula de masa *m* se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura. Obtener la constante *k* del resorte equivalente del sistema de resortes, sin que cambie la frecuencia de vibración de la oscilación resultante.**



$$k_e = \sum_{i=1}^{N} k_i$$





$$\overrightarrow{F}_{k_1} + \overrightarrow{F}_{k_2} = m\,\overrightarrow{\ddot{x}}$$

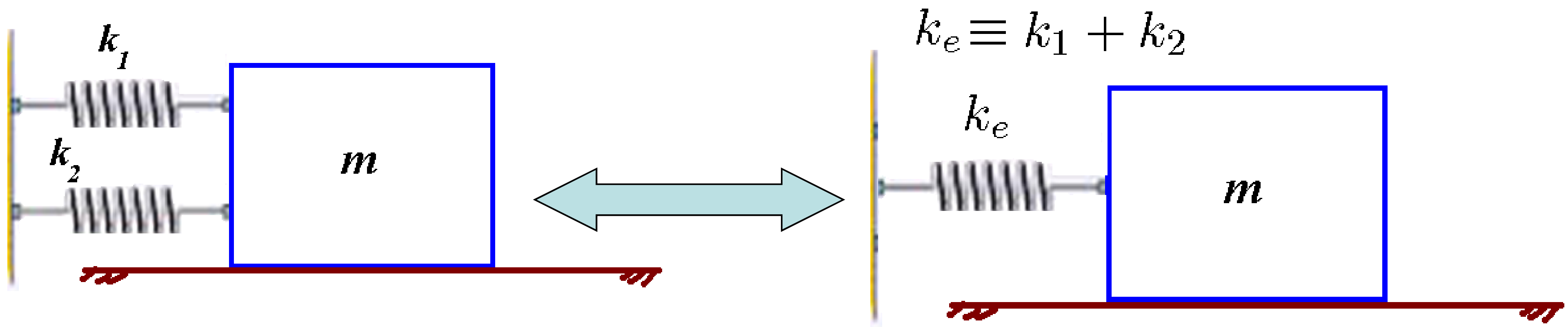
$$-k_1 x(t) - k_2 x(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{(k_1 + k_2)}{m} x(t) = 0$$

$$k_e \equiv k_1 + k_2$$

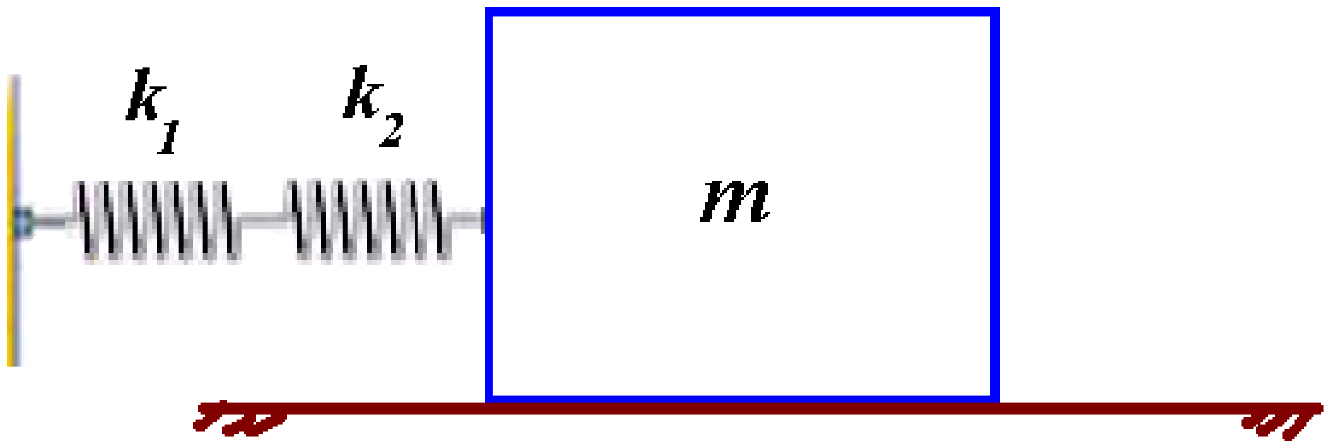
$$\ddot{x}(t) + \frac{k_e}{m} x(t) = 0$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

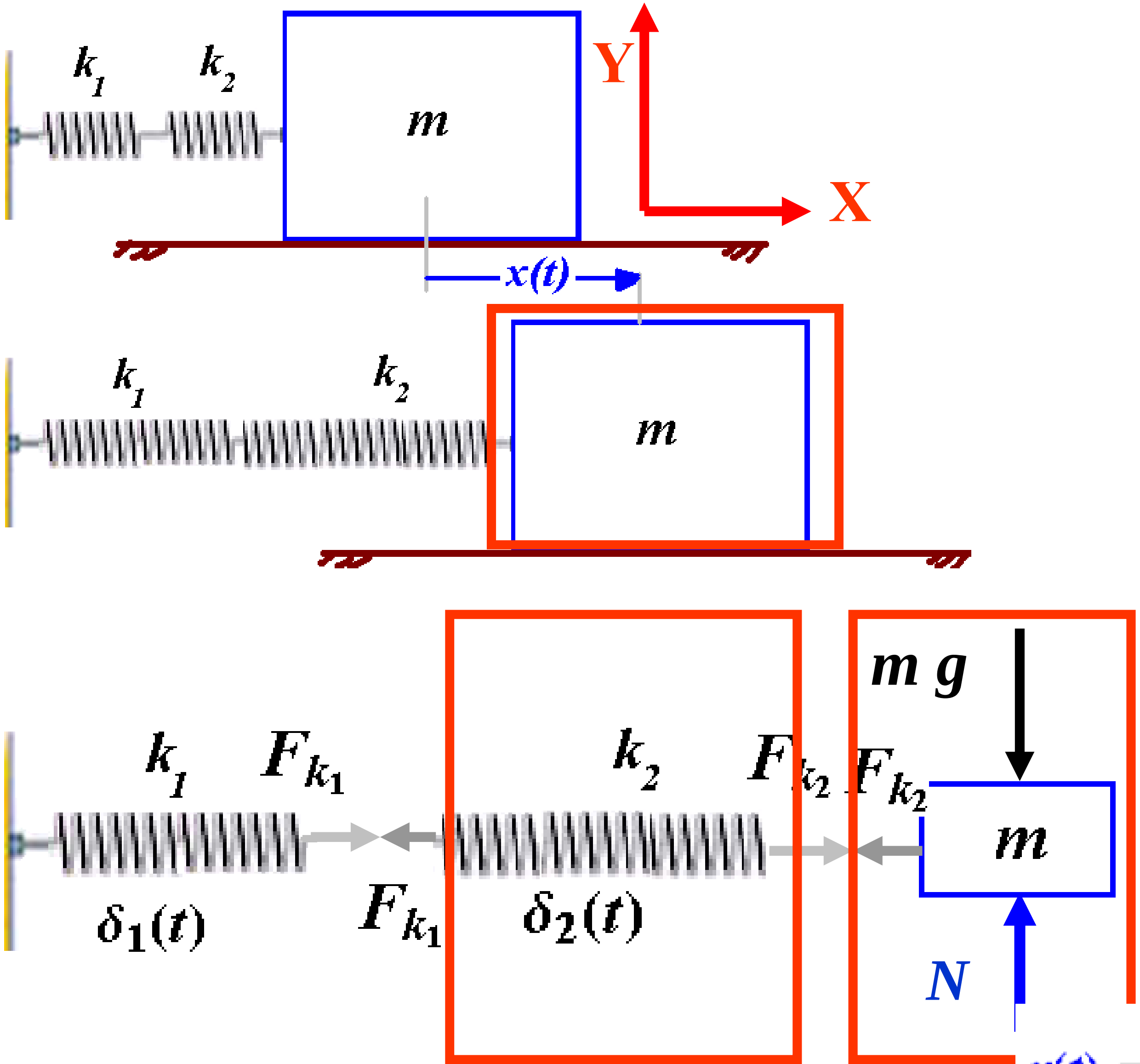


$$k_e = \sum_{i=1}^{N} k_i$$

PTV-2.6. (Resortes en serie) **Una partícula de masa *m* se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura. Obtener la constante *k* del resorte equivalente del sistema de resortes, sin que cambie la frecuencia de vibración de la oscilación resultante.**



$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k_i}$$



$$x(t) = \delta_1(t) + \delta_2(t)$$

$$N - m\,g = 0$$

$$-F_{k_2} = m\,\ddot{x}(t)$$

$$F_{k_2} - F_{k_1} = 0$$

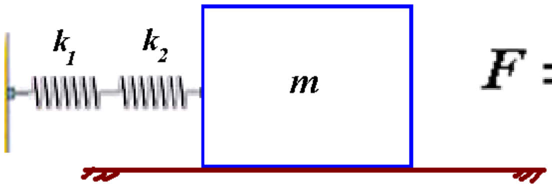
$$F_{k_2} = F_{k_1} = F$$

$$F_{k_1} = k_1\,\delta_1$$

$$F_{k_2} = k_2\,\delta_2$$

$$x(t) = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

$$x(t) = F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) = F\left(\frac{k_2 + k_1}{k_1\,k_2}\right)$$

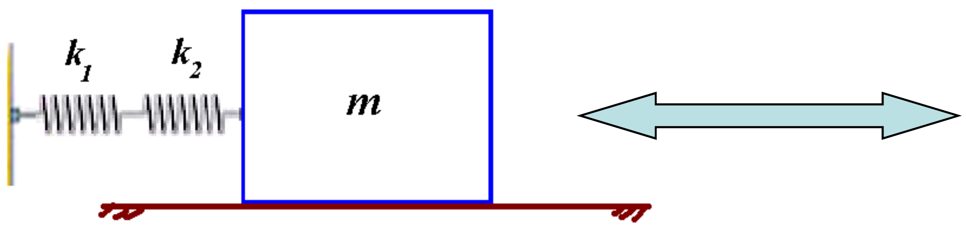


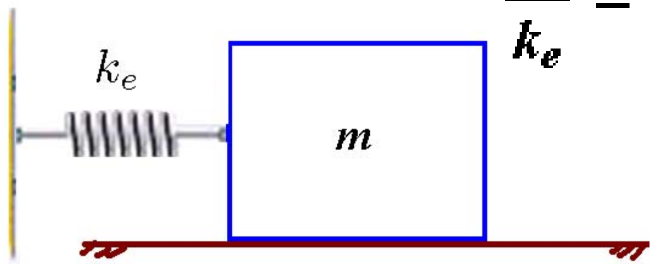
$$F = x(t)\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)^{-1} = x(t)\left(\frac{k_2 + k_1}{k_1\, k_2}\right)^{-1} = x(t)\left(\frac{k_1\, k_2}{k_2 + k_1}\right)$$

$$-F = m\,\ddot{x}(t)$$

$$m\,\ddot{x}(t) + \left(\frac{k_2 + k_1}{k_1\, k_2}\right)^{-1} x(t) = 0$$

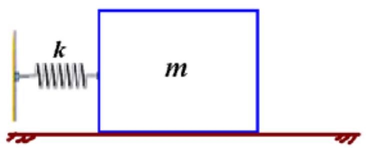
$$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

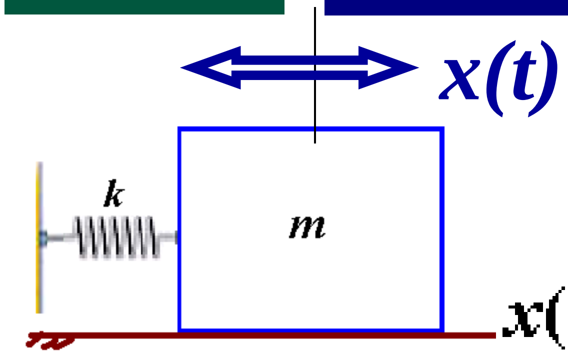




$$\frac{1}{k_e} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{k_i}$$

PTV-2.7. **Un bloque de masa *m = 0,5 kg* es libre de oscilar, unido a un extremo de un resorte horizontal. En el instante *t = 0*, el bloque es lanzado desde su posición de reposo en *x = 0*, por un golpe de martillo, que le imprime una velocidad instantánea v_0 = *40* cm/s. El bloque a continuación, ejecuta un movimiento armónico simple con un recorrido máximo de 10 cm alrededor de su posición de equilibrio. Despreciar rozamientos masa apoyo horizontal. a) Encontrar la frecuencia angular de oscilación, el período y la constante del muelle. b) Velocidad en *$t = \pi/4$ s*. c) Obtener la energía cinética, potencial y energia mecánica del bloque. d) Representar graficamente las energías. e) Considerar un sistema bloque-muelle idéntico, que se hace oscilar con condiciones iniciales diferentes, x_o = *10 cm* y v_o= *0*. Obtener la posición de la masa en todo instante de tiempo. f) Diferencia de fase entre las dos masas. g) Diferencia de energía mecánica entre ámbas masas.**





Ecuación diferencial del movimiento

$$\ddot{x}(t) + w_0^2\, x(t) = 0$$

$$x(t) = A\cos(w_0\, t + \delta)$$

$$A(x_0,\, v_0) = \frac{\sqrt{x_0^2\, w_0^2 + v_0^2}}{w_0}$$

$$\delta(x_0,\, v_0) = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_0\, w_0}\right)$$

$$\text{Solve}\left[\left\{wo == \sqrt{\frac{k}{m}},\ A == \frac{\sqrt{xo^2\, wo^2 + vo^2}}{wo},\ T == \frac{2\pi}{wo},\ v == \frac{1}{T}\right\},\ \{wo,\, k,\, T,\, v\}\right] /.$$

$$\{m \to 0.5,\ xo \to 0,\ vo \to 40/100,\ A \to 10/100\}$$

$$\left\{\left\{k \to 8.,\ v \to -\frac{2}{\pi},\ T \to -\frac{\pi}{2},\ wo \to -4\right\},\ \left\{k \to 8.,\ v \to \frac{2}{\pi},\ T \to \frac{\pi}{2},\ wo \to 4\right\}\right\}$$

b) Velocidad en t = $\pi/4$ s

$$v(t) = \frac{d\, x(t)}{d\, t} = -A\, w_0 \sin(w_0\, t + \delta)$$

```
xm[t_, wo_, A_, δ_] := A Cos[wo t + δ]
```

```
vm[t_, wo_, A_, δ_] := D[xm[t, wo, A, δ], t]
```

```
xm[t, 4, 10/100, Pi/2]
```

$$-\frac{1}{10}\ \mathrm{Sin}[4\,t]$$

```
{xm[π/4, 4, 10/100, Pi/2], vm[t, 4, 10/100, Pi/2] /. {t -> π/4}}
```

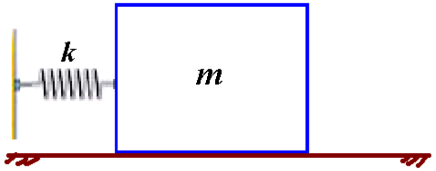
$$\left\{0,\ \frac{2}{5}\right\}$$

```
vm[t, 4, 10/100, Pi/2]
```

$$-\frac{2}{5}\ \mathrm{Cos}[4\,t]$$

c) Obtener la energía cinética, potencial y energia mecánica del bloque

$$Ec = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{k}{w^2{}_0}\, v^2 = \frac{1}{2}\,\frac{k}{\cancel{w^2{}_0}}\, A^2\, \cancel{w^2{}_0}\ \mathrm{sen}^2(w_0\, t + \delta)$$



$$Ep = \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k\, A^2 \cos^2(w_0\, t + \delta)$$

$$Em = Ec + Ep = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2 = \frac{1}{2}\, k\, A^2 = \mathrm{cte}$$

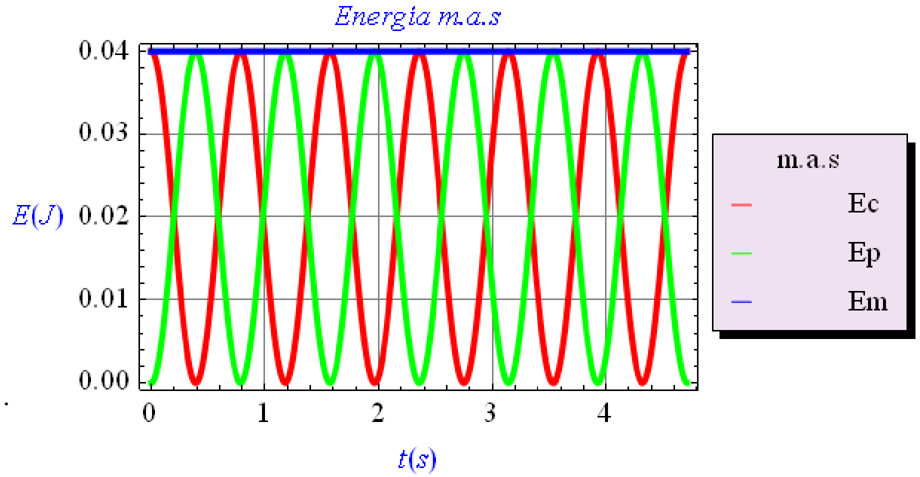
```
Ec[t_, wo_, A_, δ_, k_] := 1/2 k/wo^2 vm[t, wo, A, δ]^2;
Ep[t_, wo_, A_, δ_, k_] := 1/2 k xm[t, wo, A, δ]^2;
Em[t_, wo_, A_, δ_, k_] := Ec[t, wo, A, δ, k] + Ep[t, wo, A, δ, k]
```

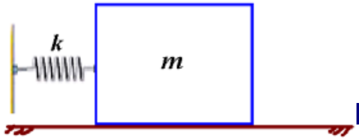
Ec[t, 4, 10/100, Pi/2, 8]	Ep[t, 4, 10/100, Pi/2, 8]	Em[t, 4, 10/100, Pi/2, 8]
$\frac{1}{25}\text{Cos}[4\,t]^2$	$\frac{1}{25}\text{Sin}[4\,t]^2$	$\frac{1}{25}$

$$E_m = \frac{1}{25}\,J$$

d) Representar graficamente las energías

```
Plot[{Ec[t, 4, 10/100, π/2, 8] /. t → tt, Ep[t, 4, 10/100, π/2, 8] /. t → tt,
  Em[t, 4, 10/100, π/2, 8] /. t → tt},
 {tt, 0, 3 2Pi/4}, Frame → True, GridLines → Automatic,
 FrameLabel → {"t(s)", "E(J)"}, RotateLabel → False, Filling → relleno,
 PlotStyle → {
   {RGBColor[1, 0, 0], Thickness[0.011], Dashing[None]},
   {RGBColor[0, 1, 0], Thickness[0.011], Dashing[None]},
   {RGBColor[0, 0, 1], Thickness[0.011], Dashing[None]}
  }, PlotLegend → {"Ec", "Ep", "Em"}, LegendPosition → {1.1, -0.4},
 LegendTextSpace → 0.5, LegendLabel → Style["m.a.s", 10],
 LegendLabelSpac → 0.5, LegendOrientation → Vertical, LegendSize → {0.5, 0.
 LegendBackground → LightPurple, LegendShadow → {.02, -.02}
 , PlotLabel -> "Energia m.a.s"]
```





PTV-2.7

f) Considerar un sistema bloque-muelle idéntico, que se hace oscilar con condiciones iniciales diferentes, xo = 10 cm y vo=0. Obtener la posición de la masa en todo instante de tiempo

$$x(t) = A\cos(w_0\, t + \delta)$$

$$A(x_0, v_0) = \frac{\sqrt{x_0^2\, w_0^2 + v_0^2}}{w_0}$$

$$\delta(x_0, v_0) = \tan^{-1}\left(-\frac{v_0}{x_0\, w_0}\right)$$

```
x[t_, wo_, xo_, vo_] := Sqrt[xo^2 wo^2 + vo^2]/wo Cos[wo*t + ArcTan[-vo/(xo wo)]]
v[t_, wo_, xo_, vo_] := D[x[t, wo, xo, vo], t]
x[t, 4, 10 / 100, 0]
```

$\frac{1}{10}$ Cos[4 t]

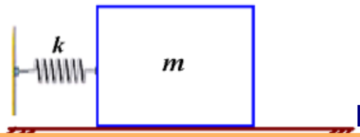
g) Diferencia de fase entre las dos masas

$$x_2(t) = \frac{1}{10}\cos(4\, t)$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{10}\sin(4\, t) = \frac{1}{10}\cos\left(4\, t + \frac{\pi}{2}\right)$$

La diferencia de fase entre ámbós oscialdores es $\frac{\pi}{2}$

h) Diferencia de energía mecánica entre ámbas masas.




```
Ec2[t_, wo_, xo_, vo_, k_] := 1/2 k/wo^2 v[t, wo, xo, vo]^2;
Ep2[t_, wo_, xo_, vo_, k_] := 1/2 k * x[t, wo, xo, vo]^2;
Em2[t_, wo_, xo_, vo_, k_] := Ec2[t, wo, xo, vo, k] + Ep2[t, wo, xo, vo, k]
```

```
Em2[t, 4, 10/100, 0, 8]
```

$$\frac{1}{25}\,\mathrm{Cos}[4\,t]^2 + \frac{1}{25}\,\mathrm{Sin}[4\,t]^2$$

$$Em_2 = Ec_2 + Ep_2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2 = \frac{1}{2}\,k\,A^2 = \frac{1}{25}\,J$$

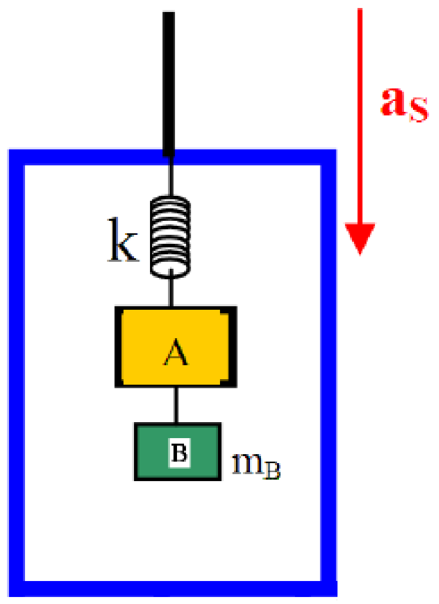
$$Em_1 = Em_2 = cte = \frac{1}{25}\,J$$

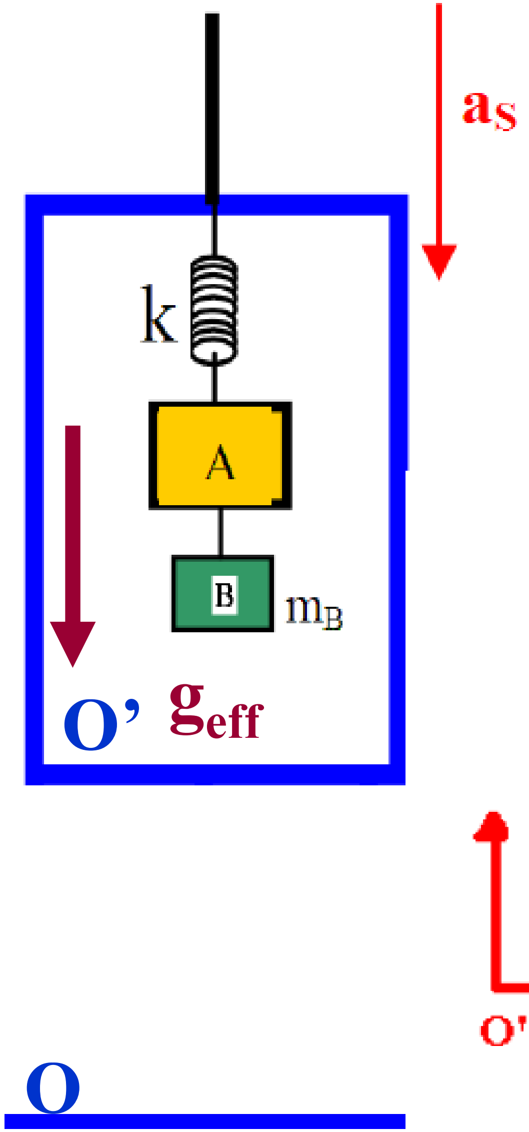
¿Por qué?

$$\frac{\partial}{\partial t}Em = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\,m\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2\right) = \dot{x}\left(m\,\ddot{x} + k\,x\right) = 0$$

$$m\,\ddot{x} + k\,x = 0 \qquad \Longrightarrow Em = cte$$

PTV-2.8 El período de oscilación del sistema mostrado en la figura es de T s, siendo la masa de B, m_B. Si después de quitar el bloque B el período es T^* s, con $T > T^*$ y la aceleración constante del ascensor es $a_s = g/3$. Calcular: a) La masa del bloque A. b) La constante elástica k del muelle. c) La longitud de deformación del muelle en equilibrio en la situación inicial.

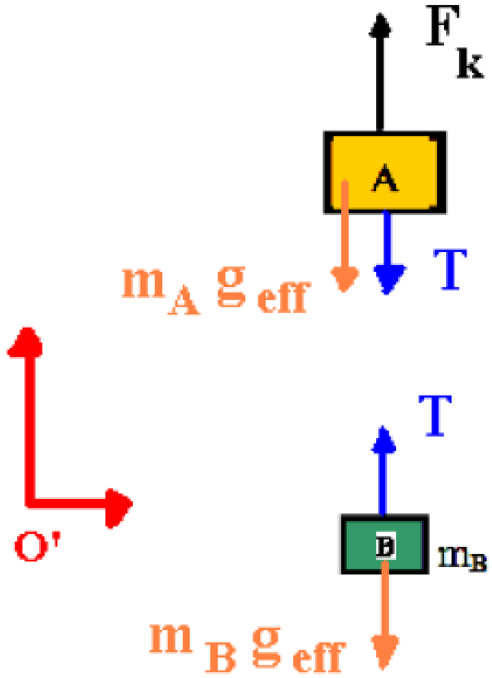




$$g_{eff} = g - a_s$$

Ppo Equivalencia

$$g_{eff} = g - a_s = g - \frac{g}{3} = \frac{2}{3} g \downarrow$$



$$\left.\begin{array}{c} F_k - T - m_A\, g_{eff} = 0 \\ T - m_B\, g_{eff} = 0 \\ F_k = k\, \delta e \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\delta e = \frac{2}{3} g \frac{(m_A + m_B)}{k}}$$

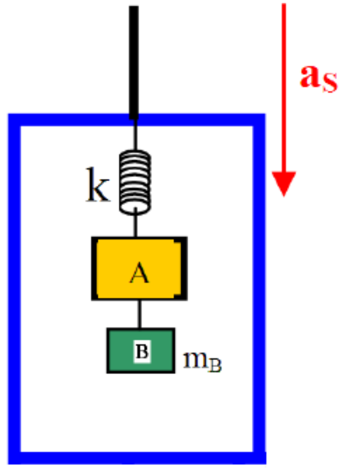
El período T del sistema (m.a.s) vale: $T^2 = 4\,\pi^2 \dfrac{(m_A + m_B)}{k}$

El período T^* del sistema (m.a.s), cuando se quita la masa B vale:

$$T^{*2} = 4\,\pi^2 \frac{m_A}{k}$$

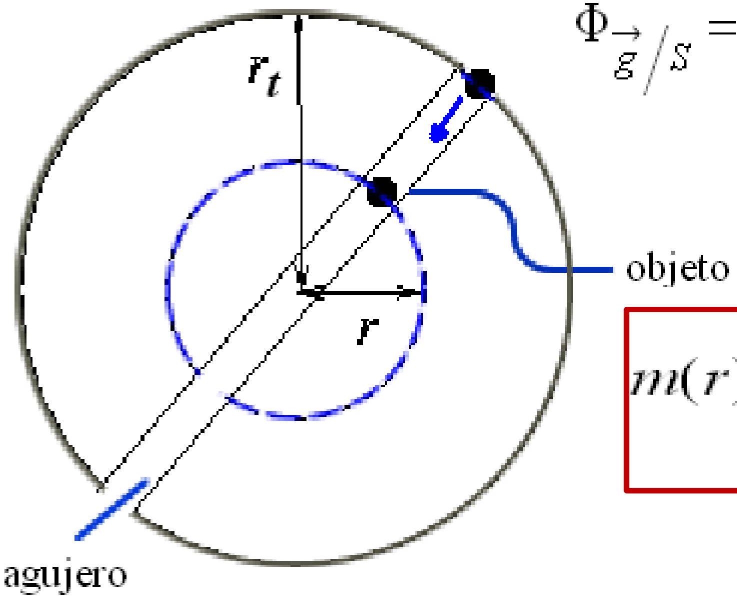
Sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, m_A y k

$$\left.\begin{aligned} T^2 &= 4\,\pi^2 \frac{(m_A + m_B)}{k} \\ T^{*2} &= 4\,\pi^2 \frac{m_A}{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad m_A = \left(\frac{T^{*2}}{T^2 - T^{*2}}\right) m_B \qquad k = 4\,\pi^2 \frac{m_B}{(T^2 - T^{*2})}$$



$$\delta e = \frac{2}{3}\, g \frac{(m_A + m_B)}{k}$$

PTV-2.9, Se perfora un agujero con lados lisos y rectos a través del centro de la tierra, uniendo un extremo de la superficie de la tierra con su opuesto. Se extrae del tubo formado, toda la materia, de manera que quede vacío. Un objeto de masa m se deja caer por un extremo del tubo y alcanza el extremo opuesto. Se puede suponer que la tierra es de densidad de masa uniforme. despreciar la cantidad de masa perforada y la rotación de la tierra. Determinar: a) La dinámica de la partícula de masa m, cuando se encuentra a una distancia r, medida desde el centro de la tierra. b) Tiempo que tarda la masa m en alcanzar el punto opuesto de la superficie. c) La posición de la masa m, en cualquier instante, antes de que el objeto pase por el centro de la tierra.



$$\Phi_{\vec{g}/S} = \oint \vec{g} \bullet d\vec{S} = -g \oint dS = -g\,4\pi r^2 = -4\pi G\, m(r)$$

$$g(r) = G\,\frac{m(r)}{r^2}$$

$$\boxed{m(r) = \left(\frac{r}{r_t}\right)^3 m_t} \Leftarrow \rho = \frac{m_t}{\frac{4}{3}\pi r_t^3} = \frac{m(r)}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \text{cte}$$

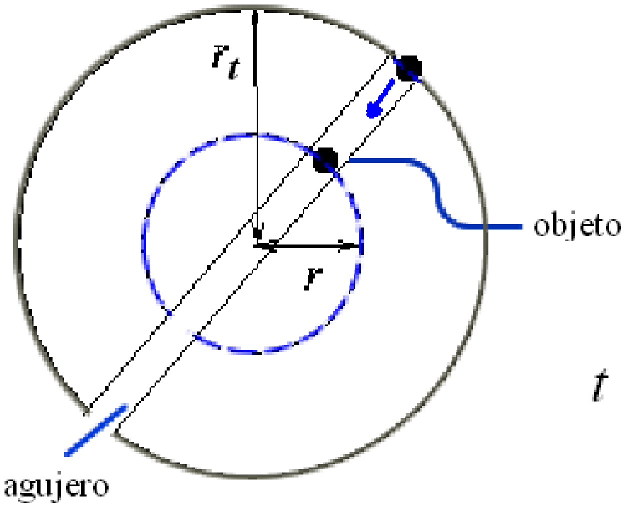
$$G = \frac{r_t^2}{m_t}\,g$$

$$g(r) = G\,\frac{m(r)}{r^2} = \frac{1}{r^2}\,\frac{r_t^2}{m_t}\,g\left(\frac{r}{r_t}\right)^3 m_t = g\left(\frac{r}{r_t}\right)$$

$$-m\,g(r) = m\,\ddot{r} \Rightarrow -g\left(\frac{r}{r_t}\right) = \ddot{r} \Rightarrow \ddot{r} + \boxed{\frac{g}{r_t}}\,r = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \Rightarrow \textbf{M.A.S} \quad w_0^2 = \frac{g}{r_t} \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{g}{r_t}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r_t}{g}}$$

b) Tiempo que tarda la masa m en alcanzar el punto opuesto de la tierra. la superficie.



$$w_0^2 = \frac{g}{r_t} \Rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{g}{r_t}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r_t}{g}}$$

$$t = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{r_t}{g}} = \pi\sqrt{\frac{6371\times 10^3}{9.81}} = 2531.7\ s \quad = 0.7\ h$$

c) La posición de la masa m, en cualquier instante, antes de que el objeto pase por el centro de la tierra.

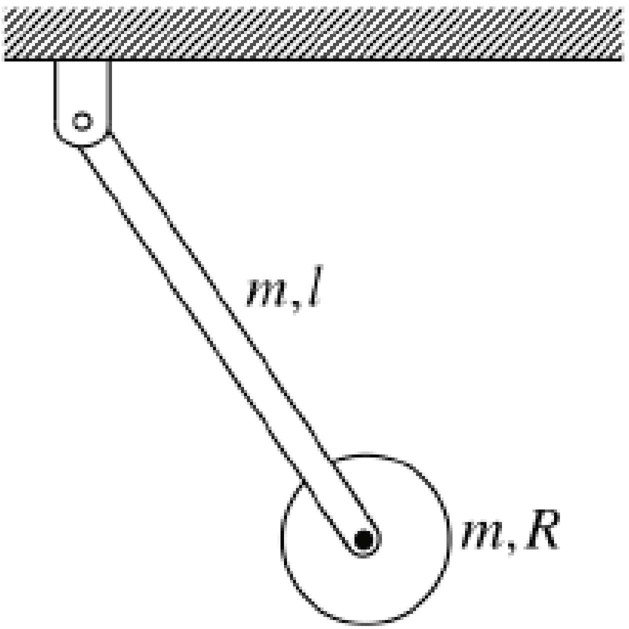
$$r(0) = r_t$$
$$v(0) = 0$$

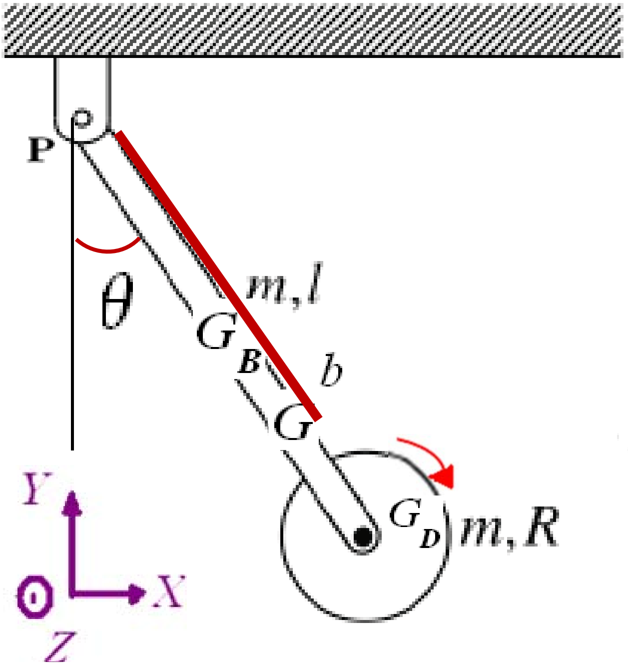
$$\Rightarrow$$

$$r(t) = r_t \cos\left(\frac{g}{r_t}\ t\right)$$

$$r(t) = 6371\times 10^3 \cos\left(\frac{9.81}{6371\times 10^3}\ t\right) = 6371\times 10^3\ m \cos(0.0012\ t)$$

PTV-2.10, Considerar el péndulo físico compuesto, mostrado en la figura. Determinar: a) La ecuación que rige la dinámica del péndulo. b) El período de la oscilación resultante, para ángulos pequeños de oscilación.

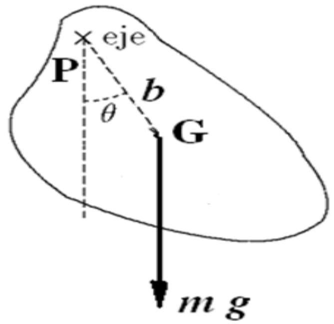




$$\ddot{\theta} + \frac{b\,m\,g}{I_{P,z}}\,\theta = 0$$

$$w_0^{\,2} = \frac{b\,m\,g}{I_{P,z}} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\frac{b\,m\,g}{I_{P,z}}} \Longrightarrow$$

$$T = 2\,\pi\sqrt{\frac{I_{P,z}}{b\,m\,g}}$$



$$b = \frac{m\,\frac{L}{2} + m\,L}{m_T = 2\,m} = \frac{3\,L}{4}$$

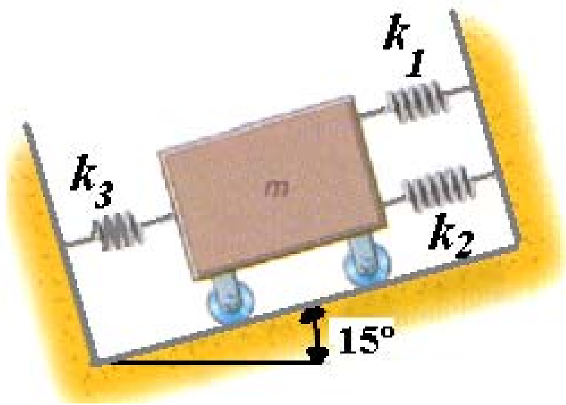
$$I_{P,z} = \frac{1}{3}\,m\;l^2 + \boxed{\frac{1}{2}\,m\,R^2 + m\,l^2}$$

$$\frac{b\,m_T\,g}{I_{P,z}} = \frac{\frac{3}{4}\;l\;2\,m\,g}{\frac{1}{3}\,m\,l^2 + \frac{1}{2}\,m\,R^2 + m\,l^2} = \frac{9\,g\,l}{8\,l^2 + 3\,R^2}$$

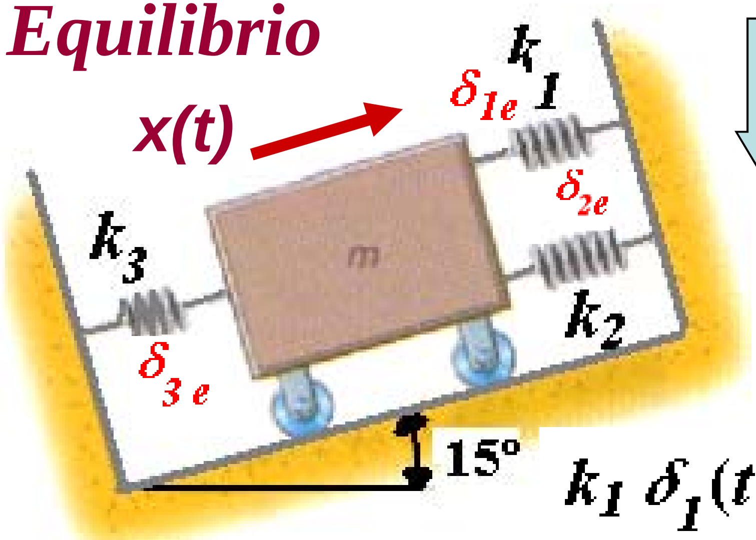
$$w_0^{\,2} = \frac{9\,g\,l}{8\,l^2 + 3\,R^2}$$

$$T = \frac{2\,\pi}{3}\sqrt{\frac{8\,l^2 + 3\,R^2}{g\,l}}$$

PTV-2.11 Un carrito que pesa 50 N está unido a tres resortes y rueda sobre un plano inclinado, según se muestra en la figura. Las constantes de los resortes son k1 =k2 = 83 N/m y k3= 250 N/m. Si se desplaza el carrito hacia arriba del plano inclinado una distancia de 75 mm a partir de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad inicial de 375 mm/s hacia la parte superior del plano cuando t=0, determinar: a) El período, la frecuencia, y la pulsación angular de la vibración resultante. b) La posición del carrito en función del tiempo, c) La amplitud A de la vibración resultante.



Equilibrio



Dinámica

$$F_1 + F_2 - F_3 - m\,g\,\sin\theta = m\,\ddot{x}$$

$$N - m\,g\,\cos\theta = 0$$

$$F_1 = k_1\,\delta_1(t)$$

$$F_2 = k_2\,\delta_2(t)$$

$$F_3 = k_3\,\delta_3(t)$$

$$k_1\,\delta_1(t) + k_2\,\delta_2(t) - k_3\,\delta_3(t) - m\,g\,\sin\theta = m\,\ddot{x}$$

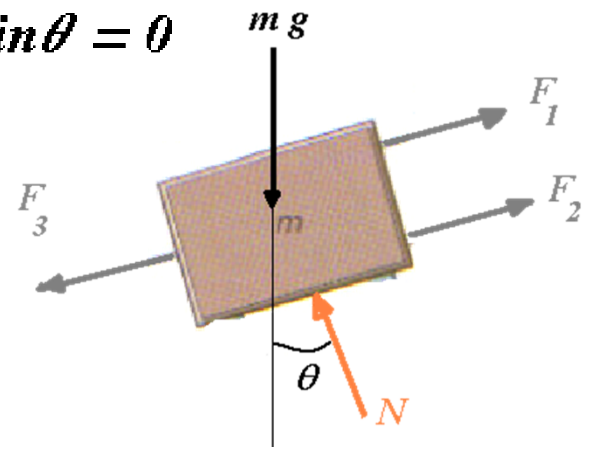
$$F_1 + F_2 - F_3 - m\,g\,\sin\theta = 0$$

$$N - m\,g\,\cos\theta = 0$$

$$F_1 = k_1\,\delta_{e1}$$

$$F_2 = k_2\,\delta_{e2}$$

$$F_3 = k_3\,\delta_{e3}$$



$$\delta_1(t) = \delta_{e1} - x(t)$$

$$\delta_2(t) = \delta_{e2} - x(t)$$

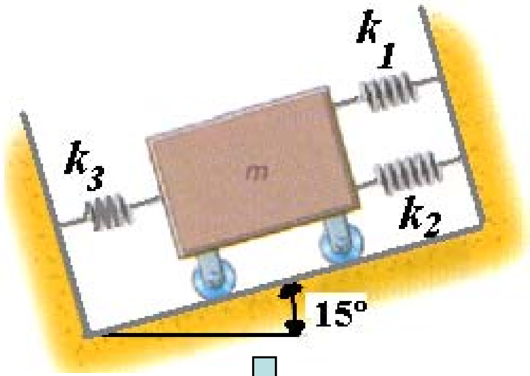
$$\delta_3(t) = \delta_{e3} + x(t)$$

$$\boxed{k_1\,\delta_{e1} + k_2\,\delta_{e2} - k_3\,\delta_{e3} - m\,g\,\sin\theta = 0}$$ L.E

$$k_1\,(\delta_{e1} - x(t)) + k_2(\delta_{e2} - x(t)) - k_3(\delta_{e3} + x(t)) - m\,g\,\sin\theta = m\,\ddot{x}$$

$$\boxed{k_1\delta_{e1}+k_2\ \delta_{e2}-k_3\,\delta_{e3}-m\,g\,\sin\theta}-x(t)\,(\,k_1+k_2+k_3\,)=m\,\ddot{x}$$

L.E

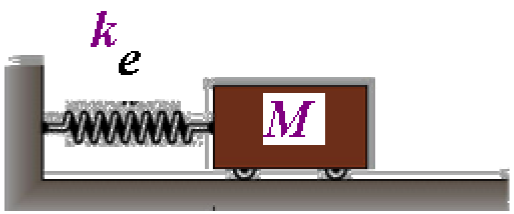


$$\ddot{x}+\frac{(k_1+k_2+k_3)}{m}\,x(t)=0$$

m.a.s

$$w_0=\sqrt{\frac{(k_1+k_2+k_3)}{m}}\qquad T=2\,\pi\sqrt{\frac{(k_1+k_2+k_3)}{m}}$$

$$9.03\ \frac{rad}{s}\qquad\qquad 0.70\ s$$

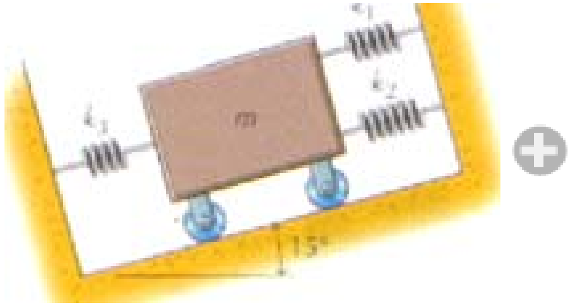


$(k_1+k_2+k_3)$

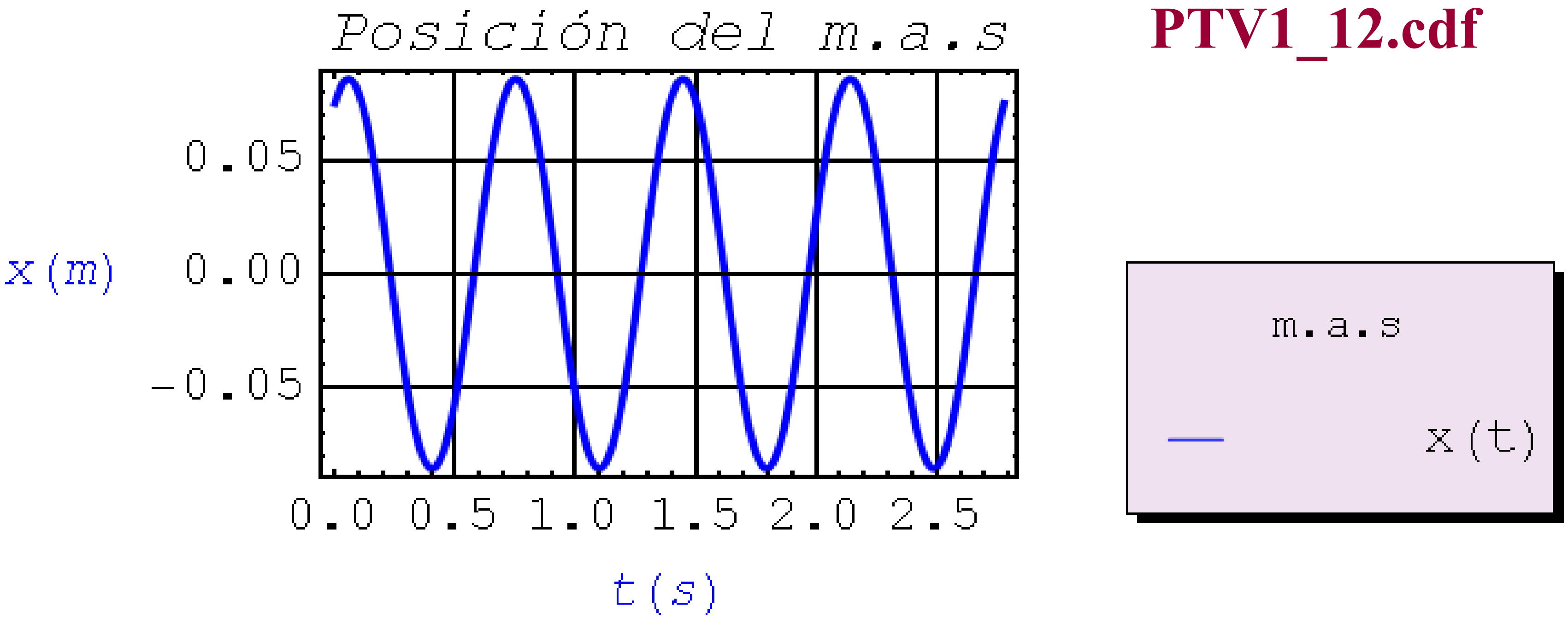
```
masIniciales[t, 9.03, 75/1000, 375/1000]

0.0857298 Cos[0.505687 - 9.03 t]
```

$$x(t)=0.086\ \cos(9\,t-0.51)$$

$$x(t) = 0.086 \cos(9\,t - 0.51)$$

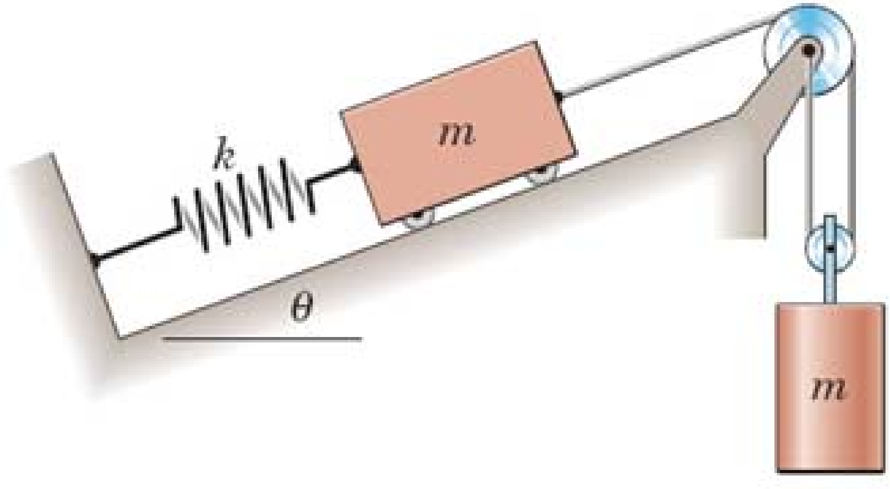


- Inercia y muelles
- Condiciones iniciales
- Opciones de gráfico

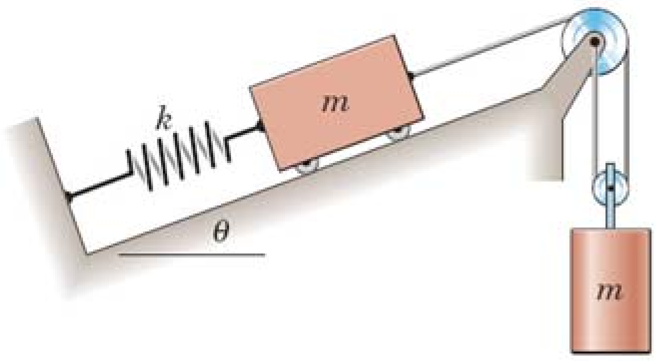


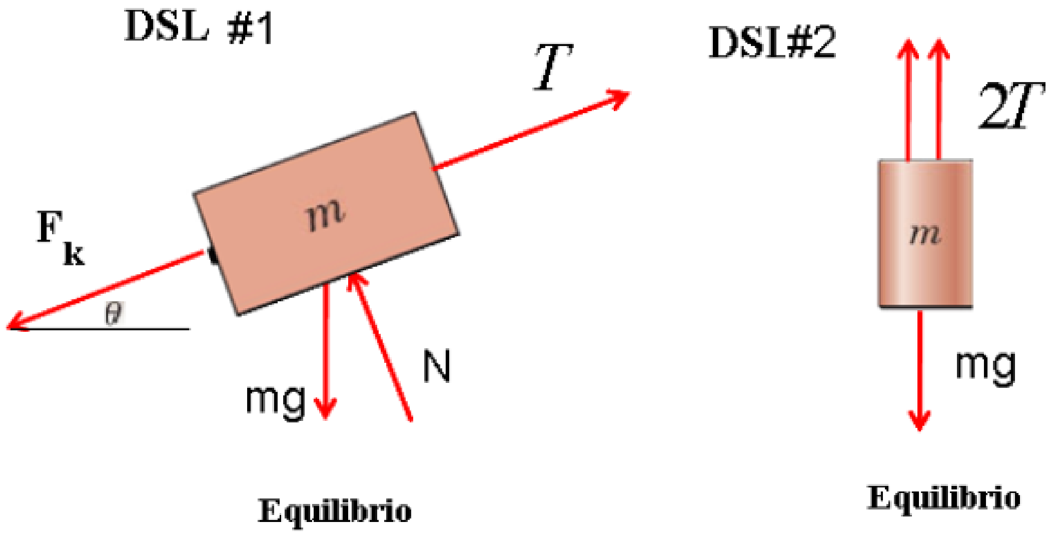
PTV1_12.cdf

PTV-2.12 ***Dado el sistema mecánico de la figura a)¿oscila el sistema? b) En caso de que oscile, obtener el período de oscilación. c) Encontrar la posición en todo instante de tiempo, de cada una de las masas del sistema mecánico propuesto. Considerar m = 65 kg, k = 80 N/m. y que la masa en contacto con el muelle se desplaza 60 mm hacia arriba de su posición de equilibrio, con una velocidad hacia abajo de 80 mm/s2***



Equilibrio



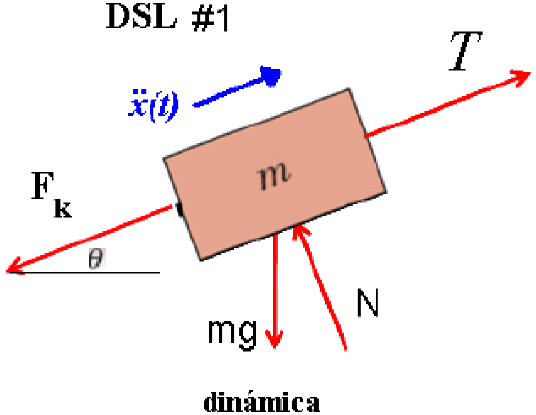


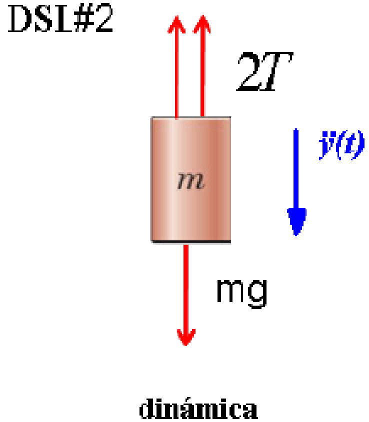
$$
\begin{aligned}
T - F_k - mg\ sen\theta &= 0 \\
N - mg\cos\theta &= 0 \\
F_k &= k\delta e \\
2T - mg &= 0
\end{aligned}
$$

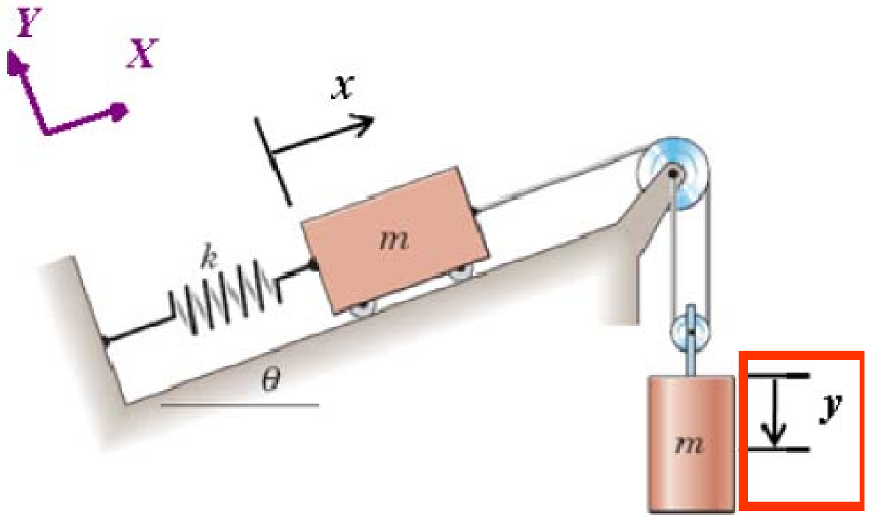
Resolviendo el sistema de ecuaciones para el equilibrio:

$$
\begin{aligned}
\delta e &= g\,m\,\frac{(1 - 2\,sen\theta)}{2k} \\
T &= \frac{gm}{2}
\end{aligned}
$$

Ahora consideramos la situación ***dinámica****, cuando la partícula m, sobre el plano asciende $x(t)$, respecto de la posición de equilibrio, y la partícula m, vertical, desciende $y(t)$:*

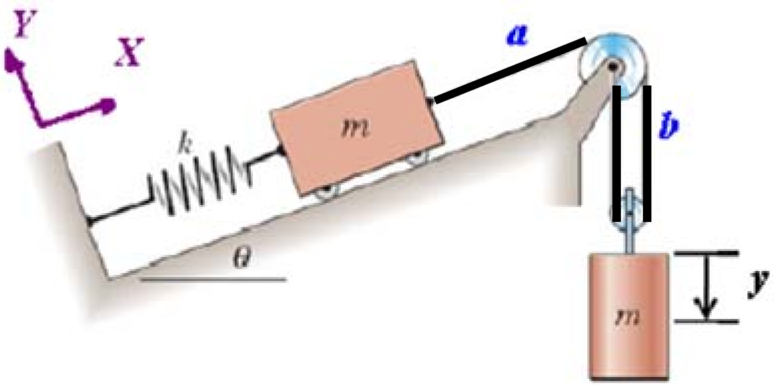




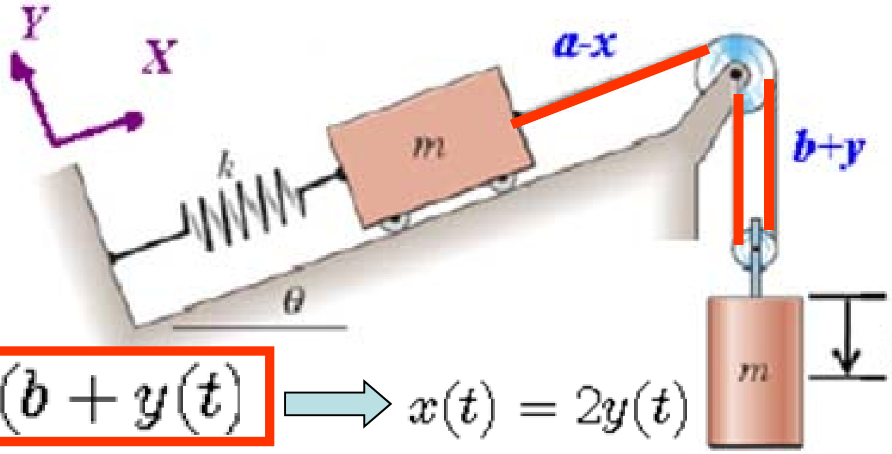


$$
\begin{aligned}
T - F_k - mg\ sen\theta &= m\boxed{\ddot{x}(t)} \\
N - mg\cos\theta &= 0 \\
F_k &= k\delta e \\
2T - mg &= (-)m\boxed{\ddot{y}(t)}
\end{aligned}
$$

Ligadura cinemática entre los dos bloques ?



La longitud de la cuerda es constante:

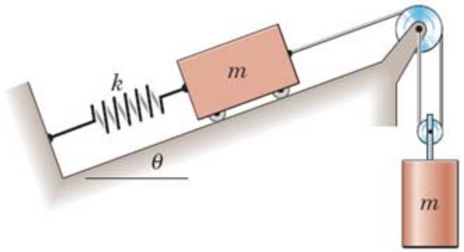


$$L = cte = a + 2b = \boxed{a - x(t) + 2(b + y(t))} \Rightarrow x(t) = 2y(t)$$

$$y(t) = \frac{x(t)}{2}$$

$$\left.\begin{aligned} g\frac{m}{2} - k\delta e - mg\ sen\theta &= 0 \\ 2T - 2k\delta e - 2mg\ sen\theta - 2kx(t) &= 2m\ddot{x}(t) \\ 2T - mg &= (-)m\frac{\ddot{x}(t)}{2} \end{aligned}\right\}$$

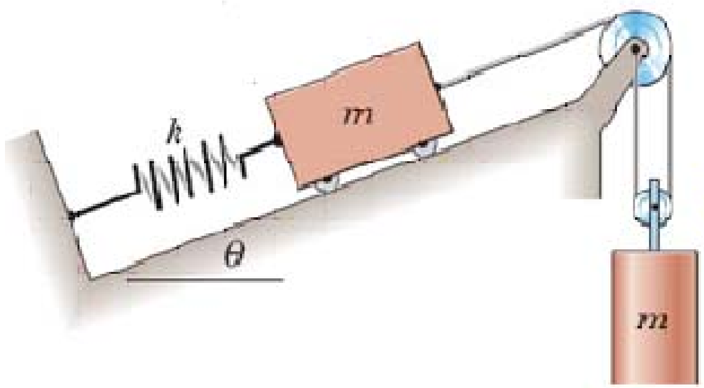
$$\left.\begin{aligned} g\frac{m}{2} - k\delta e - mg\ sen\theta &= 0 \\ 2T - 2k\delta e - 2mg\ sen\theta - 2kx(t) &= 2m\ddot{x}(t) \\ 2T - mg &= (-)m\frac{\ddot{x}(t)}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$



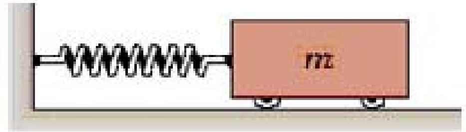
$$\left.\begin{aligned} g\tfrac{m}{2} - k\delta e - mg\ sen\theta = 0 \\ \boxed{-2k\delta e - 2mg\ sen\theta + mg} - 2kx(t) = \tfrac{5}{2}m\ddot{x}(t) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\frac{5}{4}m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0 \Longrightarrow \ddot{x}(t) + \frac{4}{5}\frac{k}{m}x(t) = 0 \Longrightarrow$$

$$m.a.s \quad w_0 = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{k}{m}}\frac{rad}{s}$$



$$k_e = \frac{4}{5}k$$



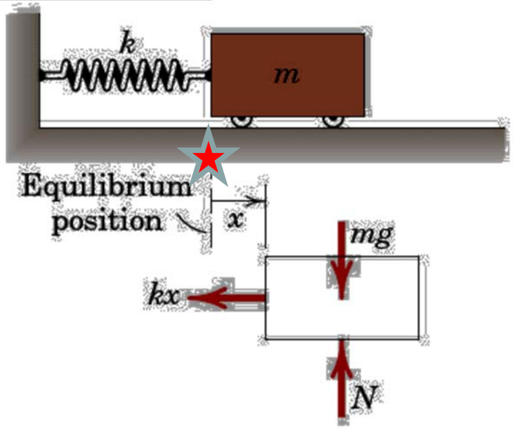
$$w_0 = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{k}{m}}\,\frac{rad}{s}$$

$$x(t) = A\cos(w_0 t + \delta)$$

$$y(t) = \frac{x(t)}{2} = \frac{A}{2}\cos(w_0 t + \delta)$$

Medir x desde la **posición de equilibrio estático**, no desde la posición indeformada de muelle.

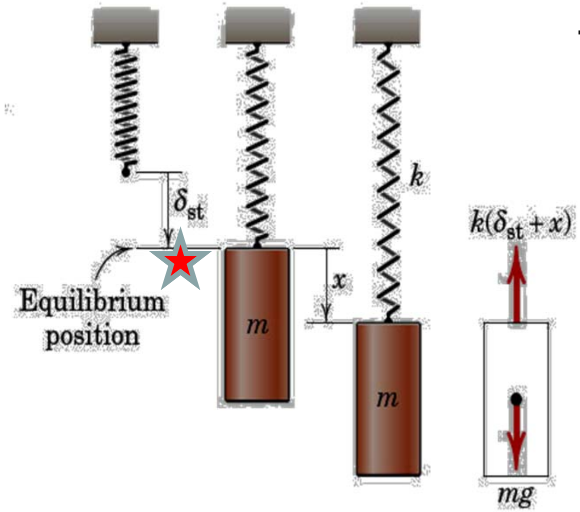
Horizontal



Ecu. de Mov $\left(\sum F_x = ma_x\right)$

$$\boxed{-kx = m\ddot{x}}$$

Vertical

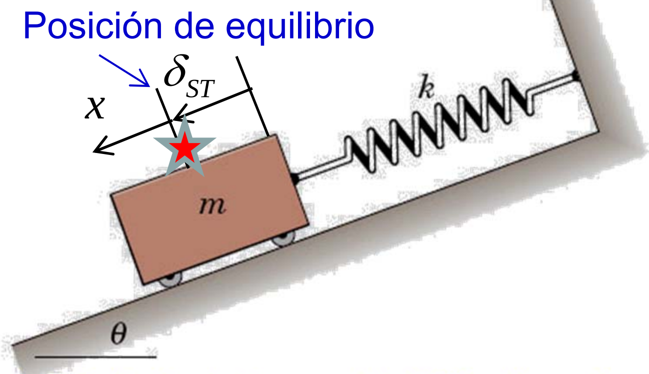


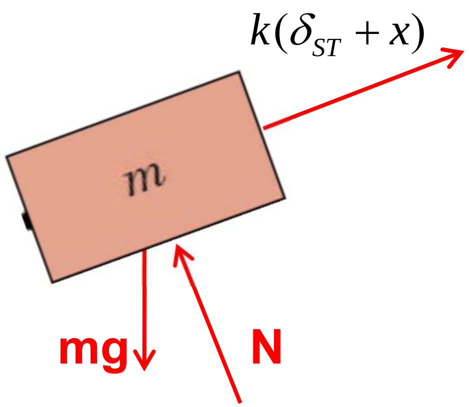
Ecu de Mov $\left(\sum F_y = ma_y\right)$

$$-k(\cancel{\delta_{ST}} + x) + \cancel{mg} = m\ddot{x}$$

$$\boxed{-kx = m\ddot{x}}$$

Pendiente



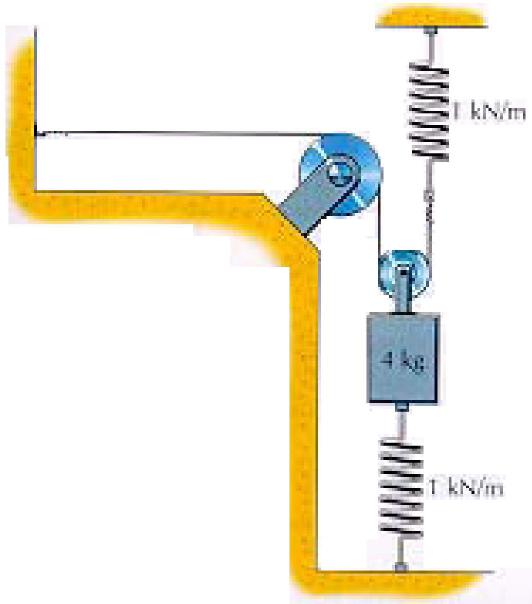


Ecu, de Mov $\left(\sum F_x = ma_x\right)$

$$-k(\cancel{\delta_{ST}} + x) + \cancel{mg\sin\theta} = m\ddot{x}$$

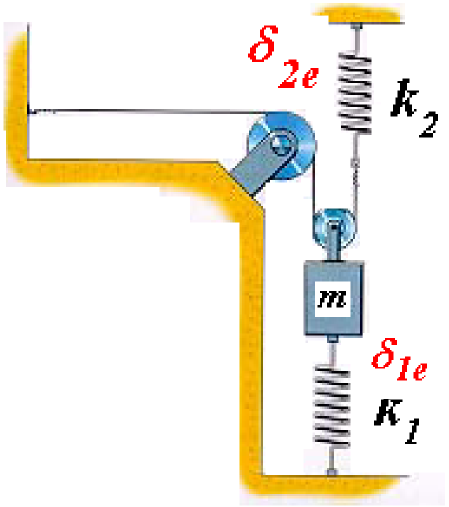
$$\boxed{-kx = m\ddot{x}}$$

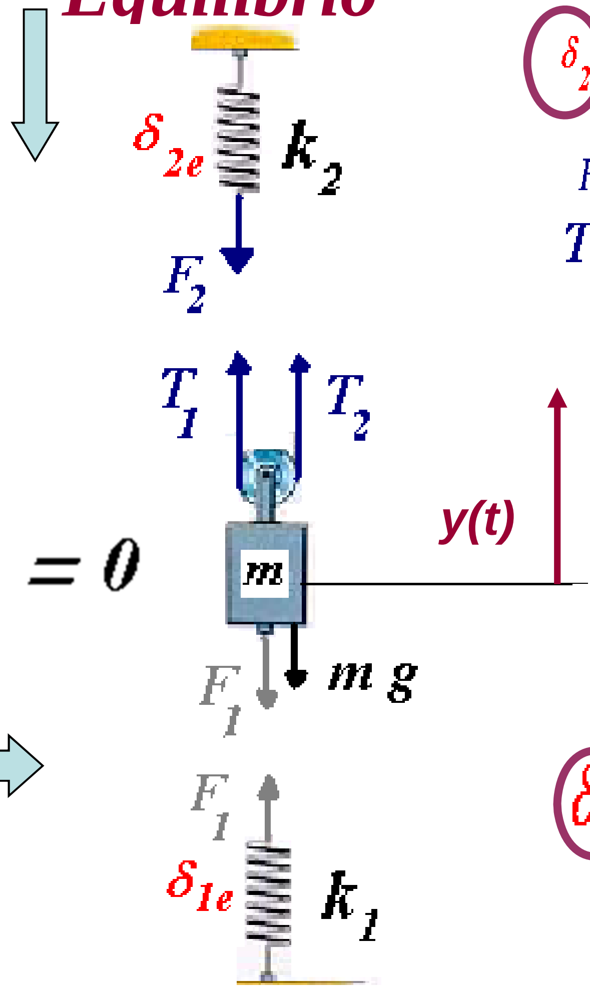
PTV-2.13 ***Una masa de 4 kg está suspendida en un plano vertical según se indica en la figura. Los dos resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y están exentas de rozamientos. Si se lleva la masa a 15 mm por encima de su posición de equilibrio y se le suelta con una velocidad de 750 mm/s hacia abajo cuando t =0, determinar: a) La ecuación diferencial que rige el movimiento. b) ¿Oscila el sistema? c) En caso de que oscile, obtener el período de oscilación, frecuencia, y amplitud de la vibración resultante. c) Encontrar la posición en todo instante de tiempo de la masa de 4 kg. d) El menor tiempo t >0, correspondiente a la posición nula de la masa m.***

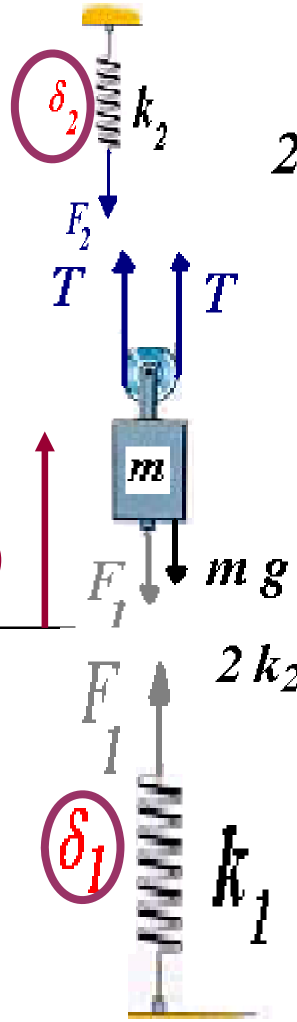


Equilibrio

Dinámica







$$2\,T - F_1 - m\,g = m\,\ddot{y}$$

$$T = F_2$$

$$F_2 = k_2\,\delta_2$$

$$F_1 = k_1\,\delta_1$$

$$2\,k_2\,\delta_2 - k_1\,\delta_1 - m\,g = m\,\ddot{y}$$

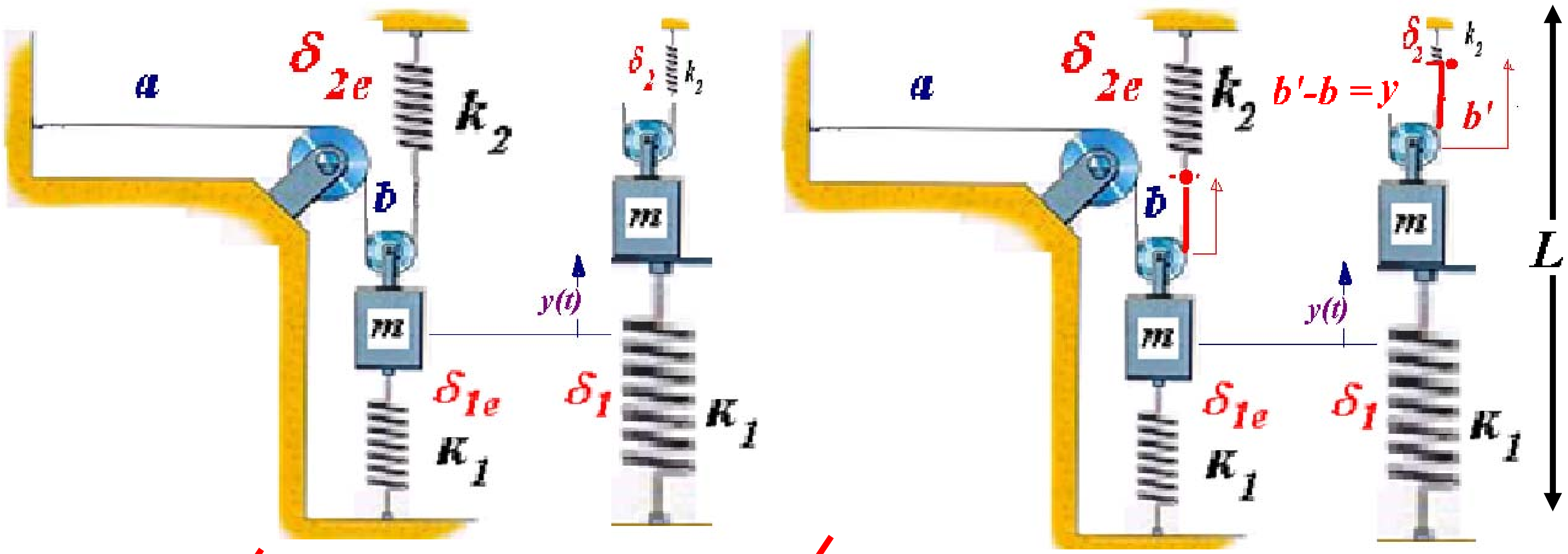
$$2\,T - F_1 - m\,g = 0$$

$$T = F_2$$

$$F_1 = k_1\,\delta_{k_{1,e}}$$

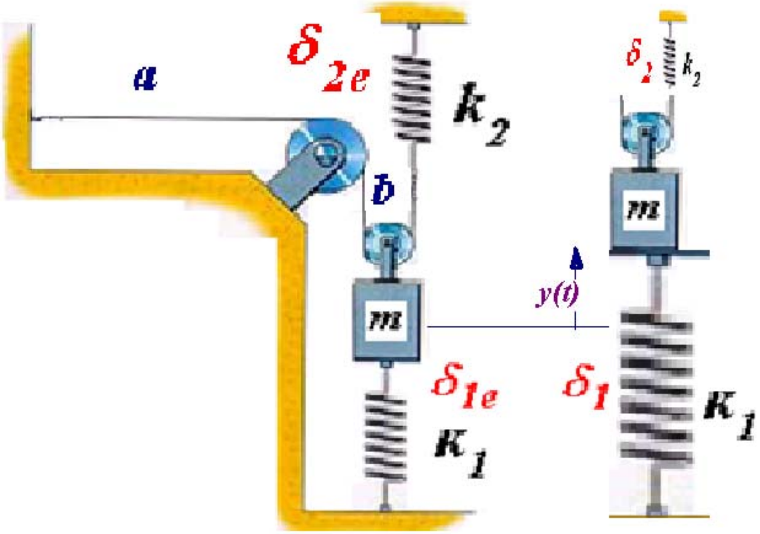
$$F_2 = k_2\,\delta_{k_{2,e}}$$

$$\boxed{2\,k_2\,\delta_{k_{2,e}} - k_1\,\delta_{k_{1,e}} - m\,g = 0}$$ L.E



$$L = \cancel{\delta_{1e}} + b + \delta_{2e} = \cancel{\delta_{1e}} + y + b' + \delta_2 \Longrightarrow$$

$$\delta_2 = \delta_{2e} + \underbrace{\boxed{b - b'}}_{-y} - y = \delta_{2e} - 2y$$



$$\delta_2(t) = \delta_{2e} - 2y \qquad \delta_1 = \delta_{1e} + y$$

$$2k_2\,\delta_2 - k_1\,\delta_1 - m\,g = m\,\ddot{y}$$

$$\boxed{2k_2\,\delta_{k_2,e} - k_1\,\delta_{k_1,e} - m\,g = 0}$$

$$2k_2(\delta_{2e} - 2y) - k_1(\delta_{1e} + y) - m\,g = m\,\ddot{y}$$

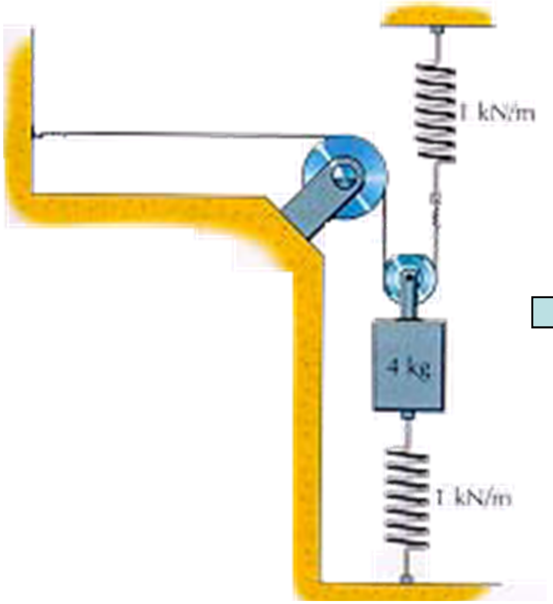
$$\boxed{\cancel{2k_2\,\delta_{2e} - k_1\,\delta_{1e} - m\,g}} - y(4k_2 + k_1) = m\,\ddot{y}$$

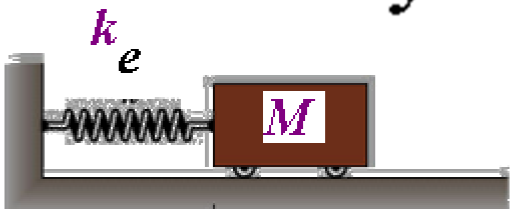
$$-y(4k_2 + k_1) = m\,\ddot{y} \Rightarrow \ddot{y} + \frac{4k_2 + k_1}{m}\,y = 0$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0}$$

0k

$$\Rightarrow w_0^2 = \frac{4k_2 + k_1}{m} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k_2 + k_1}}$$





$$\ddot{y} + \frac{4k_2 + k_1}{m} y = 0$$

$$k_e = \frac{4k_2 + k_1}{m}$$

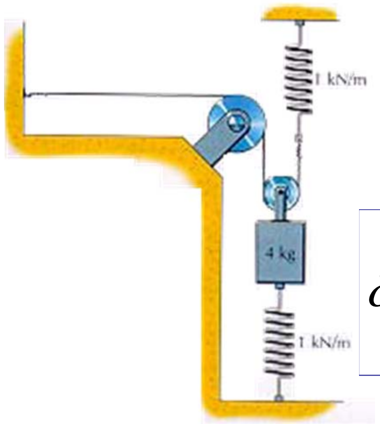
$$\sqrt{\frac{4\ k_2 + k_1}{m}} \text{ /. } \{k_1 \text{ -> } 1000,\ k_2 \text{ -> } 1000,\ m \text{ -> } 4\}$$

$25\sqrt{2}$ | 35.3553 | $35.36\ \frac{rad}{s}$

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\ k_2 + k_1}{m}} \text{ /. } \{k_1 \text{ -> } 1000,\ k_2 \text{ -> } 1000,\ m \text{ -> } 4\}}$$

$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{25}$ | 0.177715 | $0.18\ s$

Si se lleva la masa a 15 mm por encima de su posición de equilibrio y se le suelta con una velocidad de 750 mm/s hacia abajo cuando t =0, determinar:



$$A = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}$$

$$\delta(x_o, v_o) = \arctan\left(-\frac{v_0}{x_0 w_0}\right)$$

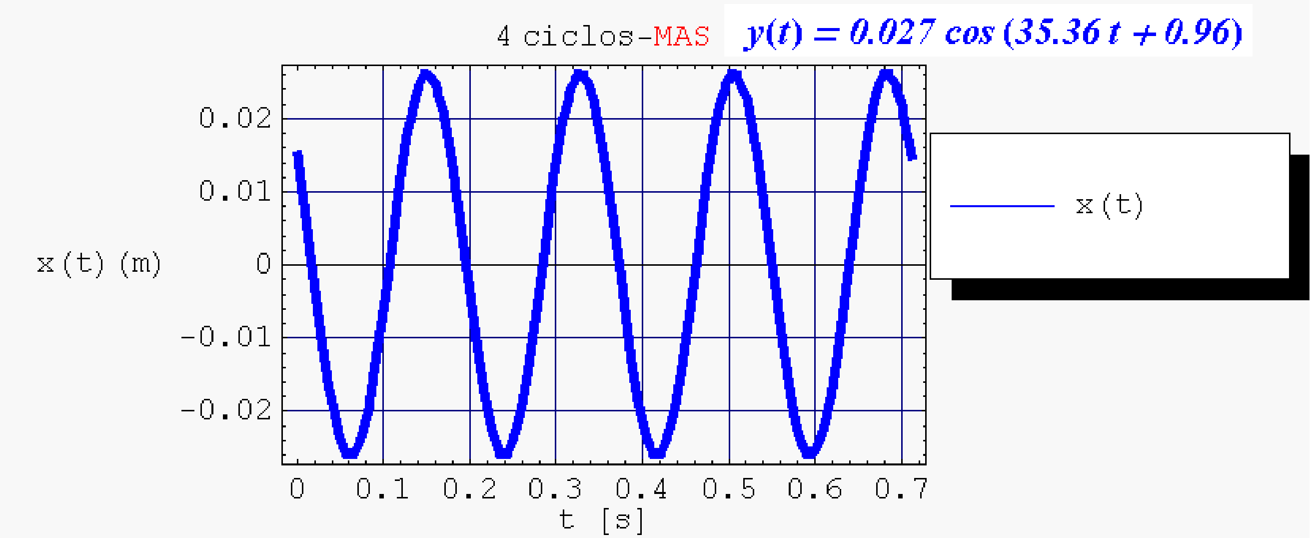
$x\ (t)\ =\ A\,Cos\ (w_0\ t + \delta)$

```
masIniciales[t, 25 √2, 15/1000, -750/1000] // N
```

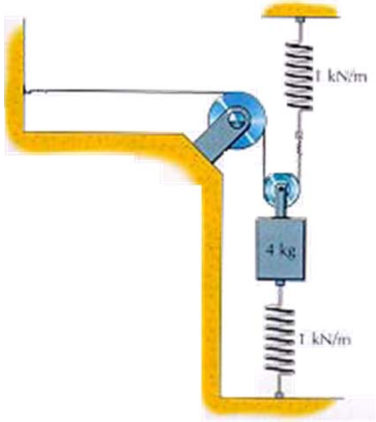
```
0.0259808 Cos[0.955317 + 35.3553 t]
```

$$y(t) = 0.027\cos(35.36\,t + 0.96)$$

```
masGrafIniciales[t, 25 √2, 15/1000, -750/1000, 4];
```



d) El menor tiempo t >0, correspondiente a la posición nula de la masa m.



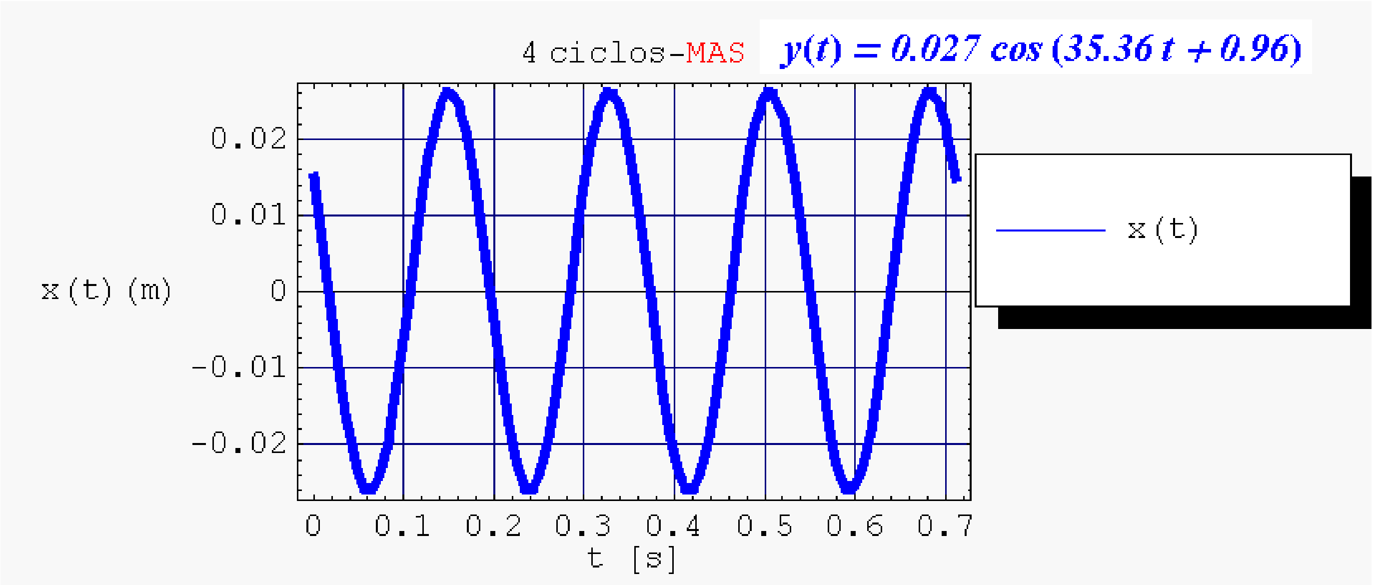
$$t_1 \,/\; y(t_1) = 0.027\cos(35.36\,t + 0.96) = 0 \Longrightarrow$$

$$\cos(35.36\,t + 0.96) = 0$$

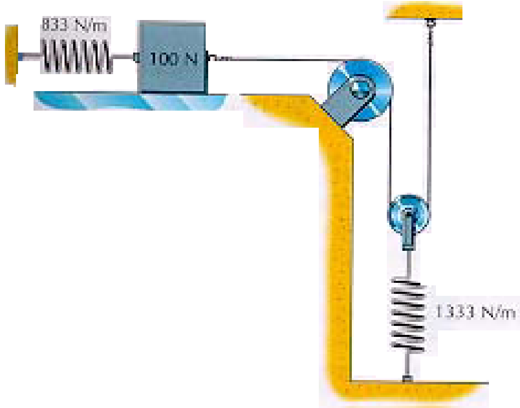
$$(35.36\,t + 0.96) = \frac{\pi}{2}$$

$$t_1 = 0.017\ s$$

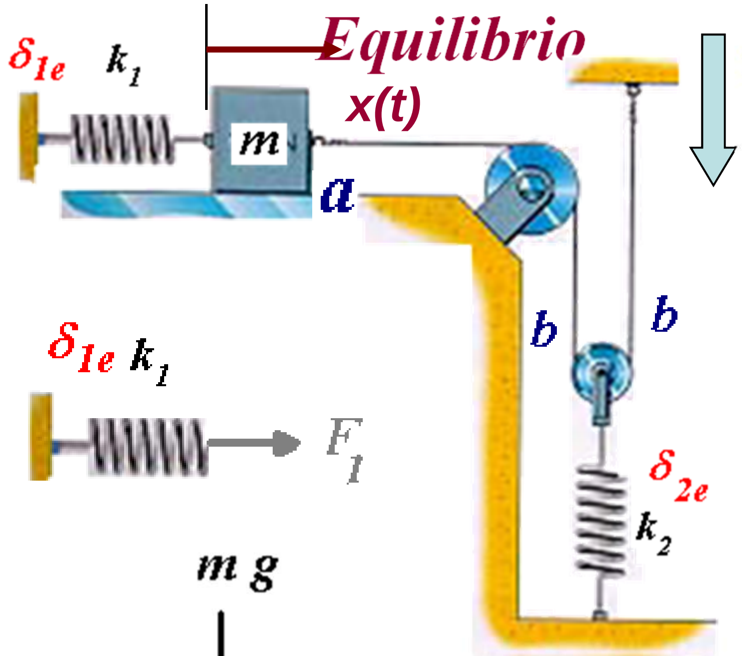
```
masGrafIniciales[t, 25 √2, 15/1000, -750/1000, 4];
```

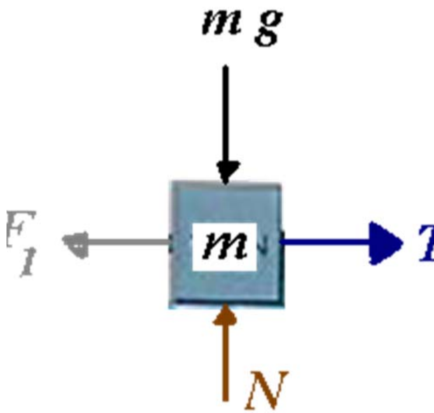


PTV-2.14 ***Un bloque que pesa 100 N se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura. Los dos resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamiento. Si se desplaza el bloque 75 mm hacia la izquierda de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 1.25 m / s hacia la derecha cuando t = 0, obtener: a) La ecuación diferencial que rige el movimiento. b) ¿Oscila el sistema? c) En caso de que oscile, obtener el período de oscilación, frecuencia, y amplitud de la vibración resultante. c) Encontrar la posición en todo instante de tiempo de la masa que pesa 100 N. d) El menor tiempo t >0, correspondiente a velocidad nula de la masa m.***



Equilibrio





$$T - F_1 = 0$$

$$N - m\,g = 0$$

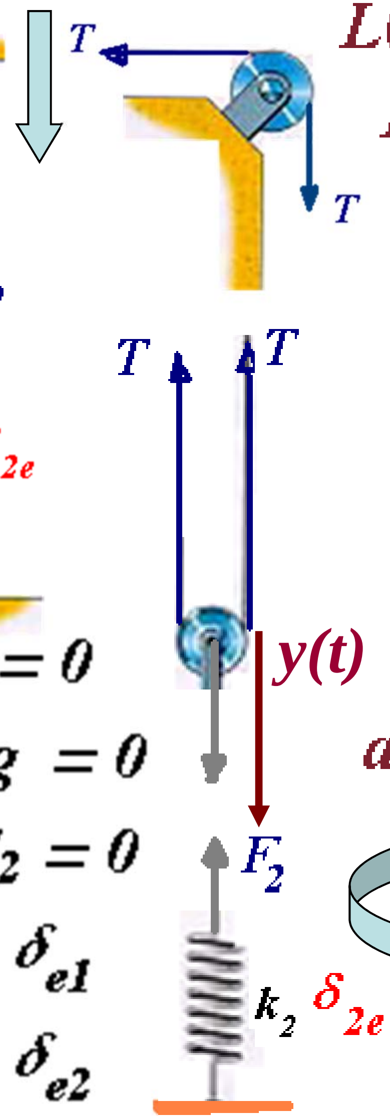
$$2\,T - F_2 = 0$$

$$F_1 = k_1\,\delta_{e1}$$

$$F_2 = k_2\,\delta_{e2}$$

$$\boxed{\frac{k_1}{2}\,\delta_{e2} - k_1\,\delta_{e1} = 0}$$

L.E



$$L(0) = a + 2\,b$$

Dinámica

$$L(t) = a - x(t) + 2\,(b + y(t))$$

$$T - F_1 = m\,\ddot{x}$$

$$N - m\,g = 0$$

$$2\,T - F_2 = 0$$

$$F_1 = k_1\,\underline{\delta_1(t)}$$

$$F_2 = k_2\,\underline{\delta_2(t)}$$

$$a - x(t) + 2\,(b - y(t)) = a + 2\,b$$

$$x(t) = 2\,y(t)$$

$$\delta_1(t) = \delta_{e1} + x(t)$$

$$\delta_2(t) = \delta_{e2} - y(t)$$

PTV-2.14

$$T - F_1 = m\,\ddot{x}$$

$$2\,T - F_2 = 0$$

$$F_1 = k_1\,\delta_1(t)$$

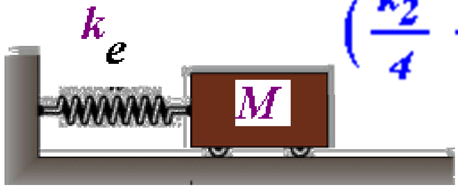
$$F_2 = k_2\,\delta_2(t)$$

$$\delta_1(t) = \delta_{e1} + x(t)$$

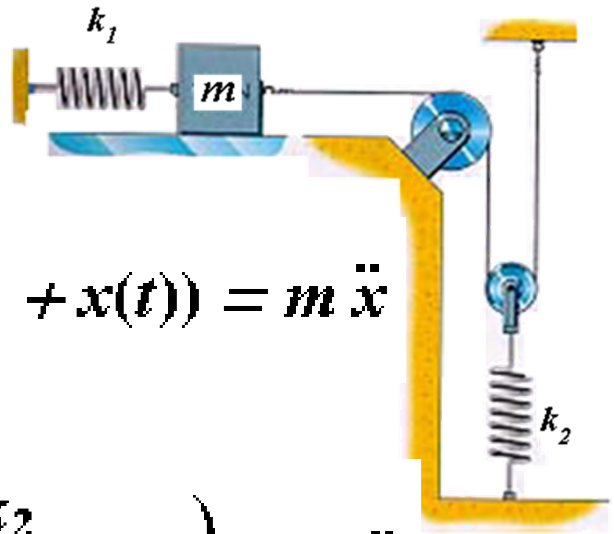
$$\delta_2(t) = \delta_{e2} - y(t)$$

$$\boxed{\frac{k_1}{2}\,\delta_{e2} - k_1\,\delta_{e1} = 0}$$

$$x(t) = 2\,y(t)$$



$$\left(\frac{k_2}{4} + k_1\right)$$



$$\frac{k_2}{2}\,(\delta_{e2} - y(t)) - k_1(\delta_{e1} + x(t)) = m\,\ddot{x}$$

$$\frac{k_2}{2}\,\delta_{e2} - k_1\,\delta_{e1} - x\left(\frac{k_2}{4} + k_1\right) = m\,\ddot{x}$$

$$-x\left(\frac{k_2}{4} + k_1\right) = m\,\ddot{x}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{4\,k_1 + k_2}{4\,m}} \quad 10.70\,\frac{rad}{s}$$

$$\ddot{x} + \frac{\left(\frac{k_2}{4} + k_1\right)}{m}\,x = 0$$

m.a.s $\Rightarrow$

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{\frac{4\,k_1 + k_2}{4\,m}} \quad 0.59\,s$$

$$x(t) = A\cos(w_0 t + \delta)$$

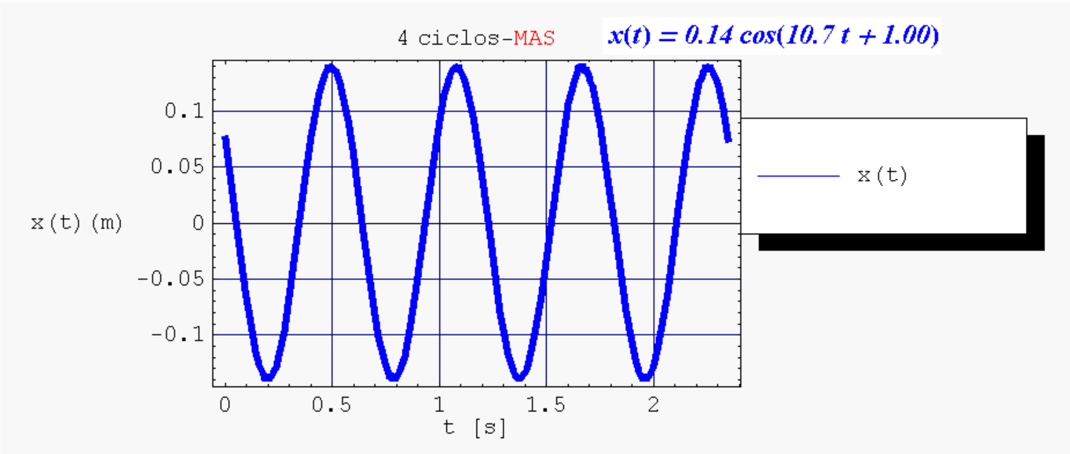
$$\delta(x_o, v_o) = \arctan\left(-\frac{v_0}{x_0 w_0}\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{x_0^2\omega_0^2 + v_0^2}}{\omega_0}$$

Si se desplaza el bloque 75 mm hacia la izquierda de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 1.25 m / s hacia la derecha cuando t = 0,

$$x(t) = 0.14\cos(10.7\,t + 1.00)$$

```
masGrafIniciales[t, 10.7, -75/1000, 1.25, 4];
```



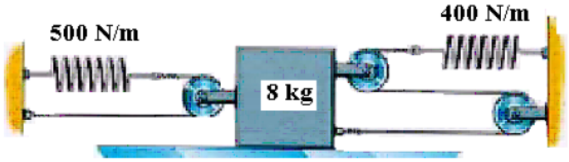
$$t_1 /\ y(t_1) = 0.14\cos(10.7\,t + 1.00) = 0 \Longrightarrow$$

$$\cos(10.7\,t + 1.00) = 0$$

$$(10.7\,t + 1.00) = \frac{\pi}{2}$$

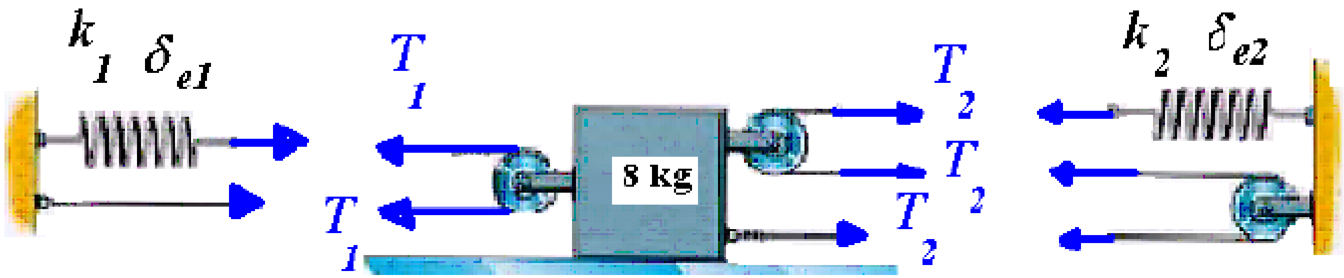
$$t_1 = 0.24\,\frac{\pi}{2}\,s$$

PTV-2.15 ***Una masa de 8 kg se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamientos, según se indica en la figura. Los dos resortes están sometidos a tracción en todo instante y las poleas son pequeñas y exentas de rozamiento. Si se desplaza la masa 25 mm hacia la derecha de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad de 800 mm/s hacia la derecha cuando t = 0, obtener: a) La ecuación diferencial que rige el movimiento. b) ¿Oscila el sistema? c) En su caso el tipo de vibración, su frecuencia natural, período y amplitud de la vibración resultante d) Encontrar la posición en todo instante de tiempo de la masa de 8kg. e) El menor tiempo t >0, correspondiente a velocidad nula de la masa m.***



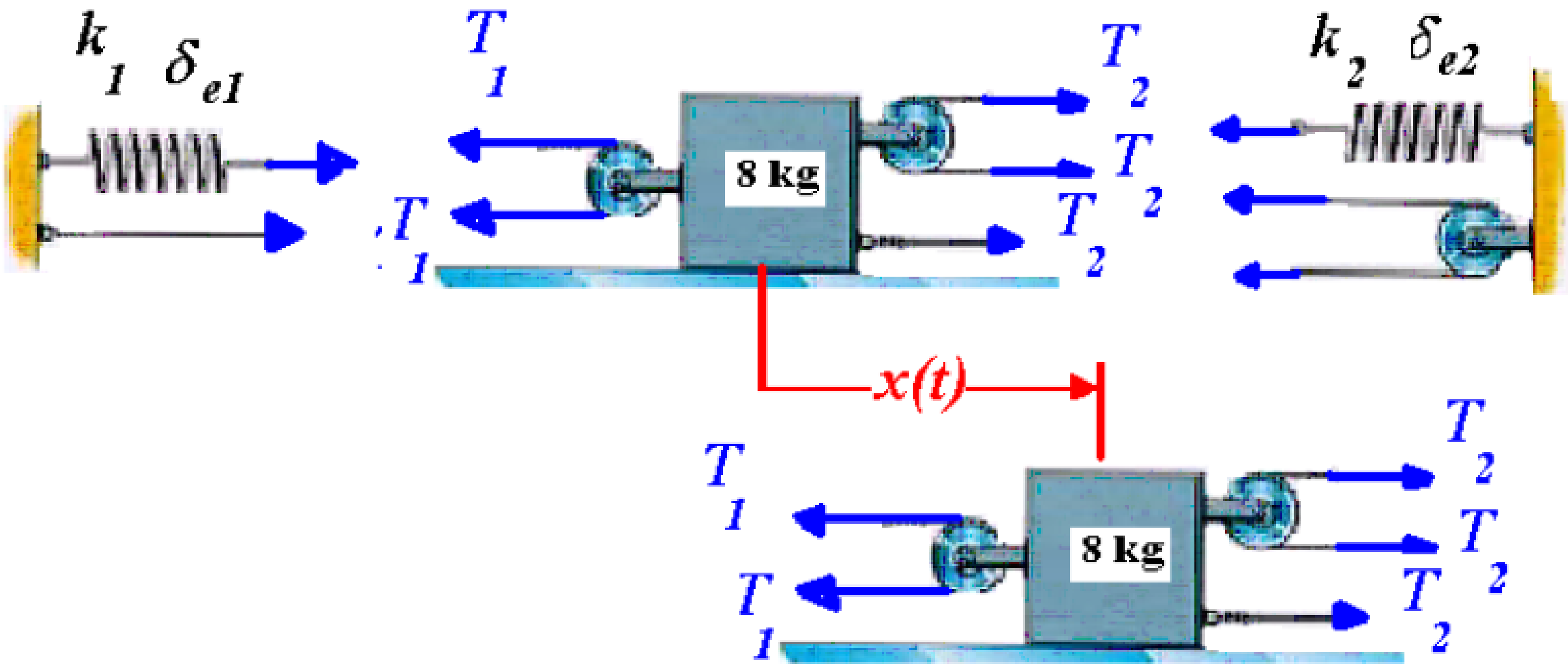
Equilibrio

$$\left.\begin{aligned}3T_2 - 2T_1 &= 0\\ T_1 &= k_1\delta_{e1}\\ T_2 &= k_2\delta_{e2}\end{aligned}\right\}$$

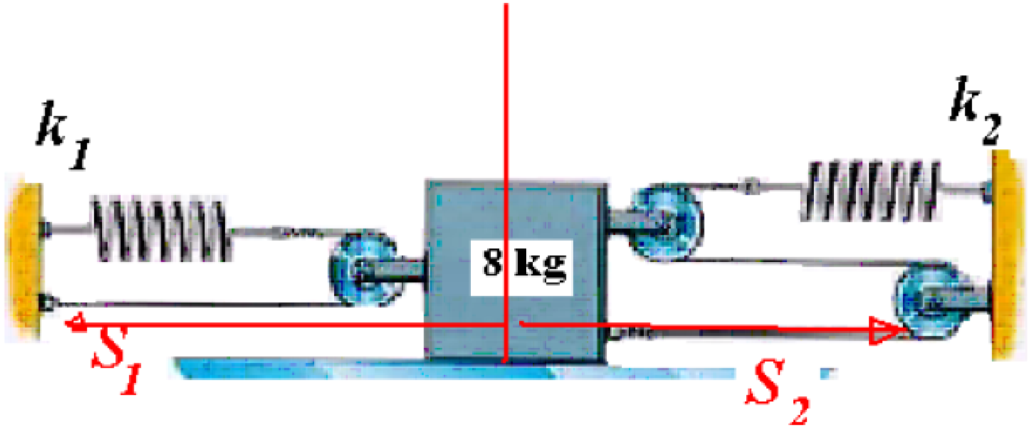


$$3k_2\delta_{e2} - 2k_1\delta_{e1} = 0$$

Dinámica



PTV-2.15



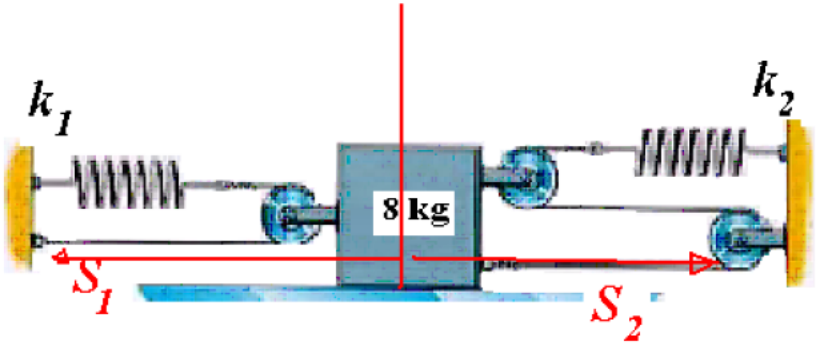
$$\left.\begin{aligned} 3T_2 - 2T_1 &= m\ddot{x} \\ T_1 &= k_1\delta_1(t) \\ T_2 &= k_2\delta_2(t) \end{aligned}\right\}$$

Ligaduras

$$\left\{\begin{aligned} L_1 &= S_1 + z_1 = \text{cte} = S_1 + S_1 - \delta_{e1} = 2\,S_1 - \delta_{e1} \\ L_2 &= 2\,S_2 + z_2 = \text{cte} = 2\,S_2 + S_2 - \delta_{e2} = 3\,S_2 - \delta_{e2} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} 2S_1 - \delta_{e1} &= cte = 2(S_1 + x(t)) - \delta_1(t) \\ 3S_2 - \delta_{e2} &= cte = 3(S_2 - x(t)) - \delta_2(t) \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_1(t) &= 2\,x(t) + \delta_{e1} \\ \delta_2(t) &= \delta_{e2} - 3\,x(t) \end{aligned}}$$

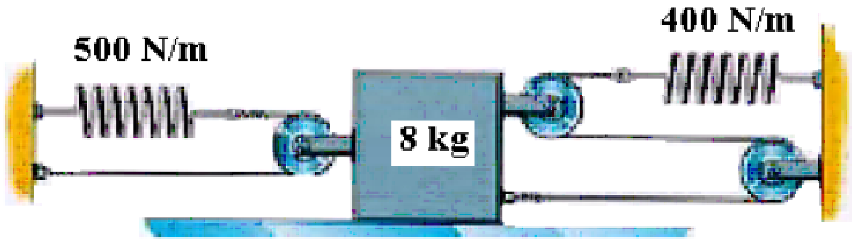


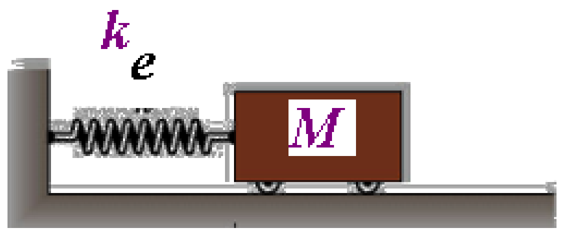
$$\left.\begin{aligned} 3T_2 - 2T_1 &= m\ddot{x} \\ T_1 &= k_1\delta_1(t) \\ T_2 &= k_2\delta_2(t) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_1(t) &= \delta_{e1} + 2x(t) \\ \delta_2(t) &= \delta_{e2} - 3x(t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow 3k_2(\delta_{e2} - 3x(t)) - 2k_1(\delta_{e1} + 2x(t)) = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + x(9k_2 + 4k_1) + \boxed{3k_2\delta_{e2} - 2k_1\delta_{e1}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{x} + \frac{(9k_2+4k_1)}{m}x = 0$$





$$\ddot{x} + \frac{(9k_2+4k_1)}{m}x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 700x = 0$$

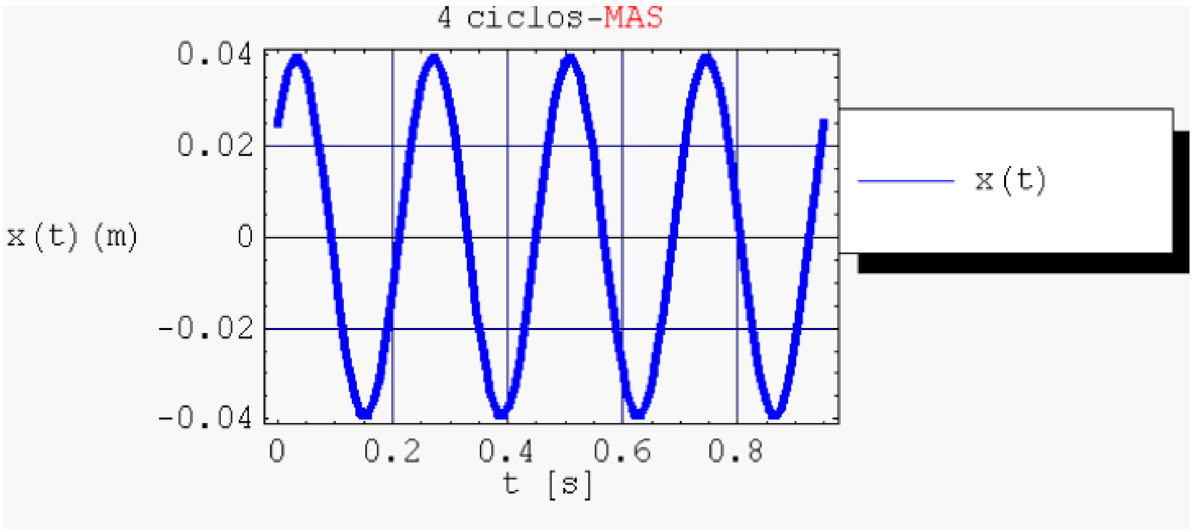
$$w_0 = \sqrt{700} = 10\sqrt{7} \simeq 26{,}46\frac{rad}{s} \qquad T = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{10\sqrt{7}} = 0{,}24s$$

Para las condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{25}{1000}m \longrightarrow \\ \dot{x}_0 = \frac{800}{1000}\frac{m}{s} \longrightarrow \end{array}\right\}$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{x_0^2 w_0^2 + \dot{x}_0}}{w_0}\cos(w_0 t + \tan^{-1}(\frac{\dot{x}_0}{x_0 w_0}))$$

$$x(t) = 0{,}039\cos(26{,}46t - 0{,}88)m$$



PTV-2.15

d) El menor tiempo $t > 0$, correspondiente a velocidad nula de la masa m

$$v(t) = \frac{d}{dt}x(t) \Rightarrow v(t) = 1{,}038\ \sin(26{,}46t - 0{,}88)\ m$$

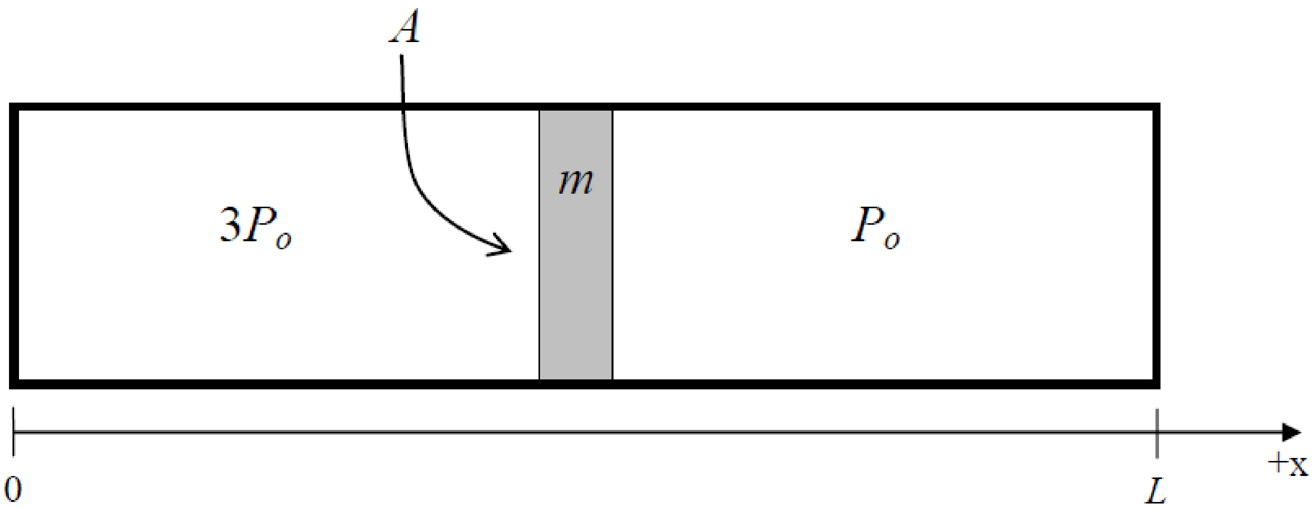
buscamos un t^* tal que: $v(t^*) = 0 \Rightarrow$

$$\sin(26{,}46t^* - 0{,}88) = 0 \Rightarrow$$

$$t^* = 0{,}033 s$$

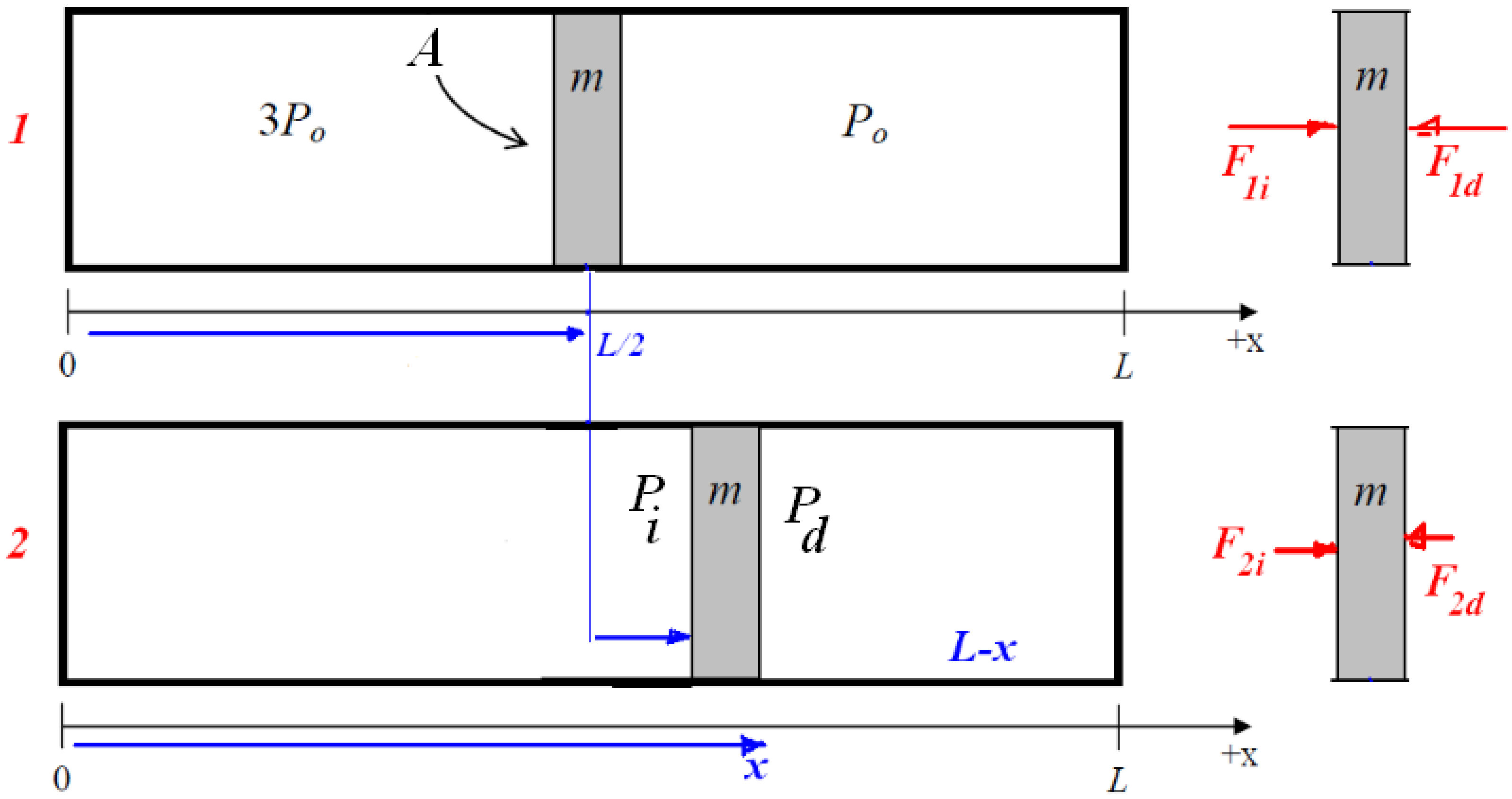
PTV-2.16

PTV-2.16. Un pistón de fricción despreciable de masa *m* y sección transversal *A*, está rodeado por dos cámaras selladas de longitud total *L*. Cuando el pistón se enceuntra en el centro de las cámaras, las presiones son las mostradas en la figura. Puede despreciarse cualquier efecto de sobrepresión asociado a la pequeña anchura finita del pistón. Determinar: a) Posición de equilibrio estable a lo largo del eje X. b) Obtener la ecuación del movimiento del pistón. c) A la vista de la ecuación del movimiento del pistón, ¿Oscila el pistón? d) En su caso determinar el período de la oscilación del pistón.

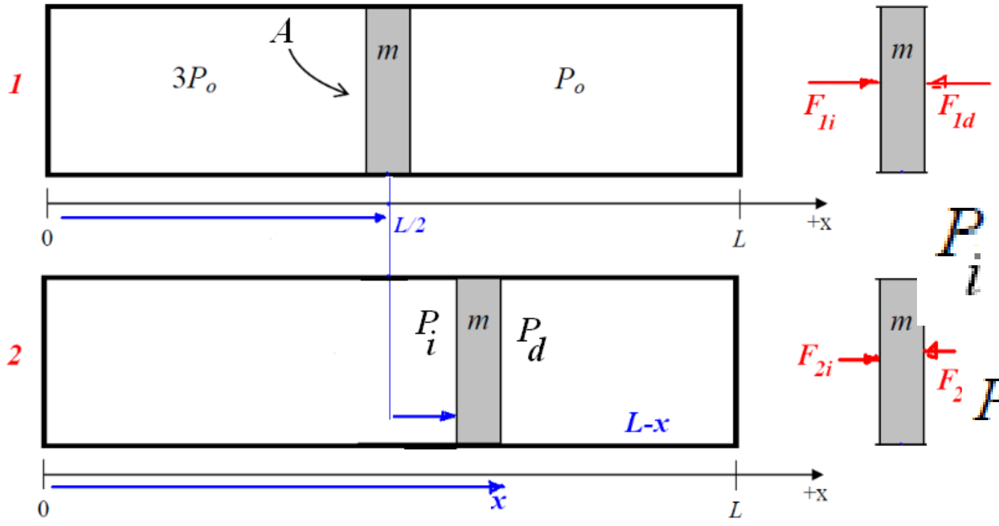


PTV-2.16. a) Posición de equilibrio estable a lo largo del eje X.

- Estado inicial (**1**). Pistón en ***L/2***
- Estado (**2**). Pistón se ha desplazado ***x (t)*** a la derecha→



PTV-2.16. a) Posición de equilibrio estable a lo largo del eje X.



Boyle: $\Rightarrow$ $P_1V_1 = P_2V_2$

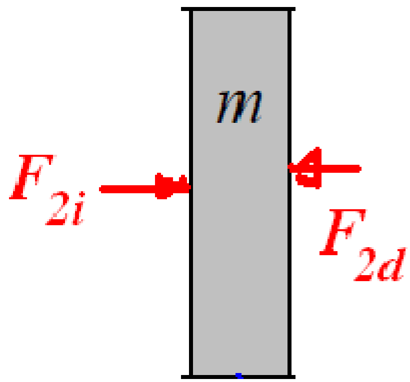
MMPF7

$$P_i\, A\, x = 3P_0\left(\tfrac{L}{2}A\right) \Rightarrow P_i = \frac{3P_0 L}{2x}$$

$$P_d\, A(L-x) = P_0\left(\tfrac{L}{2}A\right) \Rightarrow P_d = \frac{P_0 L}{2(L-x)}$$

Posición de equilibrio: $\Rightarrow$

$$\sum F = \frac{3P_0L}{2x_{eq}}A - \frac{P_0L}{2(L-x_{eq})}A = 0$$



$$\frac{3}{x_{eq}} - \frac{1}{(L-x_{eq})} = 0$$

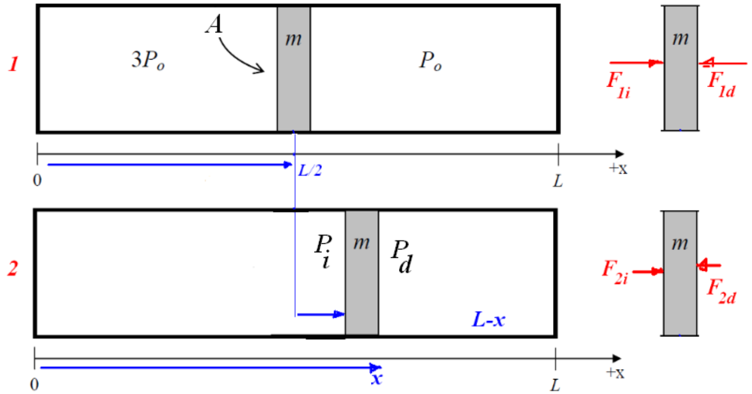
$$x_{eq} = \frac{3}{4}L$$

Diapositiva 80

JJMC4 SY@fwh1#Frpsdudprv#l}txlhugd#405#|#gh

MXDQ#MRVH#PLUDOOHV#FDQDOV>#5:2352534:

PTV-2.16. b,c) Obtener la ecuación del movimiento del pistón. c) A la vista de la ecuación del movimiento del pistón, ¿Oscila el pistón? d) En su caso determinar el período de la oscilación del pistón.



$$\sum F = \frac{3AP_0L}{2x} - \frac{AP_0L}{2(L-x)} = m\ddot{x}$$

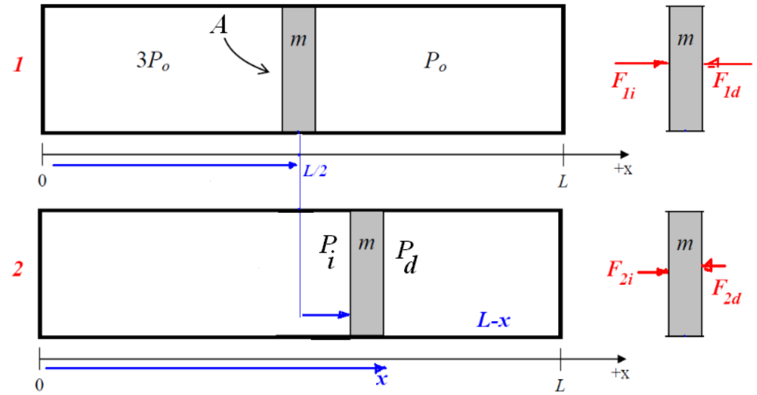
$$m\ddot{x} - \frac{3AP_0L}{2x} + \frac{AP_0L}{2(L-x)} = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{AP_0L}{2m}\left(-\frac{3}{x} + \frac{1}{(L-x)}\right) = 0$$

No → **Linealizar** → **Taylor: $x_e = 3L/4$**

$$f(x) = \frac{-3}{x} + \frac{1}{L-x} \quad \Rightarrow \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{L-x_e} - \frac{3}{x_e}\right) + \left(\frac{3}{x_e^2} + \frac{1}{(L-x_e)^2}\right)(x-x_e) + \left(\frac{1}{(L-x_e)^3} - \frac{3}{x_e^3}\right)(x-x_e)^2 + O\left((x-x_e)^3\right)$$



$$\ddot{x} + \frac{AP_0L}{2m}\left(-\frac{3}{x} + \frac{1}{(L-x)}\right) = 0$$

Linealizar

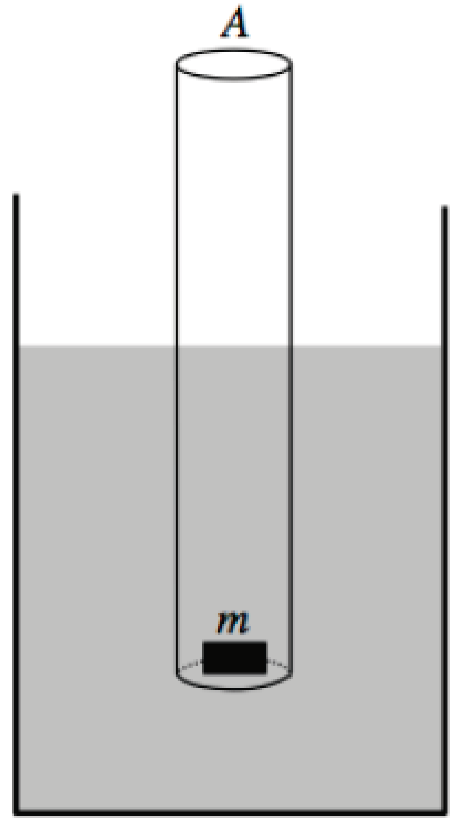
Taylor: $x_e = 3L/4$

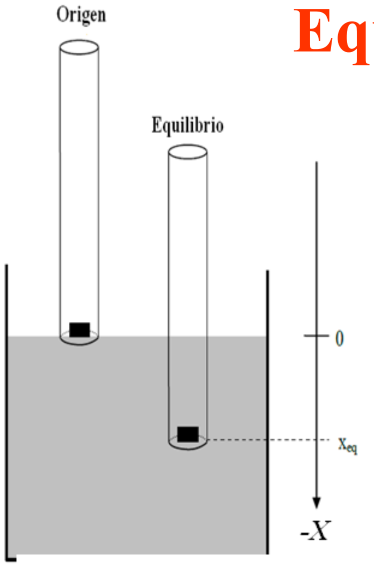
$$f(x) = \left(\frac{1}{L-x_e} - \frac{3}{x_e}\right) + \left(\frac{3}{x_e^2} + \frac{1}{(L-x_e)^2}\right)(x-x_e) + \left(\frac{1}{(L-x_e)^3} - \frac{3}{x_e^3}\right)(x-x_e)^2 + O\left((x-x_e)^3\right)$$

$$f(x) = \frac{64\left(x - \frac{3L}{4}\right)}{3L^2} \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \frac{32AP_0}{3mL}\left(x - \tfrac{3}{4}L\right) = 0 \;\xrightarrow{y = x - \frac{3L}{4}}\; \boxed{\ddot{y} + \frac{32\,A\,\mathrm{Po}}{3\,m\,L}\,y}$$

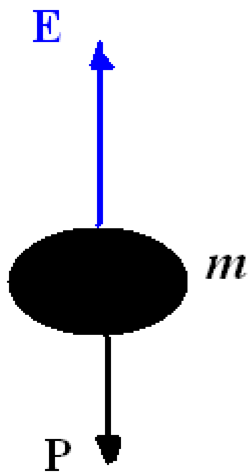
$$\omega_o = \sqrt{\frac{32AP_0}{3mL}} \;\Rightarrow\; T_o = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{32\,A\,\mathrm{Po}}{3\,m\,L}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3\,m\,L}{32\,A\,\mathrm{Po}}}$$

PTV-2.17. Considerar el "flotador" cilíndrico de sección transversal circular y masa m, mostrado en la figura. a) En el punto de equilibrio estable, determinar el nivel del agua por encima de la parte inferior del flotador? b) Determinar la ecuación de movimiento del flotador. c) ¿Oscila el sistema? d) En su caso determinar el período de la oscilación.



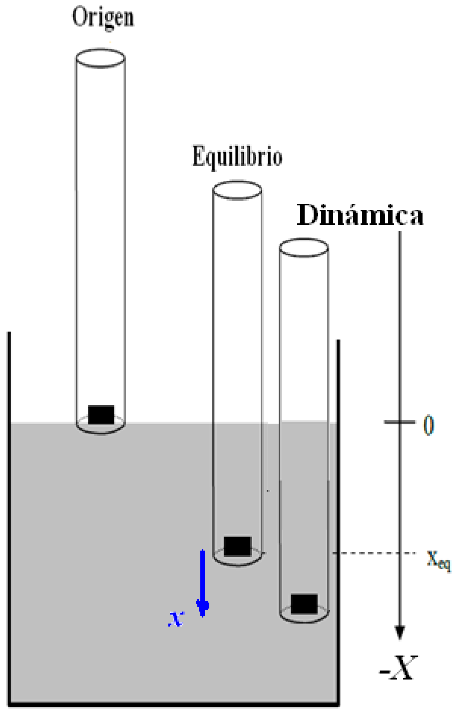


Equilibrio



$$\sum F = E - P = \rho A x_e g - m g = 0$$

$$x_e = \frac{m g}{\rho A g}$$



Dinámica

$$\sum F = E - P = \rho A (x_e + x) g - m g = -m \ddot{x}$$

$$\rho A x_e g + \rho A \; x g - m g = -m \ddot{x}$$

$$m \ddot{x} + \rho A \; x g + \rho A x_e g - m g = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\rho A \; g}{m} x = 0}$$

$$w_0^2 = \frac{\rho A \; g}{m}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\rho A \; g}{m}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho A \; g}}$$