Vibraciones y Ondas

Grado en Física

Tema 1

Oscilaciones libres y forzadas

TUTV-III

Oscilaciones amortiguadas

Juan José Miralles Canals. Tutor InterCampus.

Centro Asociado de Albacete

Índice

- 3.1. Oscilaciones amortiguadas
- 3.2. Resolución de problemas

Bibliografía

- French. *Vibraciones y Ondas*. Capítulo 3
- Ryley-Sturges. *Ingeniería Mecánica*. Volumen II. Dinámica. Capítulo 21
- Rañada. *Dinámica Clásica*. Capítulo 6

Objetivos

- A partir de la resolución de la dinámica de un sistema físico con un grado de libertad, deducir la ecuación diferencial de un oscilador amortiguado (MAS)

- Determinar la constante de un amortiguador equivalente a un conjunto de amortiguadores en serie y paralelo

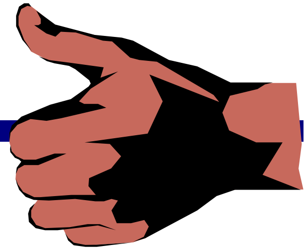
- Saber usar la solución del oscilador amortiguado para resolver diferentes problemas físicos, con un grado de libertad.

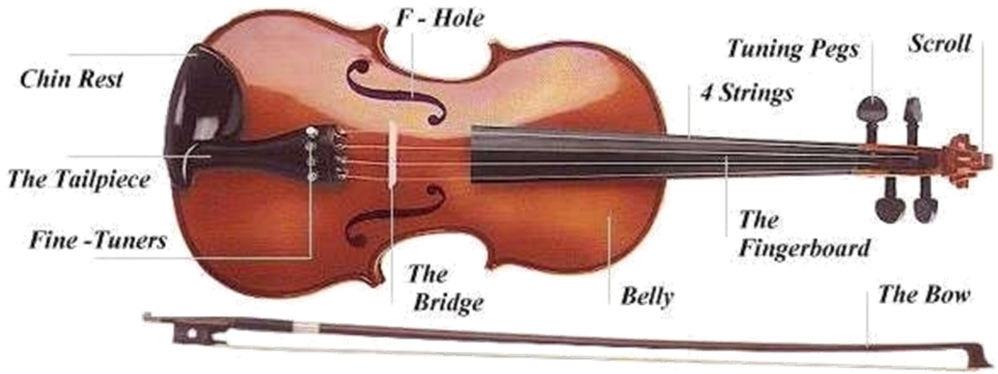
- Diferenciar entre amortiguamiento subcrítico, amortiguamiento crítico y amortiguamiento supercrítico

- Conocer el significado del factor Q, para oscilaciones amortiguadas.

- Diferenciar entre solución transitoria y solución estacionaría para un oscilador amortiguado

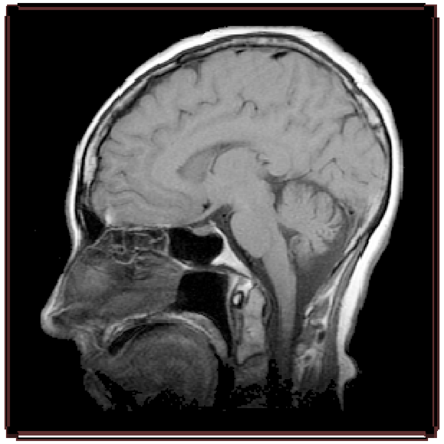
Vibraciones positivas

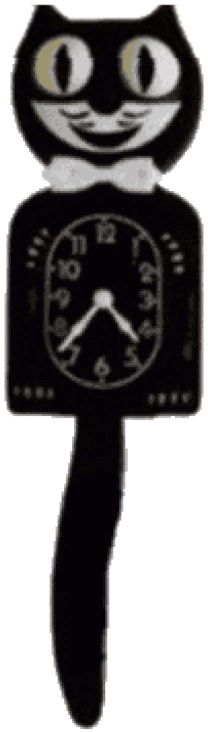




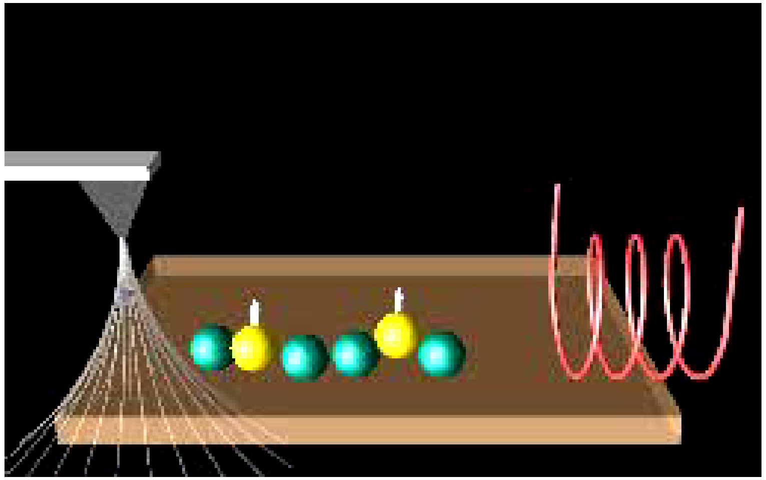
Instrumentos musicales

IRM

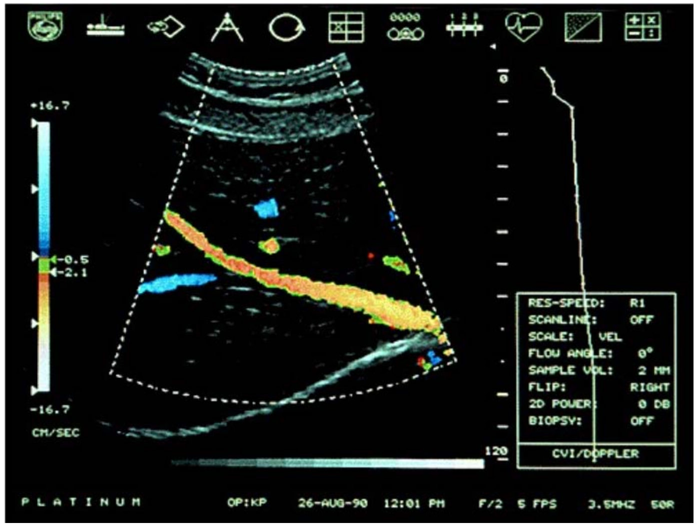




Microscopio de fuerza atómica – (AFM)



Ultrasonidos



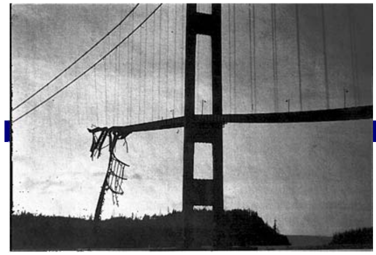
Medidas de tiempo

Diapositiva 5

J1

Imágenes de una cabeza humana obtenidas por resonancia magnética (IRM)
Juan.Miralles; 07/02/2012

Vibraciones indeseables

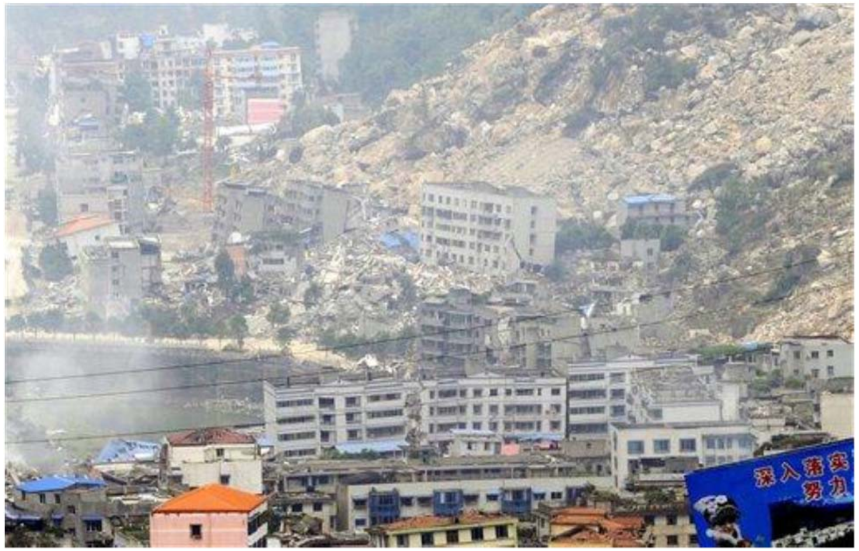


Tacoma Narrows Bridge (1940)

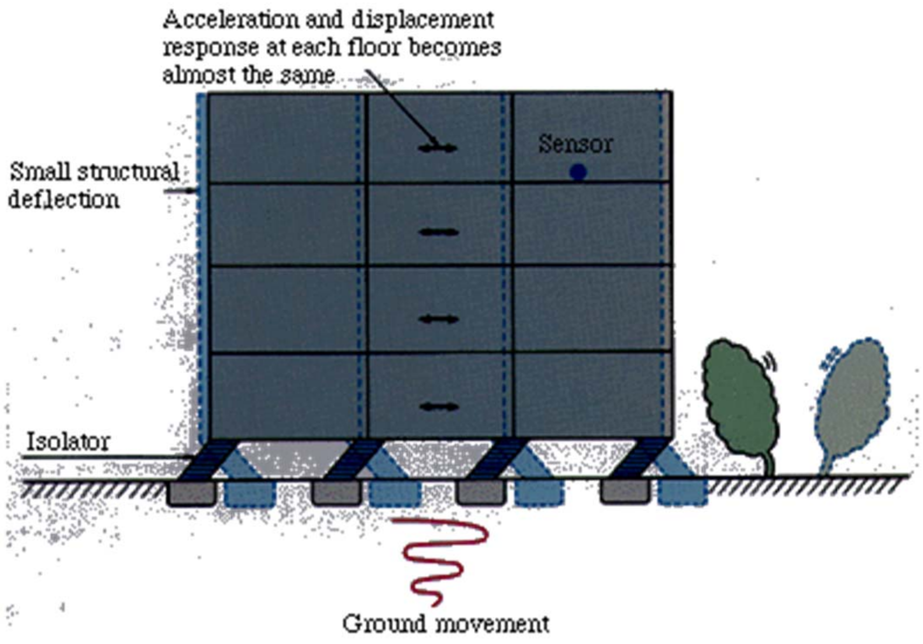
Vibraciones induicidas no controladas, producen catástrofes:

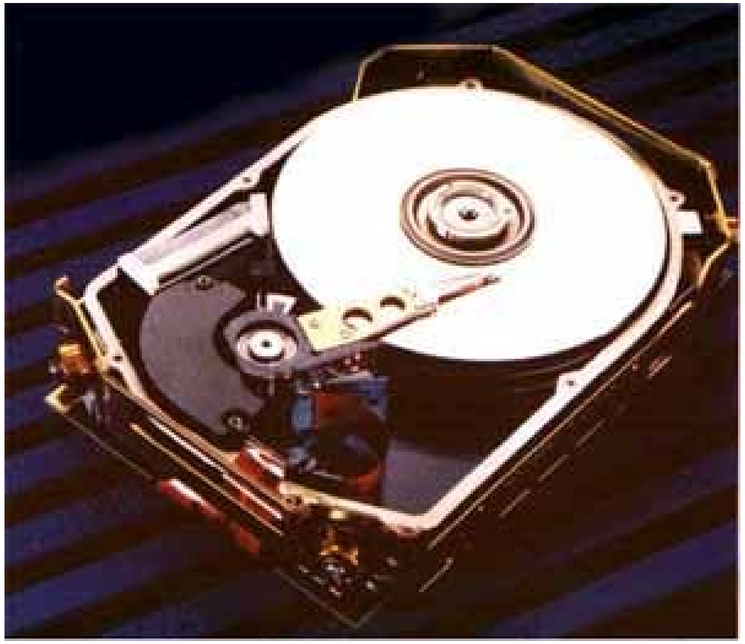
Kobe, Japón 1995

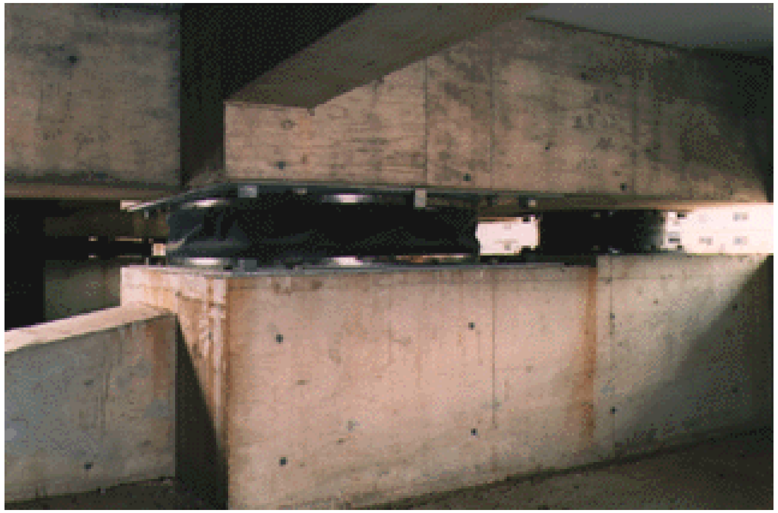
Sichuan Province, China, 2008

Necesidad de controlar y aislar las vibraciones







Oscilaciones amortiguadas

Las **oscilaciones amortiguadas** aparecen en un sistema físico cuando tenemos en cuenta las fuerzas de fricción. Desde un punto de vista energético, cuando tenemos en cuenta las fuerzas disipativas que tienen lugar en el sistema.

Un caso importante de fuerzas disipativas son las que se modelizan mediante la expresión

$$\boxed{\vec{F} = -b\,\vec{\mathrm{v}}}$$

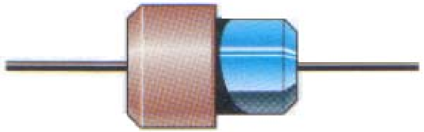
donde el signo (-) indica que la fuerza de rozamiento y el vector velocidad del amortiguador son opuestos. El coeficiente ***b***, se denomina **coeficiente de amortiguamiento viscoso**. En el S.I su unidad es $\mathbf{N\ m\ s^{-1}}$, en el U.S. Customary system es: $\mathbf{lb\ s\ ft^{-1}}$.

Amortiguador viscoso lineal

El amortiguador viscoso tiene lugar de manera natural cuando sistemas mecánicos como el péndulo oscilan en un fluido, aire , agua, aceite...

Desde un punto de vista mecánico, El dispositivo está formado normalmente, por un émbolo que se mueva en el interior de un cilindro lleno de un fluido viscoso, de manera que el émbolo empuja al aire o fluido a través de un pequeño orificio - la fuerza necesaria para expulsar el líquido es aproximadamente proporcional a la velocidad del émbolo. Al movimiento del fluido se opone la acción del fluido.

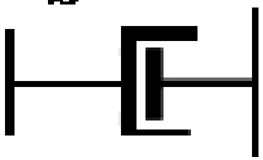
b



AIRPOT DASHPOT PERFORMANCE SPECIFICATIONS

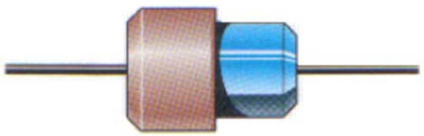
http://www.airpot.com/html/dashpot.html

b



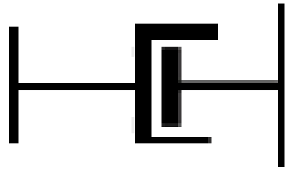
Amortiguación por empuje frente a amortiguación por tracción

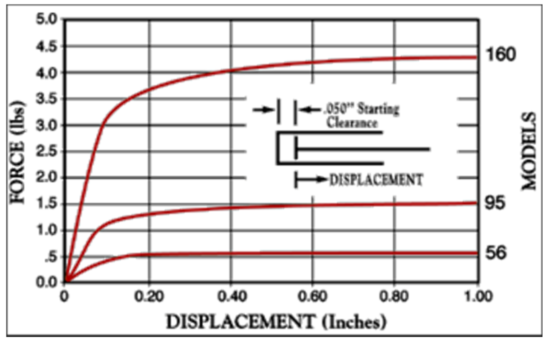
b



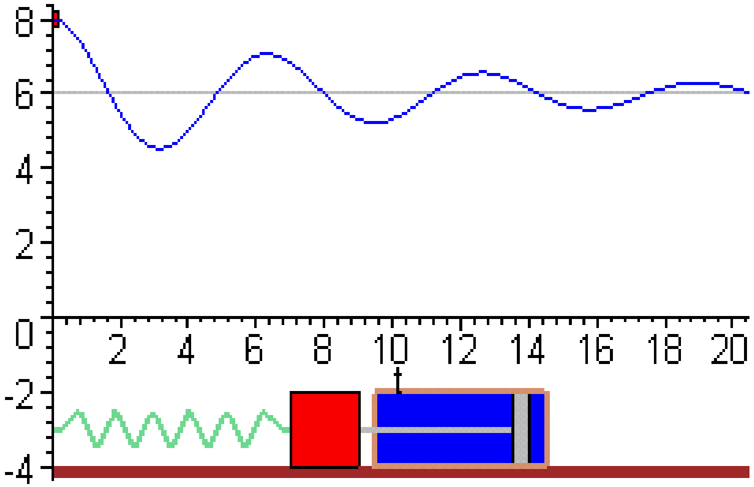
Dashpot

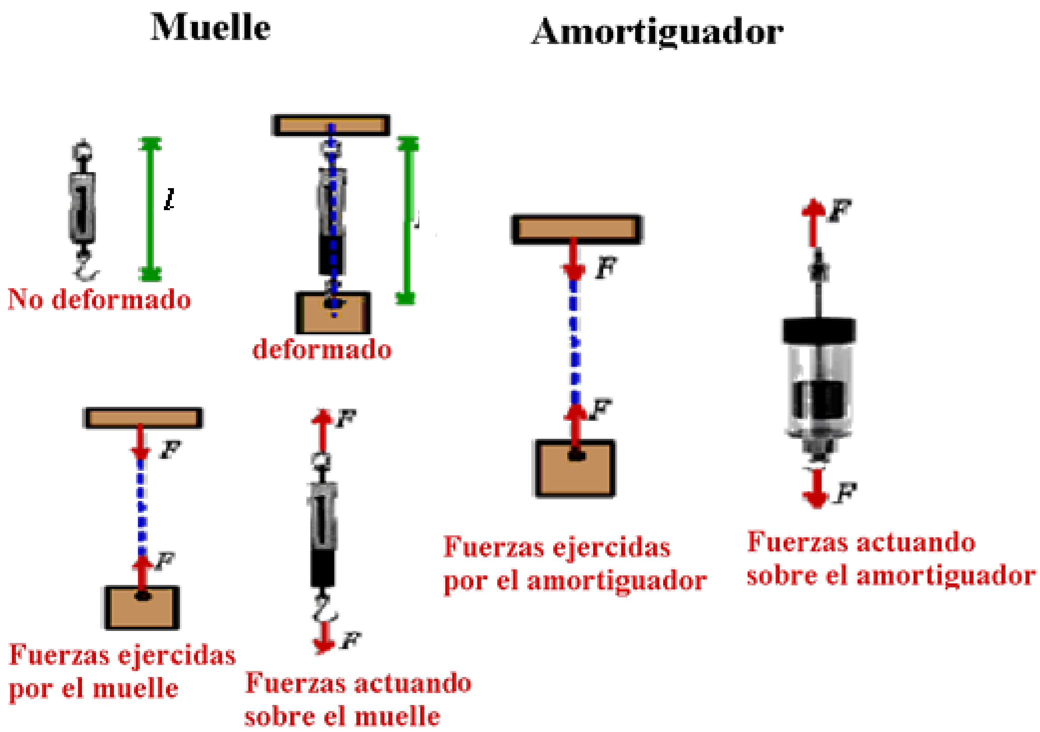
b





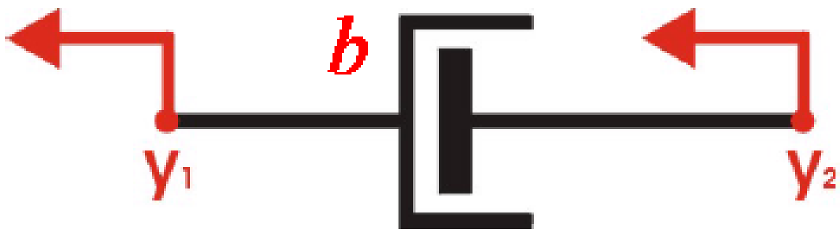
Muelles versus amortiguadores





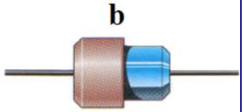
Un amortiguador es como un resorte, salvo que *ejerce fuerzas que son proporcionales a la velocidad relativa* de sus dos extremos, en lugar del desplazamiento relativo de los mismos, caso del muelle. El dispositivo es muy útil para amortiguar las vibraciones. El dispositivo está formado, normalmente, por un émbolo que empuja a un fluido, aire, aceite…, a través de un orificio pequeño - la fuerza necesaria para expulsar el líquido es aproximadamente proporcional a la velocidad del émbolo

Muelles versus amortiguadores

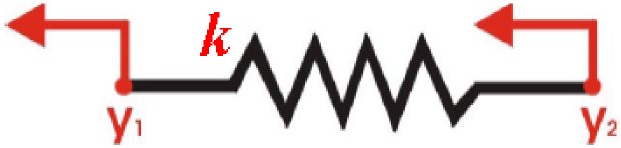
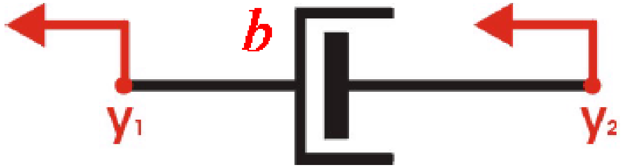
Elemento	Modelo
 Resorte	$F_k = k\,(y_2 - y_1)$
 Amortiguador	$F_b = b\,\frac{d}{dt}(y_2 - y_1)$

Un amortiguador es como un resorte, salvo que *ejerce fuerzas que son proporcionales a la velocidad relativa* de sus dos extremos.

Muelles versus amortiguadores



$\vec{F} = -b\boxed{\vec{v}}$

Elemento	Modelo
 Resorte	$F_k = k\,(y_2 - y_1)$
 Amortiguador	$F_b = b\,\dfrac{d}{dt}(y_2 - y_1)$

$$F_k = k\,(y_2(t) - y_1(t)) = k\,L(t)$$

$$F_b = b\,\frac{d}{dt}(y_2(t) - y_1(t)) = b\boxed{\frac{d}{dt}L(t)}$$

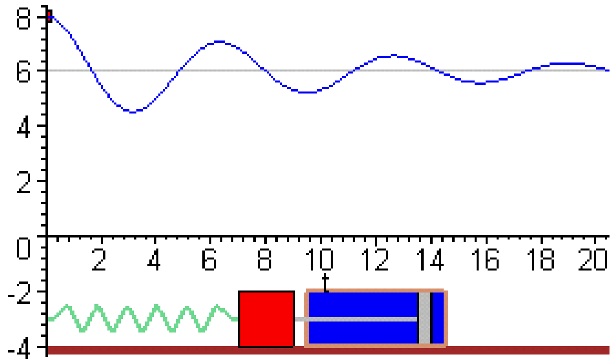
El amortiguador se comporta como una combinación de un amortiguador y un muelle, conectados extremo a extremo. Hay que tener en cuenta que cuando se dibuja un diagrama de sólido, que muestra las fuerzas ejercidas por un amortiguador, <u>siempre se debe asumir que la longitud del amortiguador es cada vez mayor, de modo que las fuerzas ejercidas por los extremos del amortiguador son *atractivas*</u>.

Oscilaciones amortiguadas. Modelo físico

Supongamos un sistema formado por una masa m unida a un muelle ideal horizontal. Este sistema realiza un m.a.s. Vamos a modificar su dinámica introduciendo un amortiguador, modelizable con la expresión:

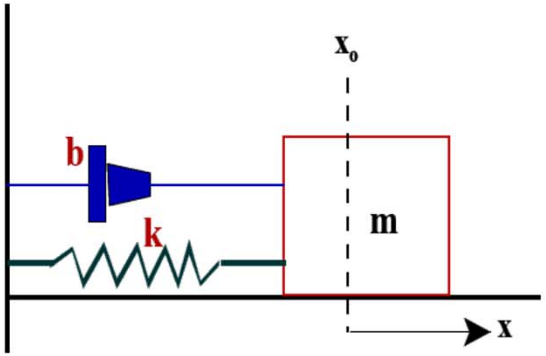
$$\vec{F} = -b\,\vec{\mathrm{v}}$$

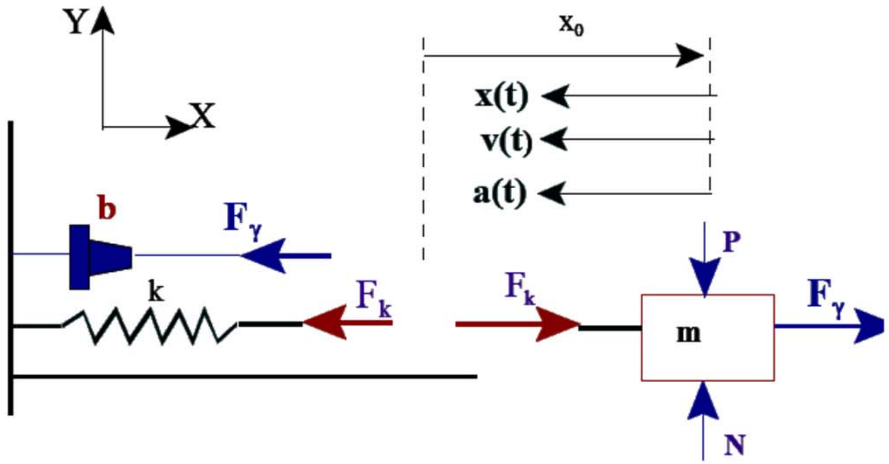
Aplicando las leyes de Newton a la partícula de masa m se obtiene la **ecuación diferencial que caracteriza una oscilación amortiguada**.



$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0}$$

Representante canónico de las O.A.





$$\text{Eje Y)}\quad N - mg = 0$$

$$\text{Eje X)}\quad b\,\dot{x}(t) + k\,x(t) = -m\,\ddot{x}(t)$$

$$w^2 \equiv \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) = 0$$

$$\gamma \equiv \frac{b}{2m}$$

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + w^2 x(t) = 0$$

Solución de la ecuación diferencial

Hemos visto que el problema de un sistema físico, sometido a una fuerza amortiguadora, se caracteriza por los parámetros, m (masa del sistema), k (constante que nos indica que el sistema, si no estuviera sometido a amortiguamiento, realizaría un m.a.s) y b (constante de amortiguamiento del sistema). Estos parámetros físicos se traducen en los parámetros de la ecuación diferencial (ω_0, γ, ω_γ).

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + w^2{}_0\, x(t) = 0$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Frecuencia natural del sistema

Física (m, k, b) → Módelo (ω_0, γ, ω_γ) (rad/s)

$$\omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Método para encontrar la solución

Aplicamos el método de resolución de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes. La solución es proporcional a una combinación de exponenciales que dependen del tiempo y parámetro λ. Se sustituye este candidato a solución en la ecuación diferencial y se obtiene una ecuación algebraica para la incógnita λ .

$$x(t) \propto e^{\lambda t}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \\ \lambda = -\gamma \pm i\omega_\gamma \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

De las condiciones iniciales de posición y velocidad, se obtiene para cada problema particular, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para determinar C1 y C2.

$$\left.\begin{array}{l} x(0) = C_1 + C_2 \\ \dot{x}(0) = C_1\lambda_1 + C_2\lambda_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad C_1, C_2$$

Clasificación de soluciones

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = 0$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Oscilación amortiguada
Solución general

Amortiguamiento Subcrítico	Amortiguamiento Crítico	Amortiguamiento Supercrítico
$\omega_0^2 > \gamma^2$ $\omega_\gamma \in \mathbb{R}$	$\omega_0^2 = \gamma^2$ $\omega_\gamma = 0$	$\omega_0^2 < \gamma^2$ $\omega_\gamma \in C$

Amortiguamiento subcrítico

$\omega_0^2 > \gamma^2$
$\omega_\gamma \in \Re$

En esta categoría se encuentran las oscilaciones donde la fuerza de amortiguamiento no es la dominante.

$$\boxed{x(t) = C\, e^{-\gamma t}\ Sen(\omega_\gamma t + \delta)}$$

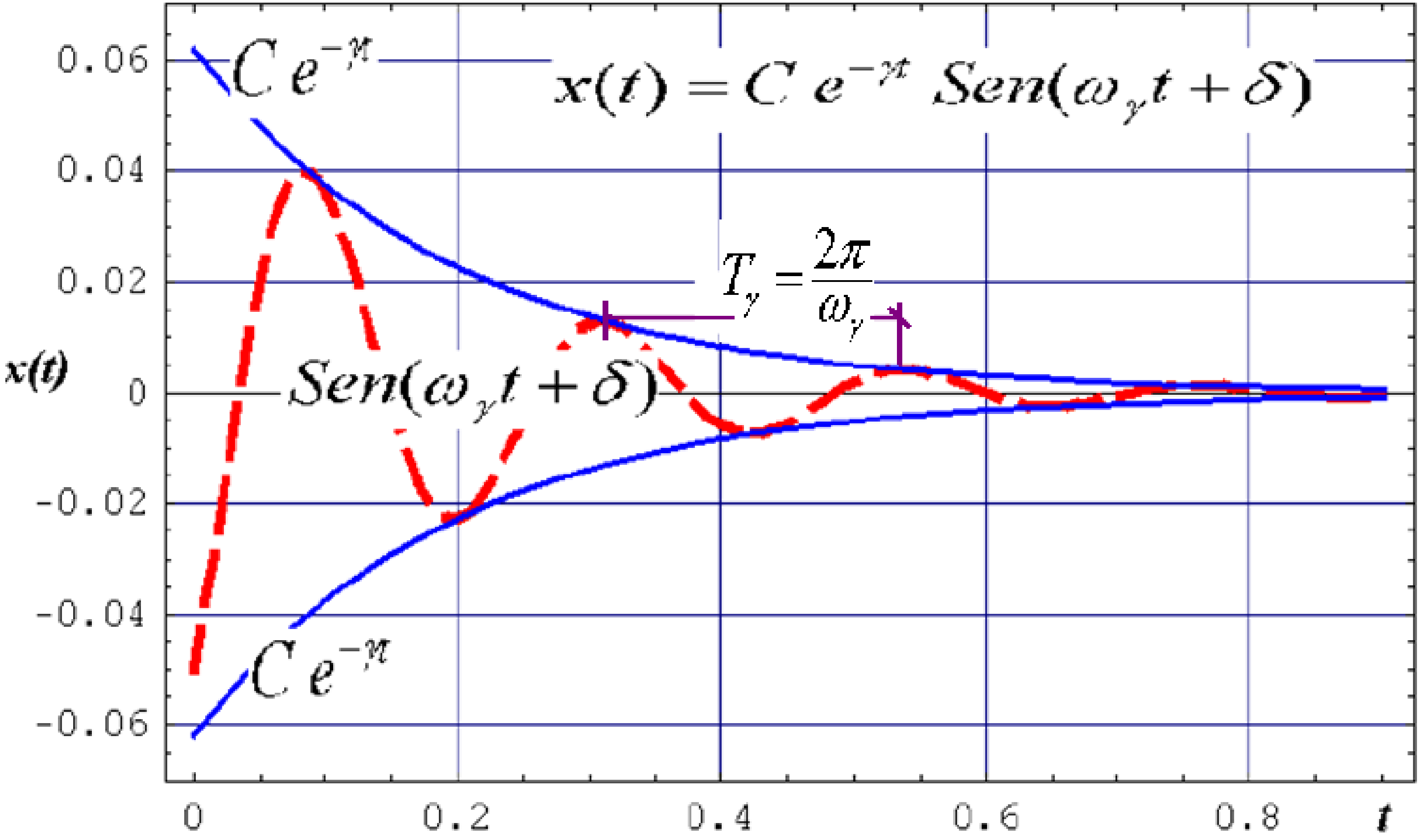
Donde las constantes C y δ, se determinan a partir de las condiciones iniciales, x_o y v_o:

$$\begin{cases} C^2 = x_0^2 + \dfrac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega_\gamma^2} \\ \tan\delta = \dfrac{\omega_\gamma x_0}{v_0 + \gamma x_0} \end{cases}$$

El movimiento descrito por esta solución consiste en una oscilación de frecuencia ω_γ con amplitud no constante, $C(t) = C\, e^{-\gamma t}$, que decrece exponencialmente con el tiempo. El período de la oscilación es:

$$T_\gamma = \frac{2\pi}{\omega_\gamma}$$

Amortiguamiento subcrítico



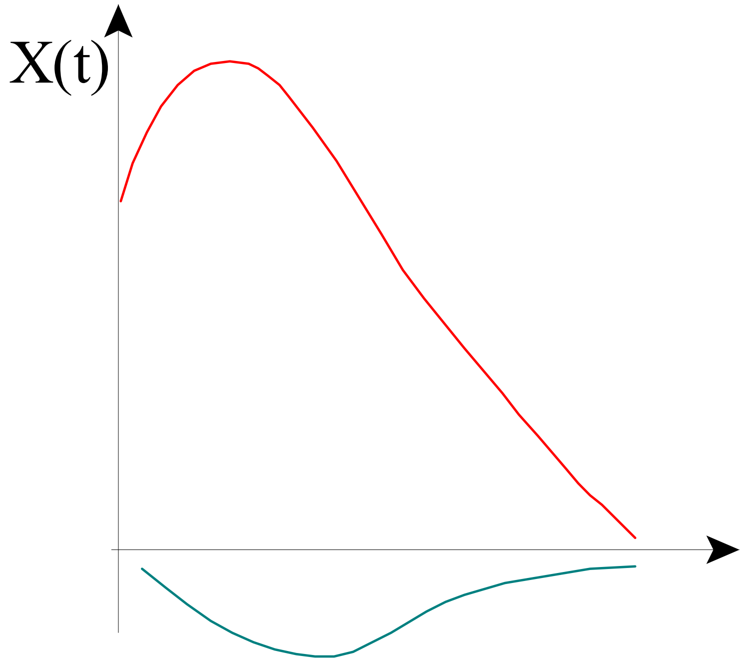
Oscilación amortiguada subcrítica. La linea a trazos, rojo, nos la la osiclación del seno con frecuencia angular ω_γ, y la linea azul, nos la variación de la amplitud de la oscilación con el tiempo.

Amortiguamiento supercrítico

$\omega_0^2 < \gamma^2$
$\omega_\gamma \in C$

λ_1 y λ_2 son reales, de forma que la posición x(t) no es una combinación de exponenciales con exponentes imaginarios, el sistema no oscila. La viscosidad es tan alta que domina sobre las oscilaciones.

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

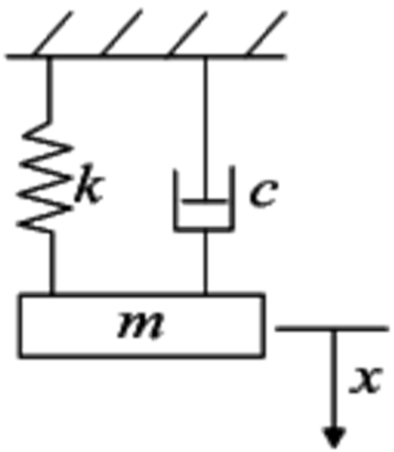


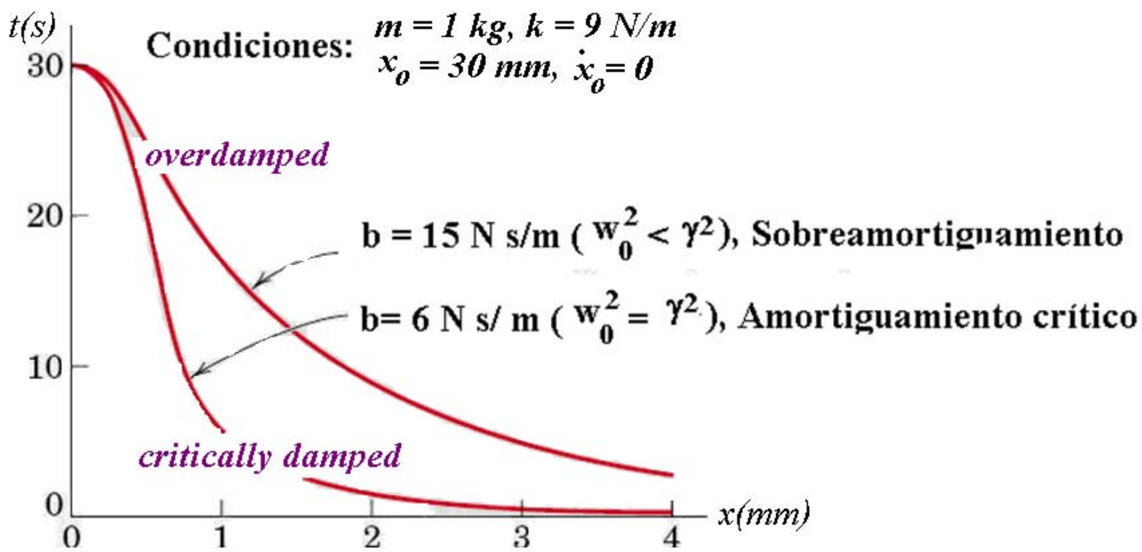
Amortiguamiento crítico

$$\omega_0^2 = \gamma^2$$
$$\omega_\gamma = 0$$
$$\boxed{x(t) = (C_1 + C_2)e^{-\gamma t}}$$

La situación de amortiguamiento crítico mide la menor cantidad de amortiguamiento necesaria para que el sistema no oscile, Es el punto que separa el movimiento oscilatorio amortiguado del sistema del movimiento no oscilatorio, o aperiódico.

La solución anterior no es la más general posible, la solución más general es: $x(t) = (A_1+A_2\, t)\, e^{-\gamma t}$, donde observamos que la solución crítica es una exponencial decreciente, no hay oscilación.



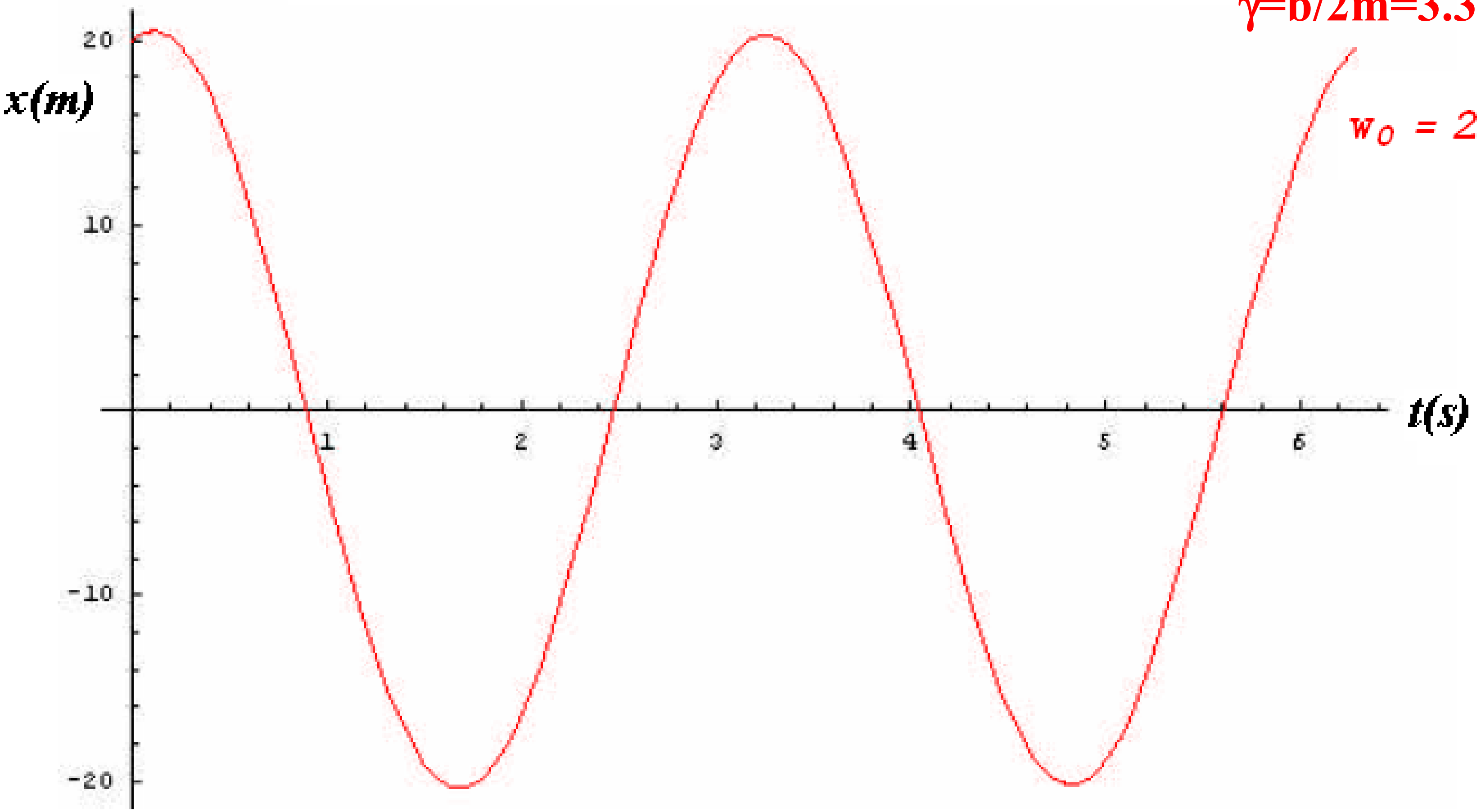


Ejemplo de oscilación amortiguada

Oscilación muy debilmente amortiguada : $b = 0.01$, $m = 15$, $k = 60$

$\omega^2_o = k/m = 4$

$\gamma = b/2m = 3.3 \cdot 10^{-4}$



$w_0 = 2\,\frac{rad}{s}$

La oscilación del sistema, prácticamente no se diferencia de un *m.a.s*

Ejemplo de oscilación amortiguada

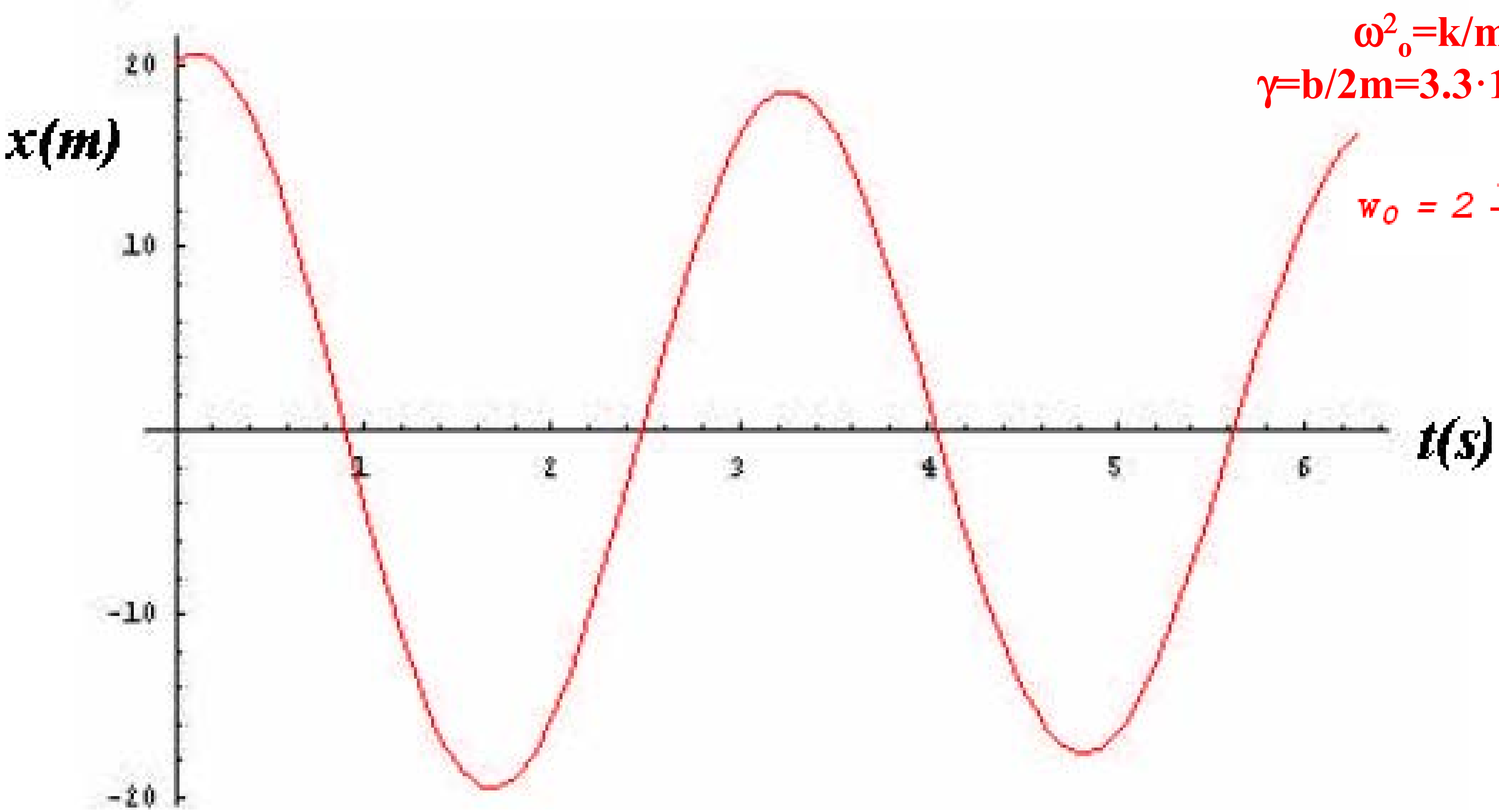
Oscilación muy debílmente amortiguada : $b = 0.01,\ m = 15,\ k = 60$

Oscilación debílmente amortiguada : $\boxed{b = 1,}\ m = 15,\ k = 60$

$\omega^2_o = k/m = 4$

$\gamma = b/2m = 3.3 \cdot 10^{-2}$

$w_0 = 2\ \frac{rad}{s}$



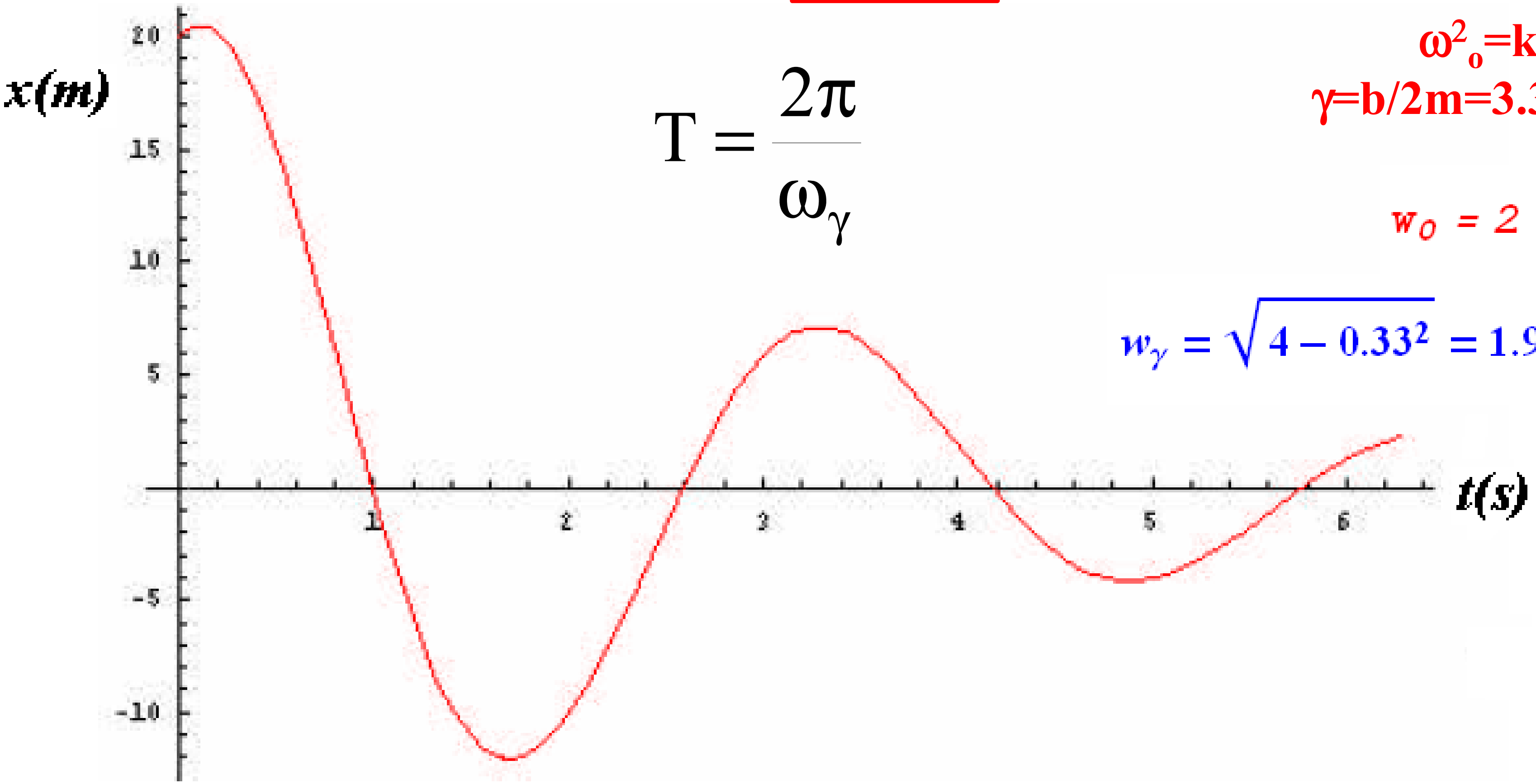
La oscilación del sistema comienza *a* diferenciarse de un *m.a.s*

Ejemplo de oscilación amortiguada

Oscilación muy debílmente amortiguada : $b = 0.01, \; m = 15, \; k = 60$

Oscilación debílmente amortiguada : $b = 1, \; m = 15, \; k = 60$

Oscilación amortiguada : $\boxed{b = 10,} \; m = 15, \; k = 60$



$$T = \frac{2\pi}{\omega_\gamma}$$

$\omega^2_o = k/m = 4$

$\gamma = b/2m = 3.3 \cdot 10^{-1}$

$$w_0 = 2 \, \frac{rad}{s}$$

$$w_\gamma = \sqrt{4 - 0.33^2} = 1.97 \, \frac{\text{rad}}{s}$$

La oscilación del sistema se diferencia de un m.a.s

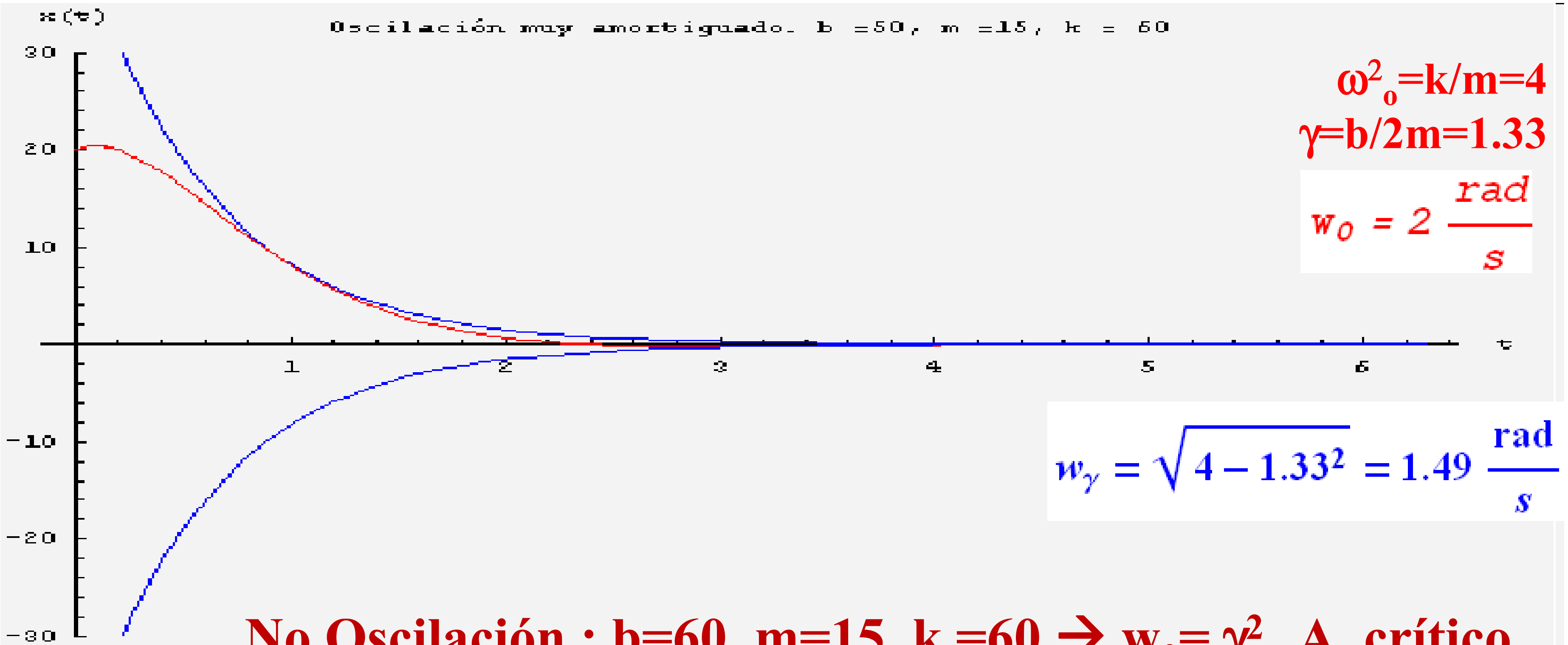
Ejemplo de oscilación amortiguada

Oscilación muy debílmente amortiguada : $b = 0.01,\ m = 15,\ k = 60$

Oscilación debílmente amortiguada : $b = 1,\ m = 15,\ k = 60$

Oscilación amortiguada : $b = 10,\ m = 15,\ k = 60$

Oscilación muyamortiguada : $\boxed{b=40}$, m=15, k =60



$\omega^2_o = k/m = 4$

$\gamma = b/2m = 1.33$

$$w_o = 2\ \frac{rad}{s}$$

$$w_\gamma = \sqrt{4 - 1.33^2} = 1.49\ \frac{rad}{s}$$

No Oscilación : b=60, m=15, k =60 → $w_0 = \gamma^2$ A. crítico

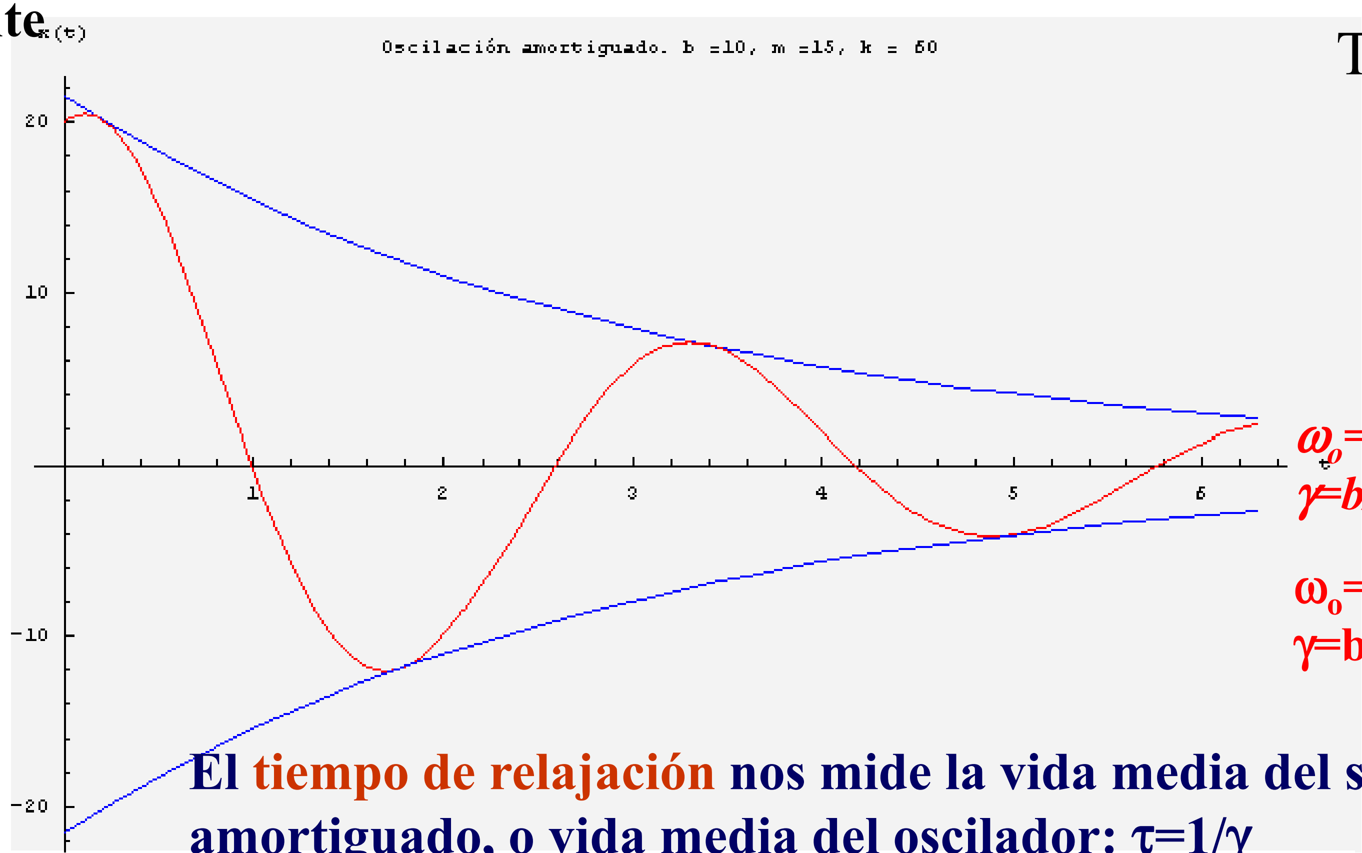
Ejemplo de oscilación amortiguada subcrítica

Las curvas en azul nos dan la variación de la amplitud $C(t) = C\,e^{-gt}$

Las curvas en rojo nos dan la oscilación sinusoidal $Sen(\omega_\gamma t + \delta)$

La separación temporal entre dos máximos nos da el periodo de la oscilación, que es constante

$$T = \frac{2\pi}{\omega_\gamma}$$



$\omega_o = k/m = 4$
$\gamma = b/2m = 1.3$

$\omega_o = k/m = 4$
$\gamma = b/2m = 1.6$

El tiempo de relajación nos mide la vida media del sistema amortiguado, o vida media del oscilador: $\tau = 1/\gamma$

Caracterización amortiguamiento subcrítico

- Tiempo de relajación: τ
  - Medida de la vida media del oscilador

$$\tau = \frac{1}{\gamma}$$

- Decremento logarítmico en amplitud: Δ
  - Mide el decrecimiento en la amplitud

$$\Delta \equiv \frac{T_\gamma}{\tau} = 2\pi \frac{\gamma}{w_\gamma}$$

- Determinación **experimental** de los parámetros del sistema
  - Decremento logarítmico (Δ)

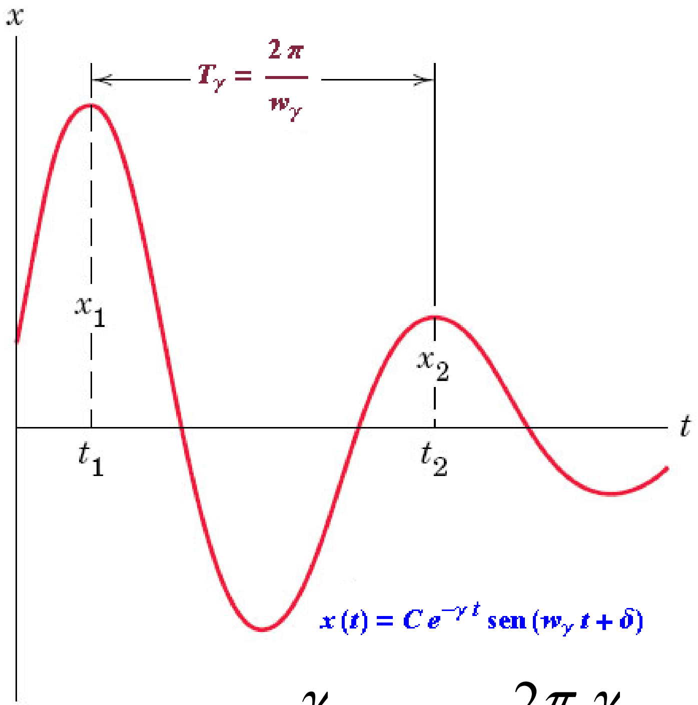
$$\Delta \equiv \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T_\gamma)}\right)$$

  - Coeficiente de amortiguación (ξ)

$$\xi \equiv \frac{\gamma}{w_0} = \frac{\Delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Delta^2}}$$

Determinación experimental de ξ

Mirar dos valores de picos sucesivos, a los tiempos t_1 and $t_2=t_1+T_\gamma$



$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{\cancel{C}\, e^{-\gamma t_1}\, sen(w_\gamma t_1 + \delta)}{\cancel{C}\, e^{-\gamma t_2}\, sen(w_\gamma t_2 + \delta)}$$

$$sen(w_\gamma t_2 + \delta) = sen(w_\gamma t_1 + 2\pi + \delta) = sen(w_\gamma t_1 + \delta)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\gamma t_1}}{e^{-\gamma (t_1 + T_\gamma)}} = e^{\gamma T_\gamma}$$

"Decremento logarítmico"

$$\Rightarrow \Delta = \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln e^{\gamma T_\gamma} = \gamma T_\gamma = 2\pi \frac{\gamma}{w_\gamma}$$

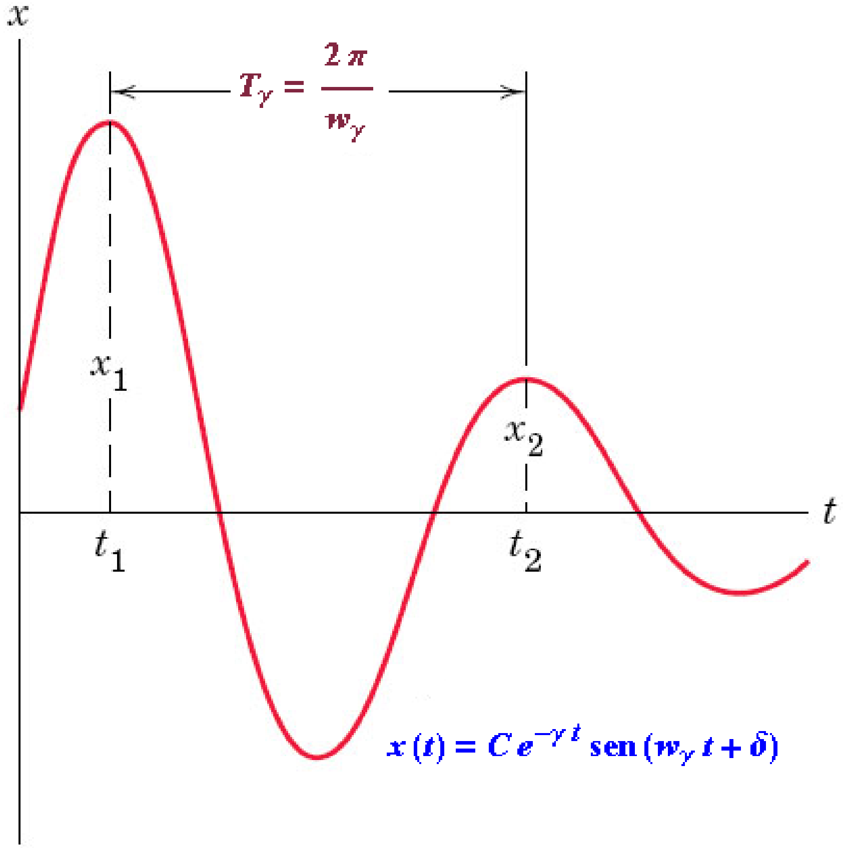
$$\Rightarrow \Delta = 2\pi \frac{\gamma}{w_\gamma} = \frac{2\pi\,\gamma}{w_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\gamma}{w_0}\right)^2}} = \frac{2\pi\,\gamma}{w_0\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\,\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \xi \equiv \frac{\gamma}{w_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\Delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Delta^2}}}$$

$$\Rightarrow \omega_\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{\omega_\gamma}{\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi}{T_\gamma\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\boxed{w_0 = \frac{2\pi}{T_\gamma\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Determinación experimental de ξ



$$\boxed{\xi = \frac{\Delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Delta^2}}}$$

$$\xi \equiv \frac{\gamma}{w_0}$$

$$\xi < 1 \Longrightarrow subcrítico$$
$$\xi = 1 \Longrightarrow crítico$$
$$\xi > 1 \Longrightarrow Supercrítico$$

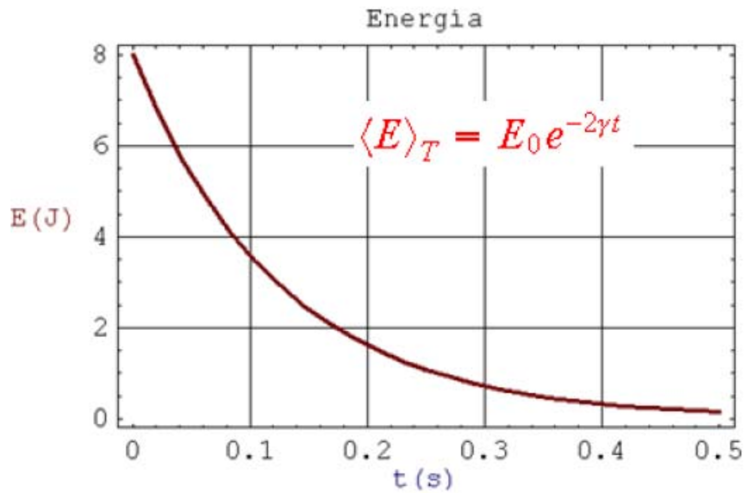
Amortiguamiento subcrítico: análisis energético

Proposición 1. La energía promedio por período de un oscilador armónico, es igual a:

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Proposición 2. En el caso de oscilaciones amortiguadas con amortiguamiento subcrítico el oscilador amortiguado queda caracterizado por un decremento exponencial de la energía total.

$$E(t) = E_0 \, e^{-2\gamma t}$$



Proposición 3. 2γ es el intervalo de tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor e^{-1}

Factor de calidad

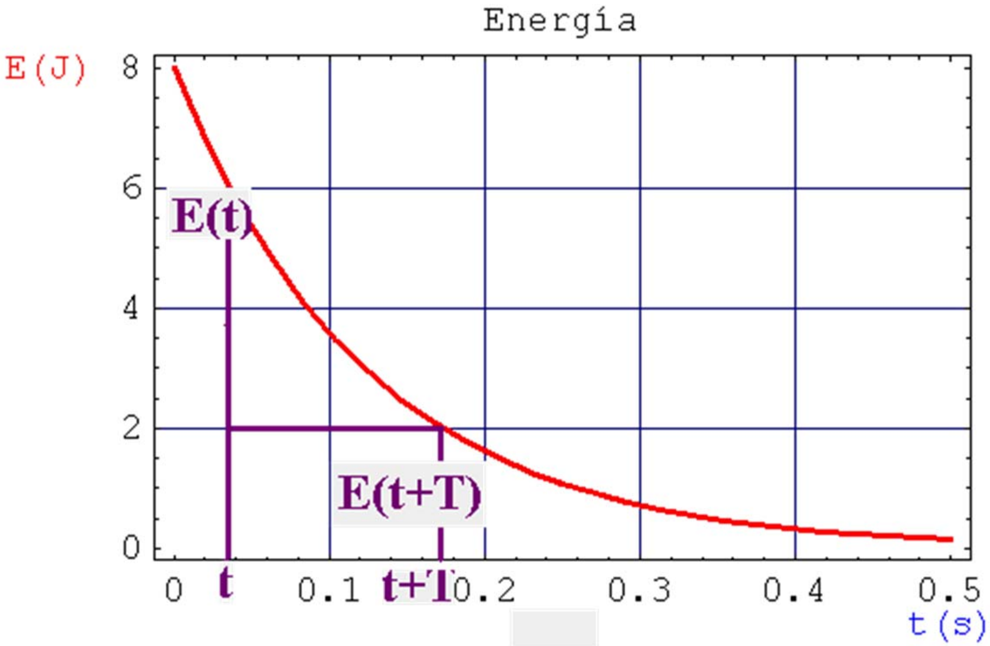
Se define el **factor de calidad (Q)** como un parámetro que nos mide la disipación de energía en un oscilador amortiguado. Conforme Q sea mayor la disipación de energía disminuye. La relación entre Q y la energía viene dado por

$$\boxed{Q = \frac{1}{2}\frac{\omega_0}{\gamma}}$$

<u>Proposición 4</u>. El factor de calidad esta relacionado con la energía mediante la ecuación:

$$Q = 2\pi \frac{E_{almacenada}}{E_{perdida-período}}$$

TUTV3-1 Un péndulo simple pierde 1/1000 de su energía durante cada oscilación. ¿Cuál es su factor de calidad?



$$E(t)-E(t+T)=\frac{1}{1000}E(t)$$

$$\frac{\Delta E}{E}=\frac{\left|E(t+T)-E(t)\right|}{E(t)}=\frac{1}{1000}$$

$$Q=2\pi\frac{E}{\Delta E}=2\pi\,1000=6283$$

Estrategia para la resolución de problemas

Dibujar D.S.L.

$$\xi \equiv \frac{\gamma}{\omega_0}$$

Obtener la E.M

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\dot{x} + kx = 0$$

Obtener la ecuación canónica:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Identificar parámetros ω_0 and ζ :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \boxed{\frac{b}{m}}\dot{x} + \boxed{\frac{k}{m}}x = 0$$

$$\frac{b}{m} \rightarrow 2\zeta\omega_0 \qquad \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0^2$$

Soluciones para ζ:

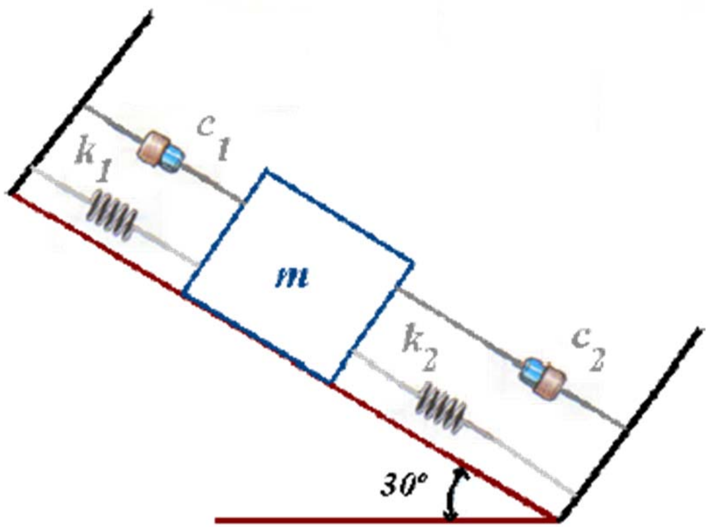
"Subamortiguado"": $0 < \zeta < 1 \quad x(t) = Ce^{-\zeta\omega_0 t}\sin(\omega_0 t + \delta)$

"Crítico"": $\zeta = 1 \quad x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_0 t}$

"Sobreamortiguamiento": $\zeta > 1 \quad x(t) = C_1 e^{-|\lambda_1| t} + C_2 e^{-|\lambda_2| t}$

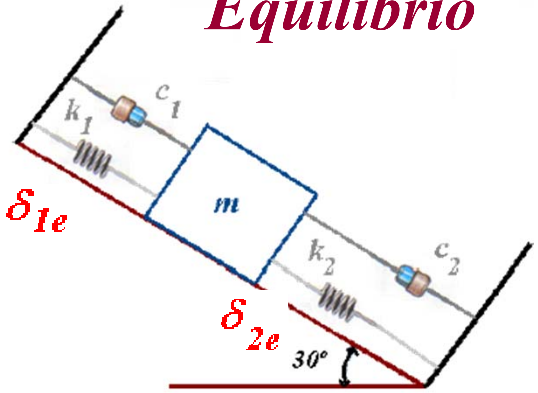
Aplicar las condiciones iniciales para determinar constantes

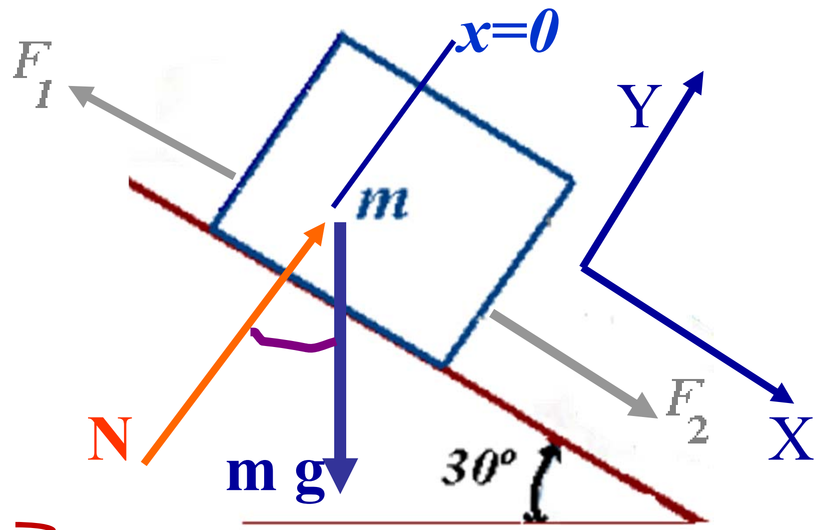
TUTV3-2. Un bloque de 5 kg se desliza por un plano inclinado sin rozamiento, según se indica en la figura. Si se desplaza el bloque por el plano inclinado 50 mm hacia arriba a partir de su posición de equilibrio y se suelta con una velocidad inicial de 1,25 m/s hacia abajo en t = 0. $k_1=k_2=2$ kN/m; $b_1=b_2=25$ Ns/m. Obtener:



1. Período, pulsación y frecuencia de la vibración del sistema.
2. La expresión x(t) para la masa.
3. El tiempo para el cual la amplitud se haya reducido 1% de su valor inicial.

Equilibrio

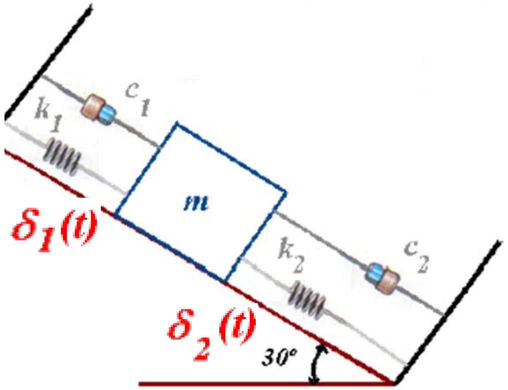


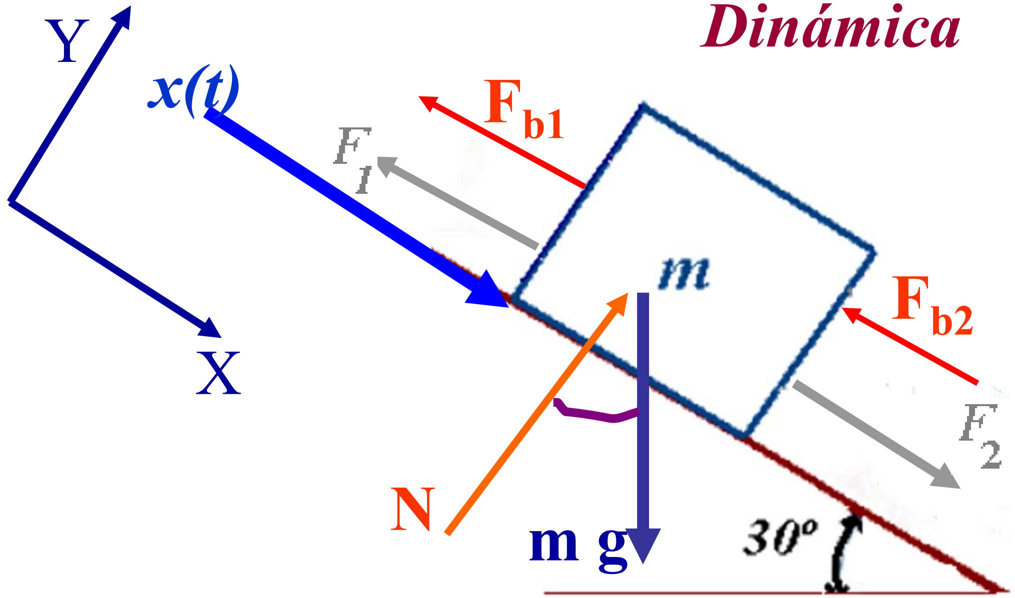


$$\left.\begin{aligned} N - mg\cos\theta &= 0 \\ F_{k_2} - F_{k_1} + mg\,sen\theta &= 0 \\ F_{k_1} &= k_1\delta_{e1} \\ F_{k_2} &= k_2\delta_{e2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{k_2\,\delta_{e2} - k_1\,\delta_{e1} + mg\,sen\theta = 0}$$ **L.E**

Dinámica

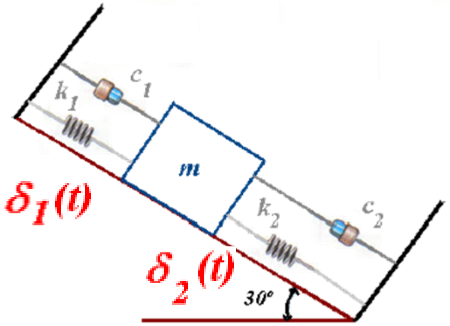




Equilibrio L.E

$$k_2\,\delta_{e2}-k_1\,\delta_{e1}+mg\,sen\theta=0$$

$$\left\{\begin{aligned}
-F_{k_1}+F_{k_2}-F_{b_1}-F_{b_2}+mg\,sen\theta &= m\ddot{x}(t)\\
N-mg\cos\theta &= 0\\
\delta_1(t)=\delta_{e1}+x(t) \qquad\qquad & F_{k_1}=k_1\delta_1(t)\\
& F_{k_2}=k_2\delta_2(t)\\
\delta_2(t)=\delta_{e2}-x(t) \qquad\qquad & F_{b_1}=b_1\dot{x}(t)\\
& F_{b_2}=b_2\dot{x}(t)
\end{aligned}\right.$$



Equilibrio ⇒

$$\boxed{k_2\,\delta_{e2} - k_1\,\delta_{e1} + mg\,sen\theta = 0}$$

Dinámica

$$-k_1\,(\delta_{e1} + x(t)) + k_2\,(\delta_{e2} - x(t)) - (b_1 + b_2)\dot{x}(t) + mg\,sen\theta = m\ddot{x}(t)$$

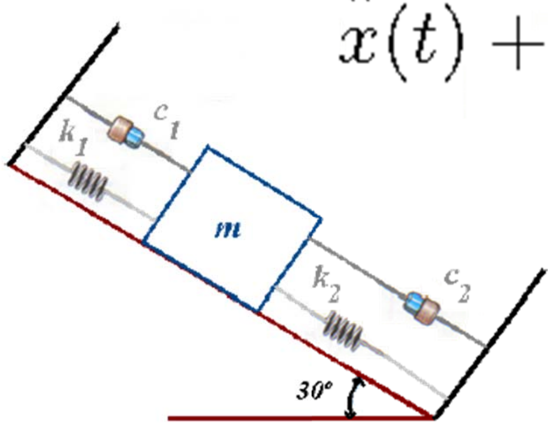
$$\boxed{-k_1\,\delta_{e1} + k_2\,\delta_{e2} + mg\,sen\theta} - (k_1 + k_2)\,x(t) - (b_1 + b_2)\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

L.E

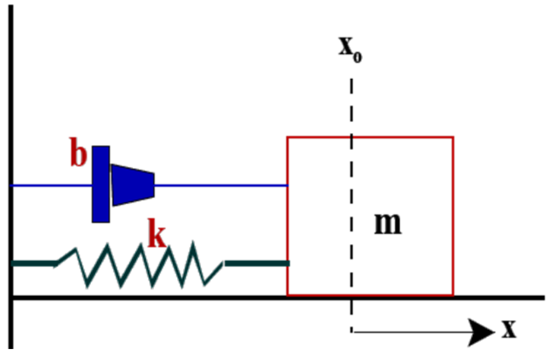
$$-(k_1 + k_2)\,x(t) - (b_1 + b_2)\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{\boxed{k_1 + k_2}}{m}x(t) + \frac{\boxed{b_1 + b_2}}{m}\dot{x}(t) = 0$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{\boxed{k_1 + k_2}}{m} x(t) + \frac{\boxed{b_1 + b_2}}{m} \dot{x}(t) = 0$$



$$w_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$



$b)$ *Veamos si el sistema oscila:*

$$w_0 = \sqrt{\frac{4000}{5}} = 20\sqrt{2}\,\frac{rad}{s} = 28{,}28\,\frac{rad}{s}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{50/9{,}81}{2\,83 + 250}} = 0{,}695\,s$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}695} = 1{,}44\,Hz$$

$$\gamma = \frac{b_1 + b_2}{2m} = 5\,\frac{rad}{s}$$

$$w_0 = 28{,}28\,\frac{rad}{s} > \gamma = 5\,\frac{rad}{s} \Longrightarrow \text{Oscila amortiguado}$$

Período, pulsación y frecuencia de la vibración del sistema.

$$w_\gamma = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{28{,}28^2 - 5^2} = 27{,}8\,\frac{rad}{s}$$

$$T = \frac{2\pi}{w_\gamma} = \frac{2\pi}{27{,}8} = 0{,}23s \qquad \nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}23} = 4{,}4\,Hz$$

La posición de m en todo instante de tiempo

$$x(t) = C_0\,e^{-\gamma t} sen(w_\gamma t + \delta)$$

$$x_0 = Posición\ inicial = -\frac{50}{1000} m$$

$$\dot{x}_0 = Velocidad\ inicial = +1{,}25\frac{m}{s}$$

$$C_0 = \frac{\sqrt{x_0^2\,w_\gamma^2 + (\dot{x}_0 + \gamma x_0)^2}}{w_\gamma} = \frac{\sqrt{(\frac{5}{100})^2\,(25{,}61)^2 + (1{,}25 + 5\,\frac{5}{100})^2}}{27{,}8} = 0{,}062\ \mathrm{m}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{w_\gamma\,x_0}{x_0\gamma + \dot{x}_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-27{,}8\ \frac{5}{100}}{\frac{5}{100}\ 5 + 1{,}25}\right) = -0.95\ rad$$

$$x(t) = 0.062\,e^{-5t}\,\mathrm{sen}\,(27.8\,t - 0.95)\,m$$

El tiempo para el cual la amplitud se haya reducido 1% de su valor inicial

$$x(t) \;=\; C_0\, e^{-\gamma\, t} sen(w_\gamma t + \delta)$$

$$x(t) \;=\; 0.062\, e^{-5\,t}\,\mathrm{sen}\,(27.8\,t - 0.95)\, m \qquad C(t) \;=\; C_0\, e^{-\gamma\, t} = 0.062\, e^{-5\,t}$$

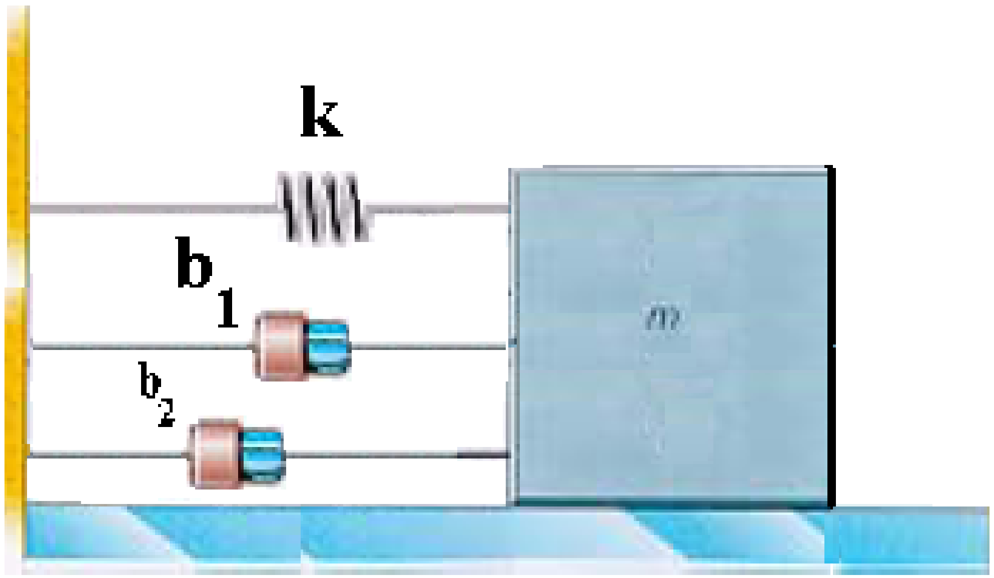
Buscamos el tiempo en el cual la amplitud se ha reducido en un 1%, es decir que su valor es 10^{-2} C_0= 10^{-2} 0.062, esto supone resolver la ecuación exponencial siguiente:

$$C(t) \;=\; \frac{1}{100}\, 0.062 \;=\; 0.062\, e^{-5\,t} \Longrightarrow \frac{1}{100} = e^{-5\,t}$$

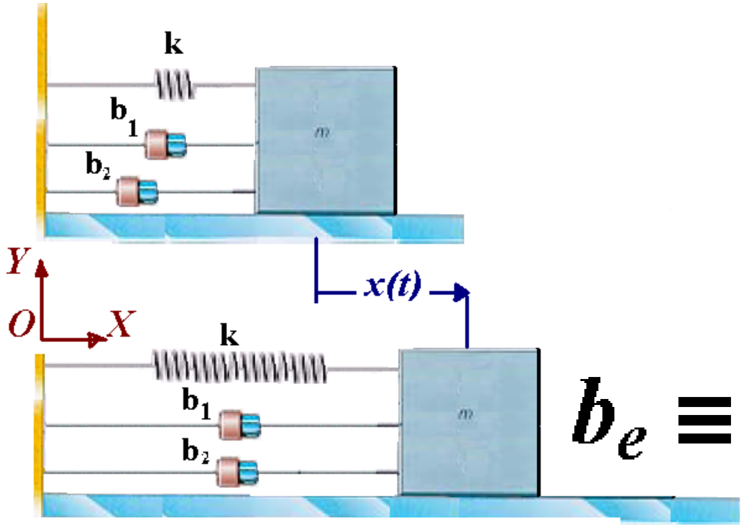
$$\ln\left(\frac{1}{100}\right) \;=\; -5t \Longrightarrow \qquad t \;=\; \frac{\ln\left(\frac{1}{100}\right)}{-5} = 0{,}92s$$

Por lo tanto 0.92 s después de iniciado el movimiento, la amplitud inicial, 0.062 m, ha decaido en un 1%.

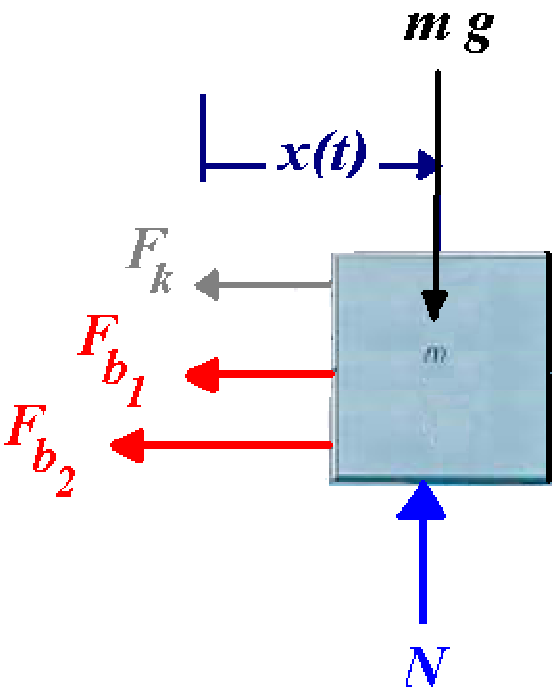
TUTV3-3. Demostrar que la asociación de N amortiguadores en paralelo, es equivalente a un solo amortiguador con una constante de amortiguamiento equivalente, a la suma de las constantes de amortiguamiento de cada amortiguador individual.



TUTV3-3



$$b_e \equiv (b_1 + b_2)$$



$$\left.\begin{aligned} N - m\,g &= 0 \\ -F_k - F_{b_1} - F_{b_2} &= m\,\ddot{x} \end{aligned}\right\}$$

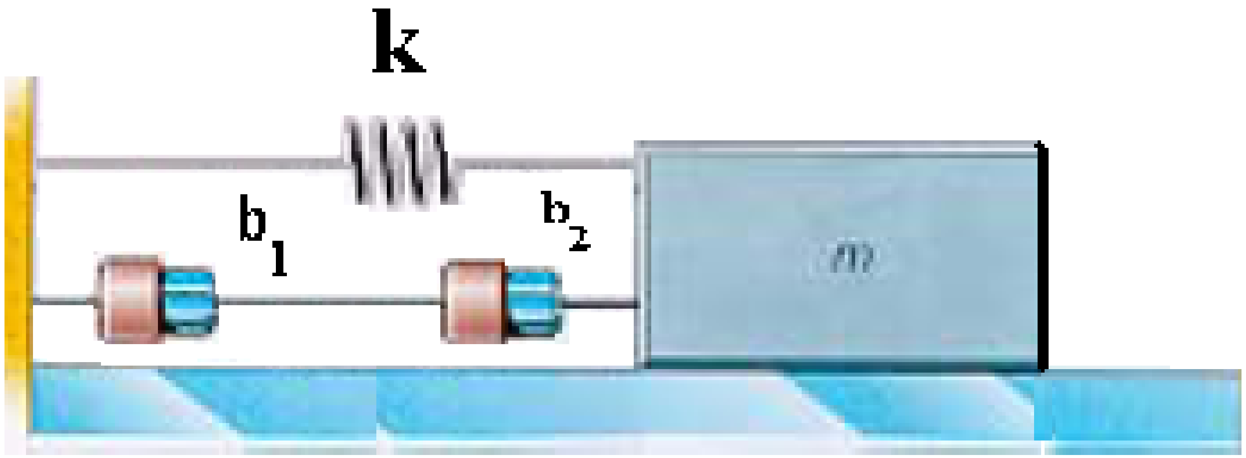
$$\left.\begin{aligned} F_k &= k\,x \\ F_{b_1} &= b_1\,\dot{x} \\ F_{b_2} &= b_2\,\dot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

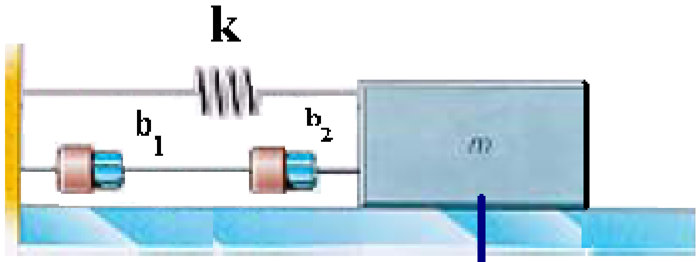
$$-k\,x - (b_1 + b_2) = m\,\ddot{x}$$

$$m\,\ddot{x} + \boxed{(b_1 + b_2)}\,\dot{x} + k = 0$$

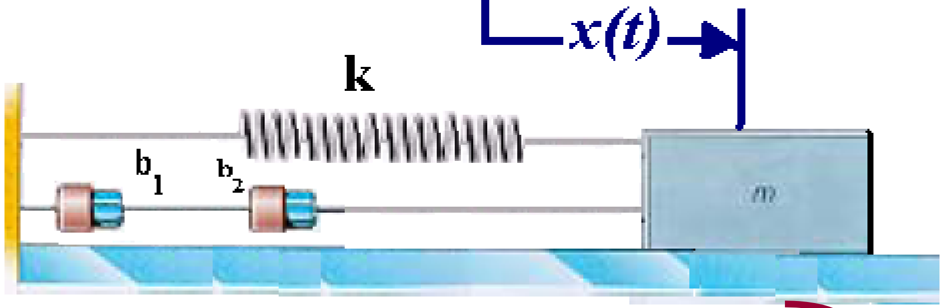
$$\ddot{x} + \frac{b_e}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m} = 0$$

TUTV3-4. Demostrar que la asociación de N amortiguadores en serie, es equivalente a un solo amortiguador con una constante de amortiguamiento equivalente, cuya inversa es la suma de las inversas de las constantes de amortiguamiento, de cada amortiguador individual.





$$\left.\begin{aligned} N - m\,g &= 0 \\ -F_k - F_{b_2} &= m\,\ddot{x} \end{aligned}\right\}$$

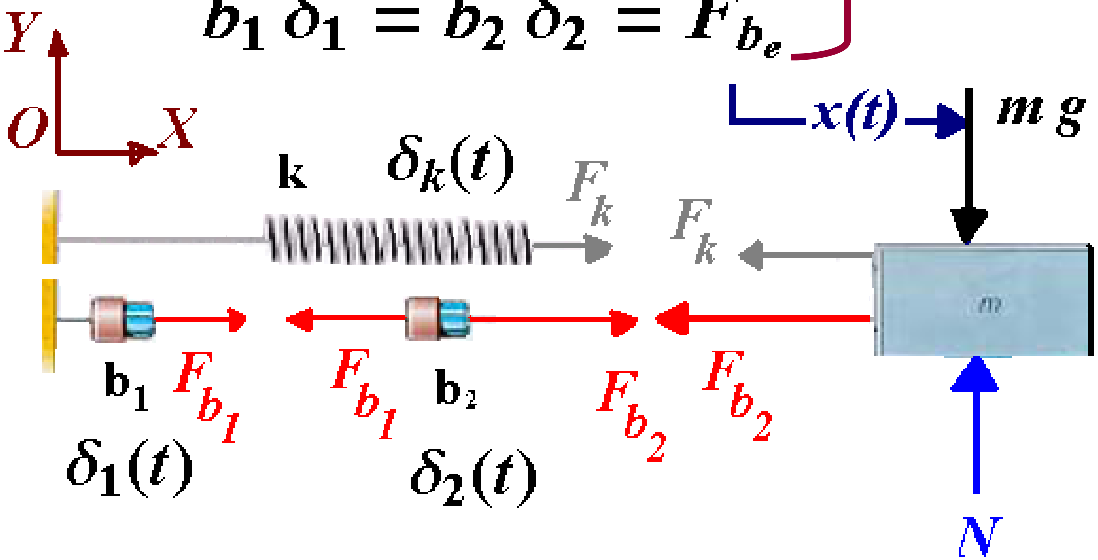


$$\boxed{-F_{b_1} + F_{b_2} = 0}$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_k(t) &= x(t) \\ \delta_1(t) + \delta_2(t) &= x(t) \end{aligned}\right\}$$

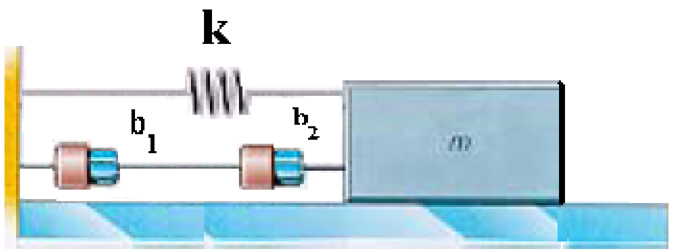
$$\left.\begin{aligned} F_{b_1} = F_{b_2} &= F_{b_e} \\ b_1\,\dot{\delta}_1 = b_2\,\dot{\delta}_2 &= F_{b_e} \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2 = \dot{x}}$$



$$\dot{\delta}_1 = \frac{F_{b_e}}{b_1} \qquad \dot{\delta}_2 = \frac{F_{b_e}}{b_2}$$

$$F_{b_e}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right) = \dot{x}$$



$$\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_2 = \dot{x}$$

$$\dot{\delta}_1 = \frac{F_{b_e}}{b_1} \quad \dot{\delta}_2 = \frac{F_{b_e}}{b_2}$$

$$F_{b_e}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right) = \dot{x} \longrightarrow F_{b_e} = \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)^{-1} \dot{x} \; = b_e \dot{x}$$

$$b_e = \left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right)^{-1} = \frac{b_2\, b_1}{b_1 + b_2}$$

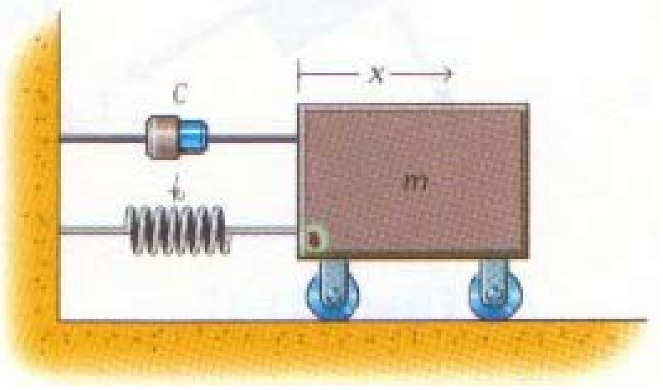
$$m\,\ddot{x} + \left(\frac{b_2\, b_1}{b_1 + b_2}\right)\dot{x} + k \; = 0$$

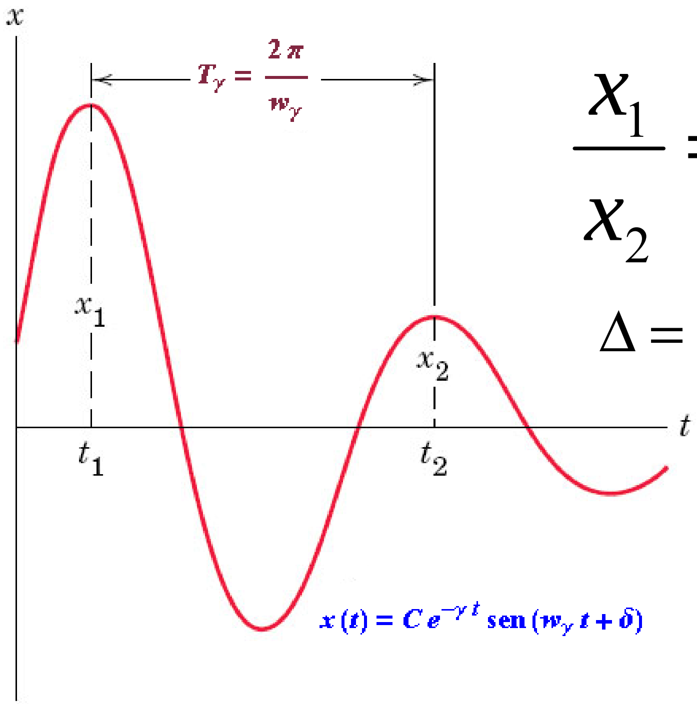
$$\ddot{x} + \frac{b_e}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m} \; = 0$$

$$2\,\gamma = \frac{b_e}{m} = \frac{1}{m}\left(\frac{b_2\, b_1}{b_1 + b_2}\right)$$

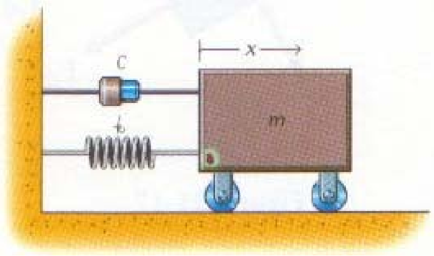
$$w_o{}^2 = \frac{k}{m}$$

TUTV3-5 Considerar una masa m que pesa ***100 N*** rueda por una superficie horizontal plana, según se indica en la figura. Se empuja el carrito hacia la derecha **375 mm** y se suelta con una velocidad de ***4.5 m/s*** hacia la izquierda en el instante ***t =0***. Se observa que la amplitud de cada pico de la oscilación es un ***90%*** de la amplitud del pico anterior. Si la constante del resorte es ***k =667 N/m***, determinar el coeficiente de amortiguamiento ***b***.





$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{e^{-\gamma t_1}}{e^{-\gamma (t_1 + T_\gamma)}} = e^{\gamma T_\gamma}$$



$$\Delta = 2\pi \frac{\gamma}{w_\gamma} = \frac{2\pi\,\gamma}{w_0\sqrt{1-\left(\frac{\gamma}{w_0}\right)^2}} = \frac{2\pi\,\gamma}{w_0\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\xi = \frac{\Delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \Delta^2}} \equiv \frac{\gamma}{w_0}$$

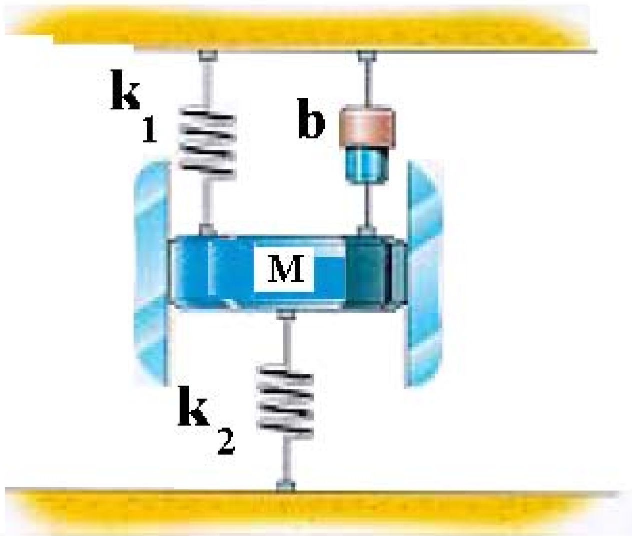
$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{667}{100/9.81}} = 8.1\frac{rad}{s}$$

$$\Delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{1}{90/100} = 0.11$$

$$\xi = 0.018 \Rightarrow \gamma = 0.15\frac{rad}{s}$$

$$2\gamma = \frac{b}{m} \Rightarrow b = 2\gamma m = 2\;0.15\,\frac{100}{9.81} = 3.06\frac{Ns}{m}$$

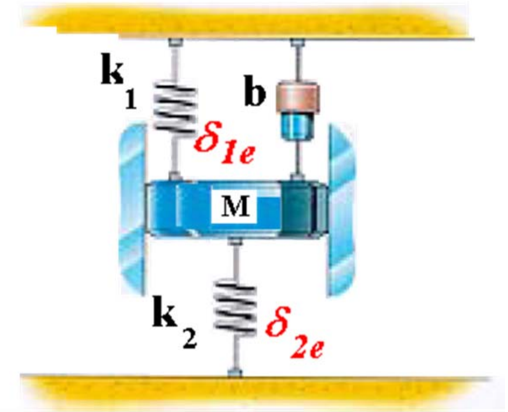
TUTV3-6. Un bloque que pesa ***50 N*** cuelga, en un plano vertical, de dos resortes y un amortiguador, según se indica en la figura. Si se desplaza el bloque *175 mm* por encima de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad hacia arriba de ***3.75 m/s*** cuando ***t = 0***, determinar: a) La ecuación diferencial del movimiento. b) El tipo y el período de la vibración resultante. c) La posición del bloque en función del tiempo. d) El primer instante $t_1 > 0$ en que el bloque pasa por su posición de equilibrio.



$k_1 = 1333\ N/m$,

$k_2 = 1000\ N/m$,

$b = 83.3\ N\ S/m$



Equilibrio

Dinámica

$$F_{k_1} - F_{k_2} - mg + F_b = -m\ddot{x}(t)$$

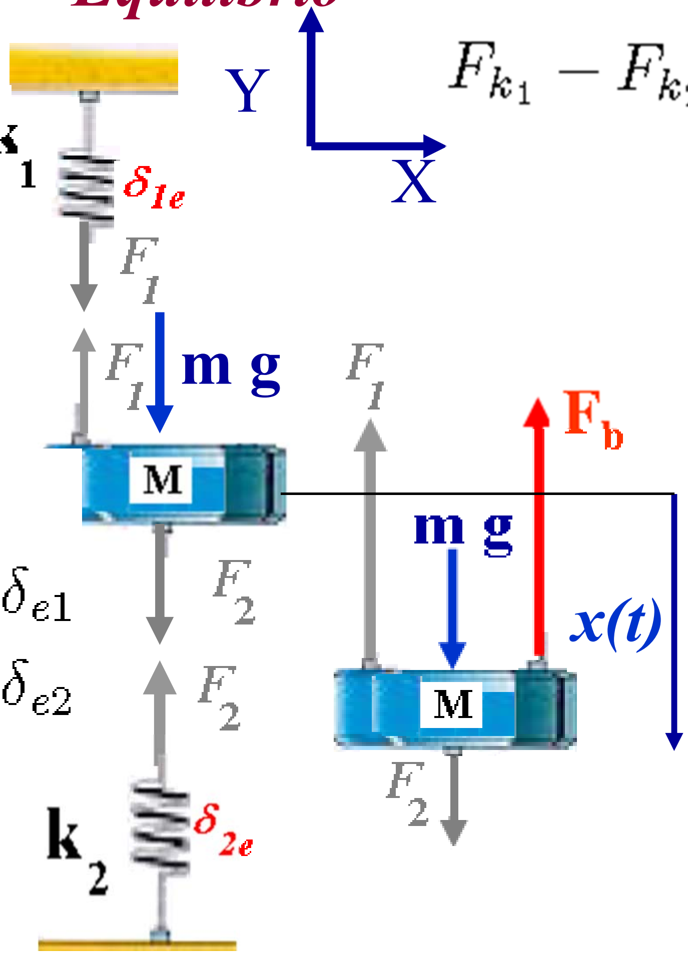
$$F_{k_1} = k_1\delta_1(t)$$

$$F_{k_2} = k_2\delta_2(t)$$

$$F_b = b\,\dot{x}(t)$$

$$\delta_1(t) = \delta_{e1} + x(t)$$

$$\delta_2(t) = \delta_{e2} - x(t)$$



$$F_{k_1} - F_{k_2} - mg = 0$$

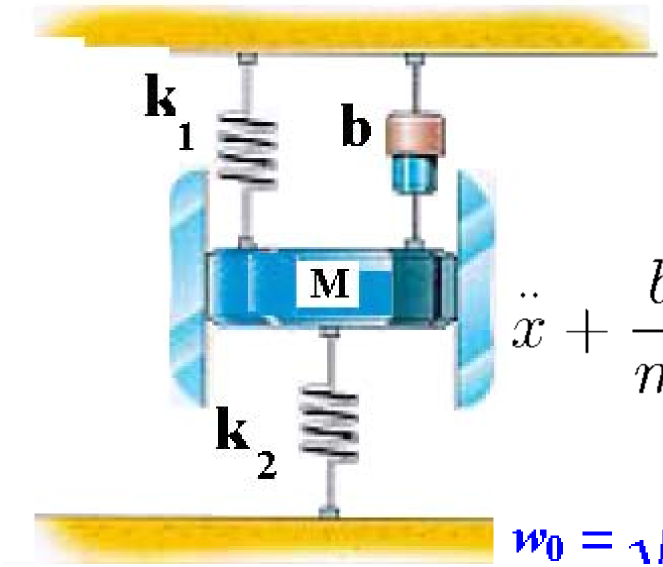
$$F_{k_1} = k_1\delta_{e1}$$

$$F_{k_2} = k_2\delta_{e2}$$

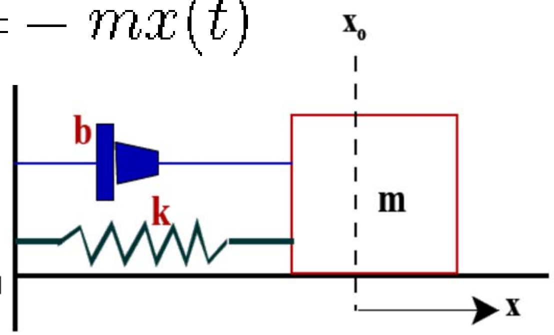
L.E

$$\boxed{k_1\,\delta_{e1} - k_2\,\delta_{e2} - mg} + x(t)\,(k_1 + k_2) + b_1\,\dot{x}(t) = -m\ddot{x}(t)$$

$$\boxed{k_1\,\delta_{e1} - k_2\,\delta_{e2} - mg = 0}$$

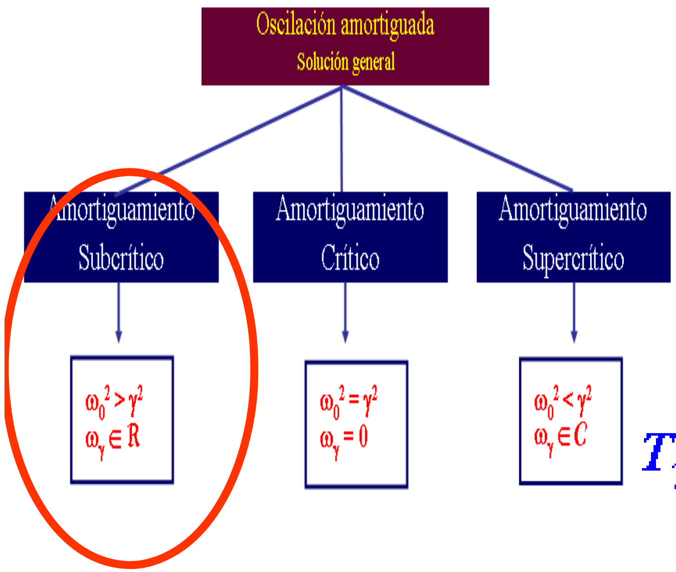


$$x(t)(k_1+k_2)+b_1\,\dot{x}(t)=-m\ddot{x}(t)$$



$$\ddot{x}+\frac{b}{m}\dot{x}+\frac{1}{m}\left(k_1+k_2\right)x=0$$

$$w_0=\sqrt{\frac{k_e}{m}}=\sqrt{\frac{1333+1000}{50/9.81}}=21.40\,\frac{rad}{s}\qquad w_0=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$$



$$2\gamma=\frac{b}{m}\Longrightarrow\gamma=\frac{b}{2m}=\frac{83.3}{2\ \ 50/9.81}=8.17\,rad/s$$

$$w_\gamma=\sqrt{w_0^2-\gamma^2}=\sqrt{21.40^2-8.17^2}=19.78\,rad/s$$

$$T_\gamma=\frac{2\pi}{w_\gamma}=\frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2-\gamma^2}}=\frac{2\pi}{\sqrt{21.40^2-8.17^2}}=0.32\,s$$

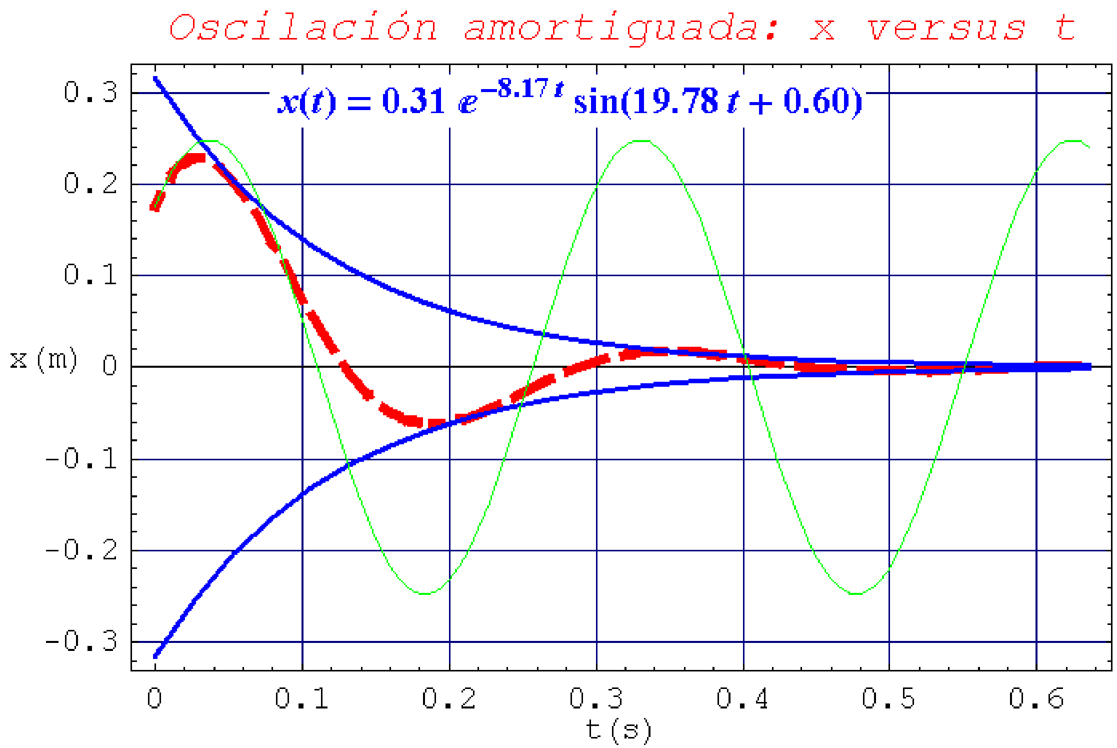
c) La posición del bloque en función del tiempo

$$\boxed{x(t) = C\, e^{-\gamma t}\ Sen(\omega_\gamma t + \delta)}$$

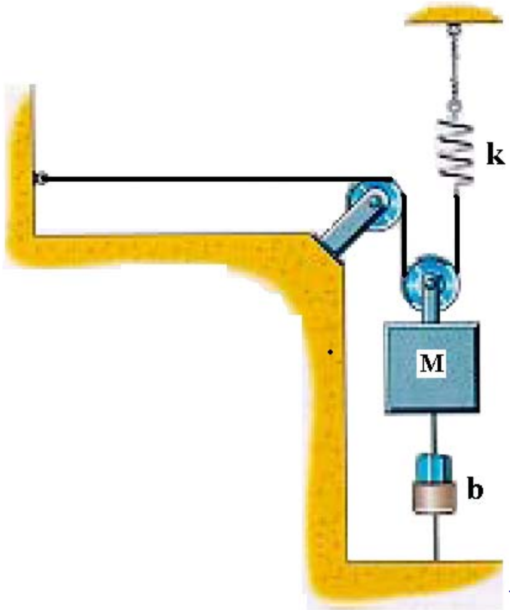
$$\tan\delta = \frac{\omega_\gamma x_0}{v_0 + \gamma x_0} \qquad C^2 = x_0^2 + \frac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega_\gamma^2}$$

Si se desplaza el bloque ***175 mm*** **por encima de su posición de equilibrio** y se suelta dándole una **velocidad hacia arriba** de ***3,75 m/s*** cuando **t = 0**

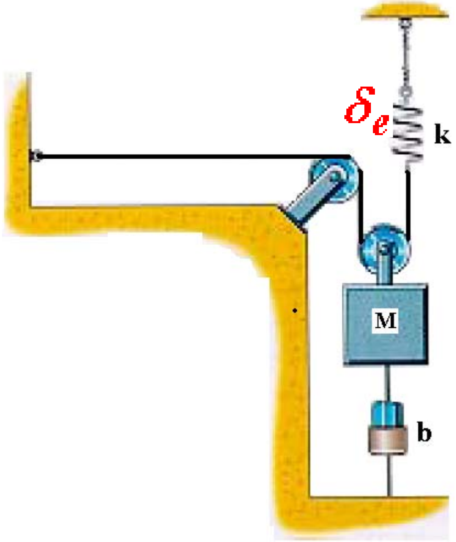
$$w_\gamma = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{21.40^2 - 8.17^2} = 19.78\ rad/s \qquad x(t) = \boxed{0.31\, e^{-8.17\,t}}\sin(19.78\,t + 0.60)$$



TUTV3-7. Una masa de ***M* = *4 kg*** pende en un plano vertical, según se indica en la figura. El resorte se halla sometido a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamientos. Si se desplaza la masa ***15 mm*** por encima de su posición de equilibrio y se suelta dándole una velocidad hacía debajo de ***750 mm/s*** cuando ***t* = *0***. determinar: a) La ecuación diferencial del movimiento. b) El período de la vibración resultante. c) la posición del bloque en función del tiempo. d) El primer instante $t_1>0$ en que se anula la velocidad de la masa. ***k* = *1.5 kN/m***, ***b= 125 N s/m***.



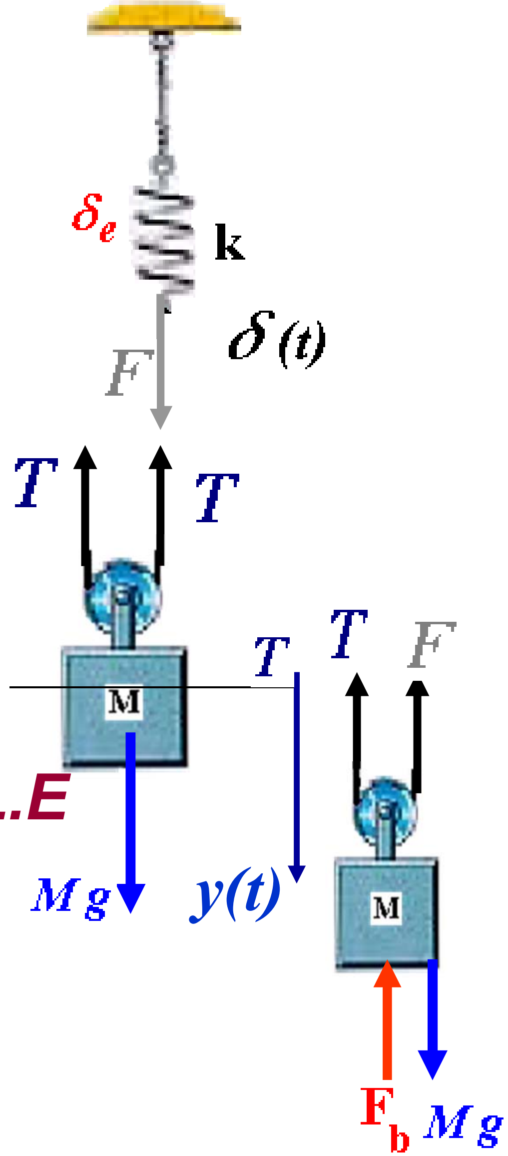
Equilibrio



$$2T - Mg = 0$$

$$T = F = k\,\delta_e$$

$$\boxed{2k\,\delta_e - Mg = 0}$$ L.E



Dinámica

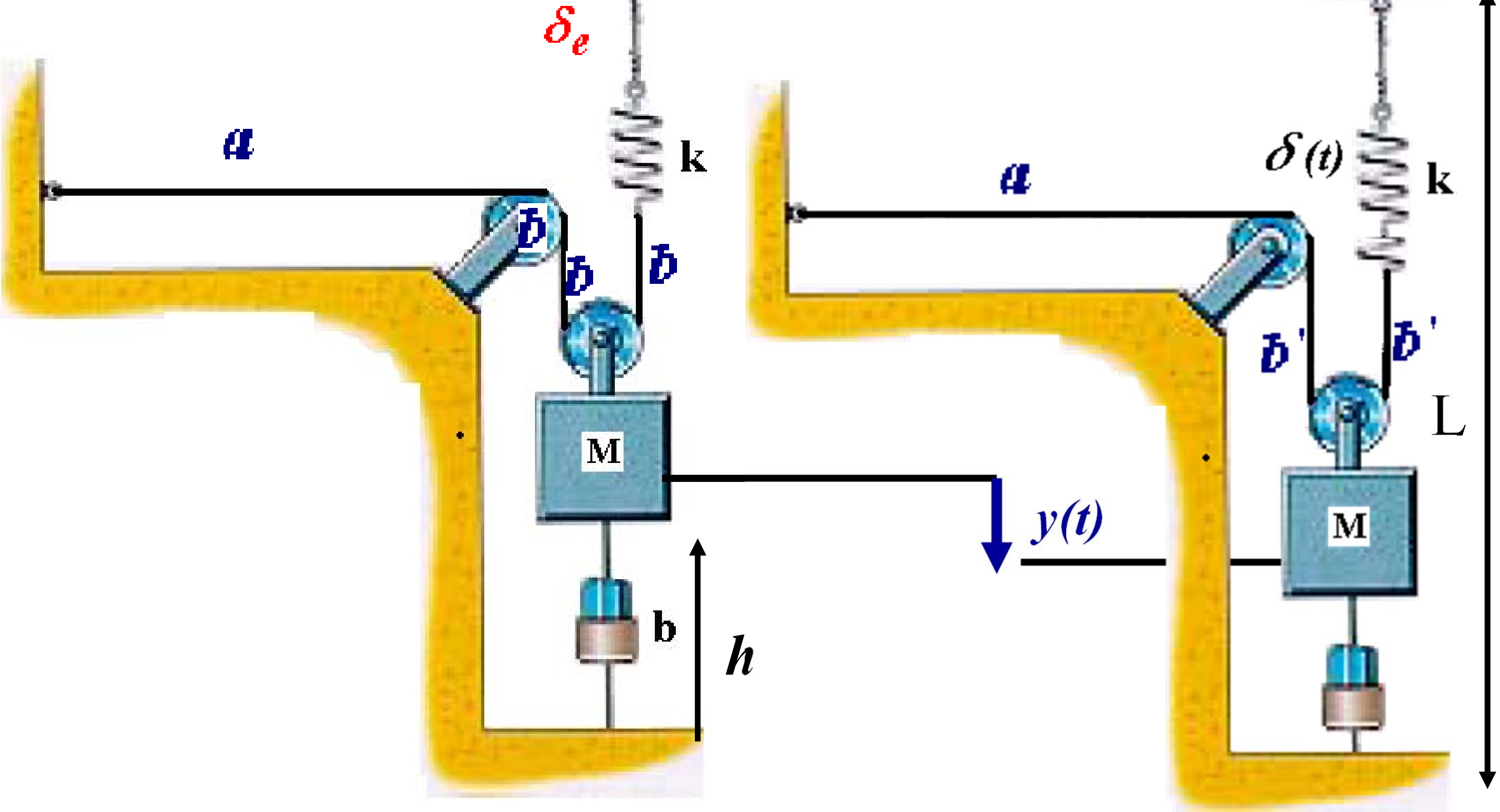
$$2T - Mg + F_b = -m\,\ddot{y}$$

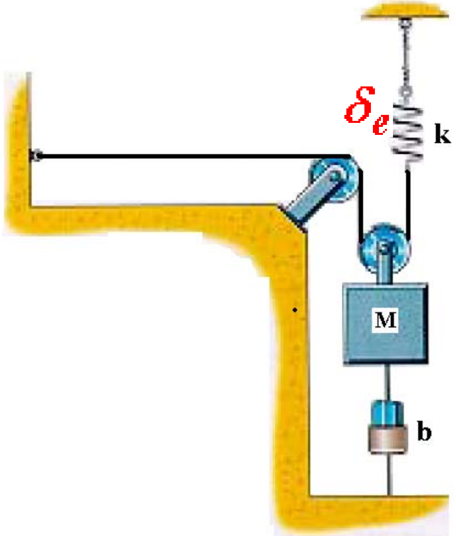
$$T = F = k\,\delta(t)$$

$$F_b = b\,\dot{y}$$

$$L = \delta_e + b + \cancel{h} = \delta(t) + b' + \cancel{h} - y(t) \Rightarrow \delta(t) = \delta_e + 2y(t)$$

$$b - b' = y(t)$$



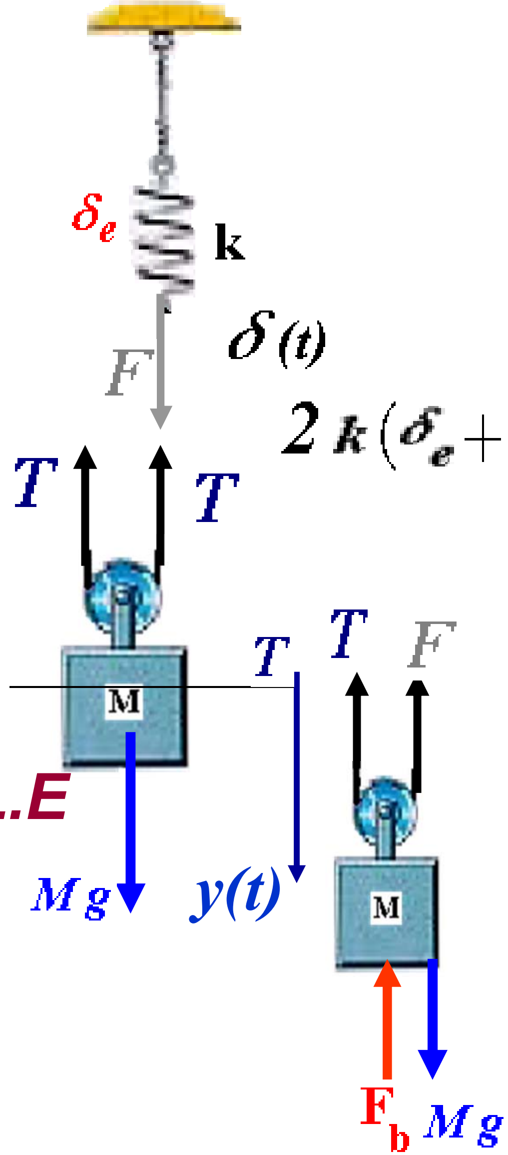


Equilibrio

$$2T - Mg = 0$$

$$T = F = k\,\delta_e$$

$$\boxed{2k\,\delta_e - Mg = 0}$$ L.E



Dinámica

$$2T - Mg + F_b = -m\,\ddot{y}$$

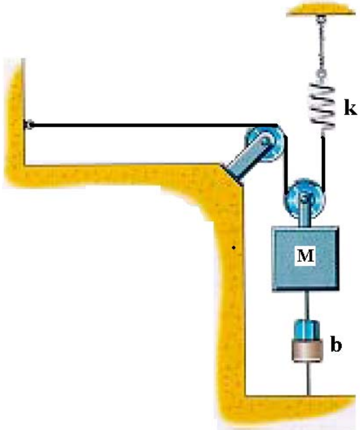
$$T = F = k\,\delta(t)$$

$$F_b = b\,\dot{y}$$

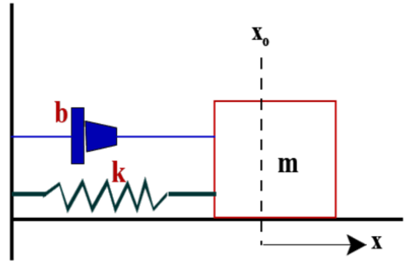
$$2k(\delta_e + 2y(t)) - Mg + b\dot{y} = -m\,\ddot{y}$$

$$4k\,y(t) + b\dot{y} = -m\,\ddot{y}$$

$$\ddot{y} + \frac{4k}{m}y(t)\;\frac{b}{m}\dot{y} = 0$$



$$\ddot{y} + \frac{4\,k}{m}\,y(t)\ \frac{\mathrm{b}}{m}\,\dot{y} = 0$$



$$w_0 = \sqrt{\frac{k_e}{M}} = \sqrt{\frac{4\,k}{M}}\ \sqrt{\frac{4 * 1.5 * 10\,\hat{}\,3}{4}} = 38.73\ \frac{rad}{s}$$

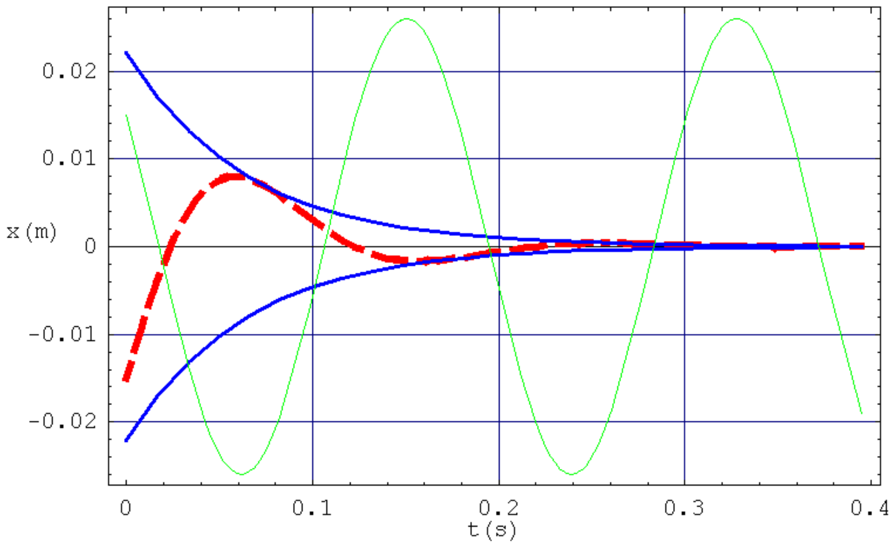
$$2\,\gamma = \frac{b}{M} \Longrightarrow \gamma = \frac{b}{2\,M} = \frac{125}{2\ 4} = 15.63\ rad\,/\,s$$

$$w_\gamma = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{38.73^2 - 15.63^2} = 35.44\ rad\,/\,s$$

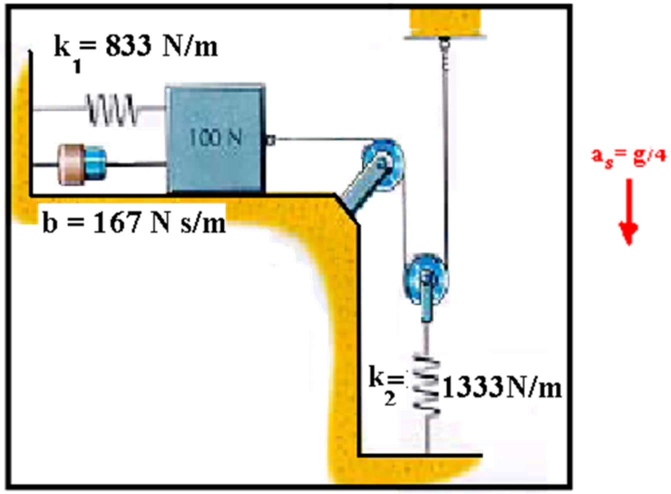
$$T_\gamma = \frac{2\,\pi}{w_\gamma} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{w_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\,\pi}{\sqrt{38.73^2 - 15.63^2}} = 0.18\ s$$

$x(t) = 0.021\ e^{-15.63\,t}\ \sin(35.44\,t - 0.80)$

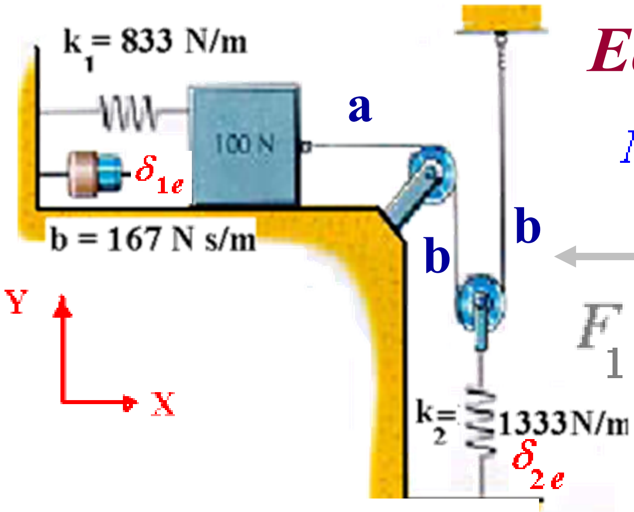
Oscilacion amortiguada: x versus t



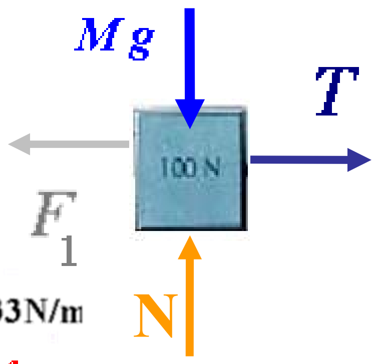
TUTV3-8. El sistema mecánico de la figura es solidario con un ascensor que desciende con aceleración constante ***as = g/4*** . Un bloque que pesa ***100 N*** se desliza por una superficie horizontal exenta de rozamiento, según se indica en la figura. Los dos resortes están sometidos a tracción en todo momento y las poleas son pequeñas y exentas de rozamientos. Si se desplaza el bloque ***75 mm*** a la izquierda de su posición de equilibrio, y se suelta dándole una velocidad de ***1.25 m/s*** hacia la derecha cuando ***t = 0***, determinar: a) La ecuación diferencial del movimiento. b) El tipo y período de la vibración resultante. c) La aceleración de la masa que pesa **100 N** en todo instante de tiempo, vista por un observador inercial. d) La fuerza que la masa de ***100 N*** ejerce sobre la superficie horizontal.



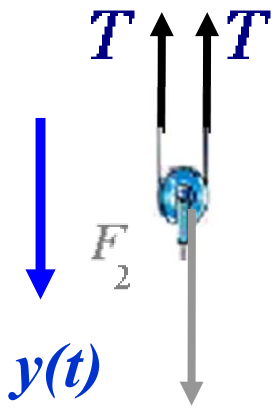
Referencial solidario con el ascensor



Equilibrio



$$N - m\,g_{ef} = 0$$
$$T - F_1 = 0$$
$$2T - F_2 = 0$$
$$F_1 = k_1 \delta_{e_1}$$
$$F_2 = k_2 \delta_{e2}$$

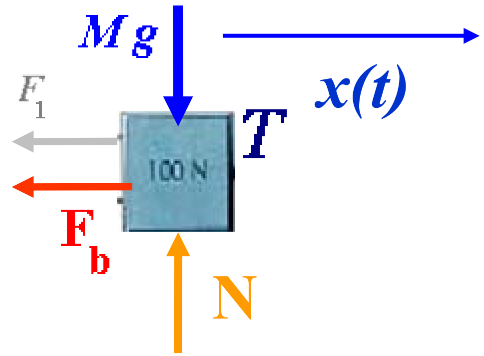


$$g_{ef} = g - a_s = g - \frac{g}{4} = g\frac{3}{4}$$

$$\boxed{k_1 \delta_{e_1} - \frac{1}{2} k_2 \delta_{e2} = 0}$$

L.E

Dinámica



$$N - m\,g_{ef} = 0$$
$$T - F_1 - F_b = m\ddot{x}$$
$$2T - F_2 = 0$$
$$F_1 = k_1 \delta_1(t)$$
$$F_2 = k_2 \delta_2(t)$$

$$\delta_1(t) = \delta_{e_1} + x$$
$$\delta_2(t) = \delta_{e_2} - y$$

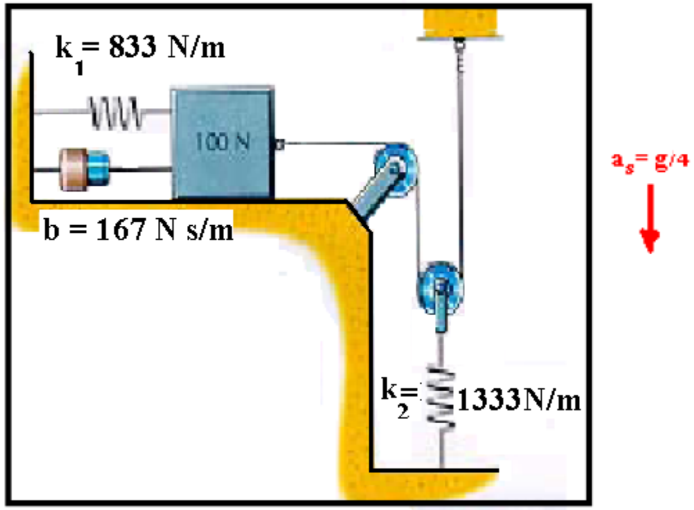
$$a - x + 2\,(b + y) = a + 2b = cte$$

$$y(t) = \frac{1}{2} x(t)$$

$$\frac{k_2 \delta_2(t)}{2} - k_1 \delta_1(t) - \frac{b}{m}\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\frac{F_2}{2} - F_1 - F_b = m\ddot{x}$$

¿La ecuación diferencial del movimiento ? TUTV3-8



$$g_{ef} = g - a_s = g - \frac{g}{4} = g\frac{3}{4}$$

$$N = m\, g_{ef} \qquad \frac{F_2}{2} - F_1 - F_b = m\ddot{x}$$

$$\frac{k_2\delta_2(t)}{2} - k_1\delta_1(t) - \frac{b}{m}\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\frac{k_2}{2}\left(\delta_{e_2} - y\right) - k_1\left(\delta_{e_1} + x\right) - \frac{b}{m}\dot{x} = m\ddot{x}$$

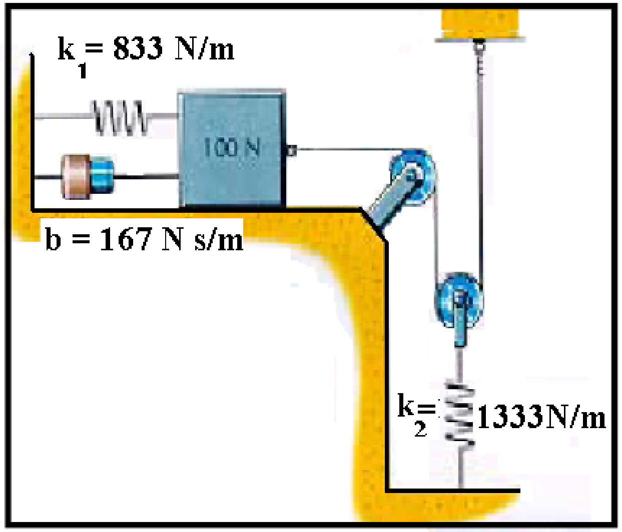
$$k_1\delta_{e_1} - \frac{1}{2}k_2\delta_{e2} = 0 \quad \text{L.E}$$

$$\boxed{\cancel{\left(\frac{k_2}{2}\delta_{e_2} - k_1\delta_{e_1}\right)}} - \frac{k_2}{2}\frac{x}{2} - k_1 x - \frac{b}{m}\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$-\left(\frac{k_2}{4} + k_1\right)x - \frac{b}{m}\dot{x} = m\ddot{x}$$

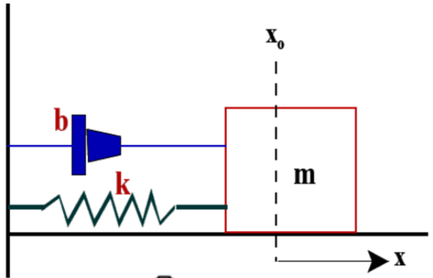
$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}\left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right)x = 0}$$

c) El tipo y período de la vibración resultante **TUTV3-8**



$a_s = g/4$

k_e



$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{1}{m}\boxed{\left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right)} x = 0$$

$$m = \frac{100}{g_{eff}} = \frac{100}{\frac{3}{4}g} kg, k_1 -> 833\ N/m, k_2 -> 1333\ N/m$$

$$w_\gamma = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2}$$

$$w_0^2 = \frac{1}{m}\left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right)$$

$$w_\gamma = \sqrt{9{,}26^2 - 6{,}14^2} = 6{,}93\frac{rad}{s}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{1}{m}\left(k_1 + \frac{k_2}{4}\right)} \quad w_0 = 9{,}26\frac{rad}{s}$$

$$T_\gamma = \frac{2\pi}{w_\gamma} = \frac{2\pi}{6{,}93} = 0{,}91\ s$$

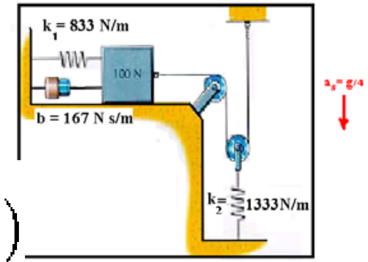
$$\gamma = \frac{b}{2m} = \frac{b}{2\frac{100}{\frac{3}{4}g}} = \frac{167}{2\frac{100}{\frac{3}{4}9{,}81}} = 6{,}14\frac{rad}{s}$$

c) El tipo y período de la vibración resultante **TUTV3-8**

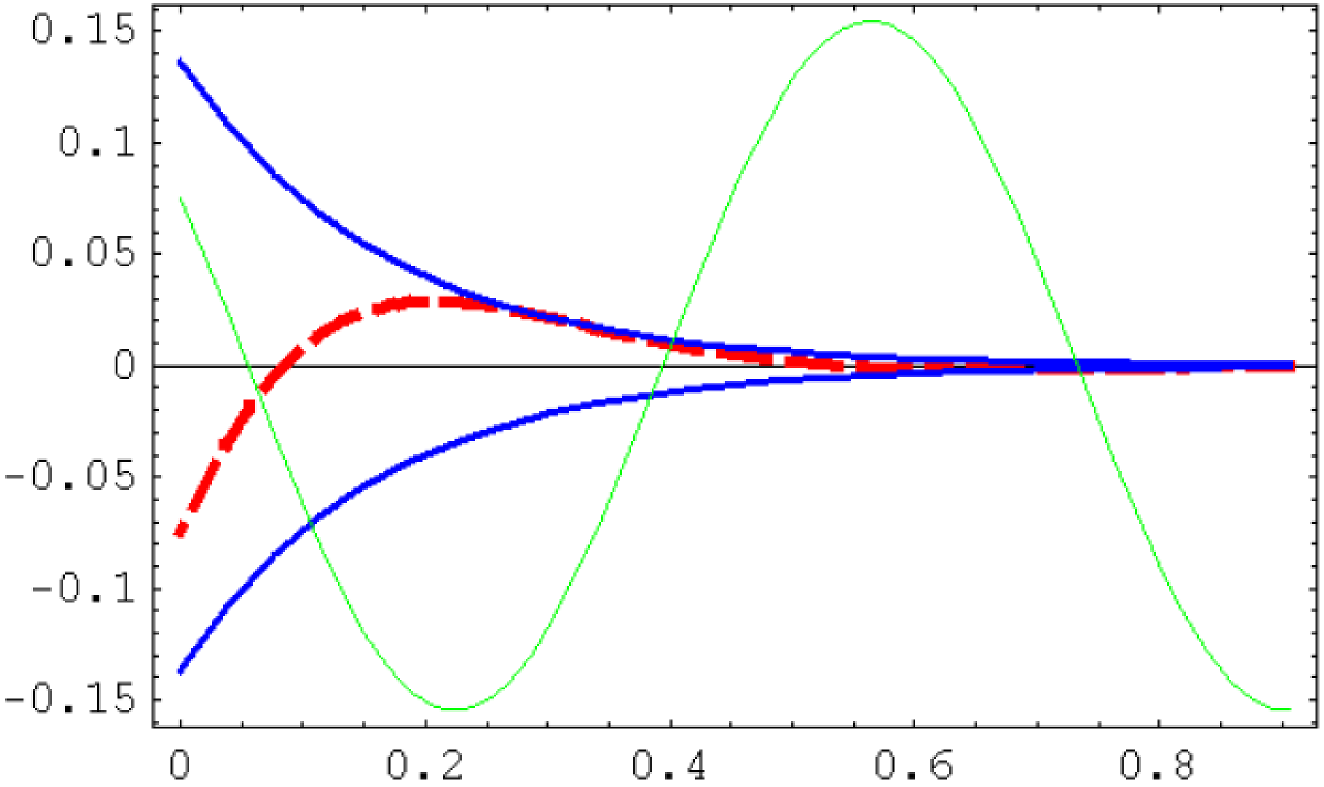
$$x(t) = \frac{\sqrt{x_0^2\,(w_0^2-\gamma^2) + \left(\dot{x}_0 + \gamma\, x_0\right)^2}}{\sqrt{w_0^2-\gamma^2}}\, e^{-\gamma t}\ sen\left(\sqrt{w_0^2-\gamma^2}\,t + \tan^{-1}\left(\frac{x_0}{\dot{x}_0+\gamma\, x_0}\sqrt{w_0^2-\gamma^2}\right)\right)$$

$$x_0 = -\frac{75}{1000} m$$

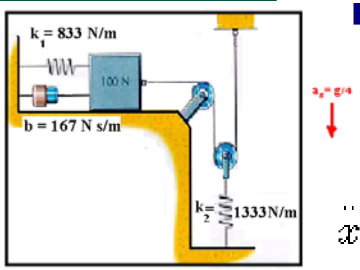
$$v_0 = 1{,}25 \frac{m}{s}$$



$$x(t) = 0{,}14\, m\; e^{-6{,}14t} \sin\left(6{,}93t - 0{,}58\right)$$

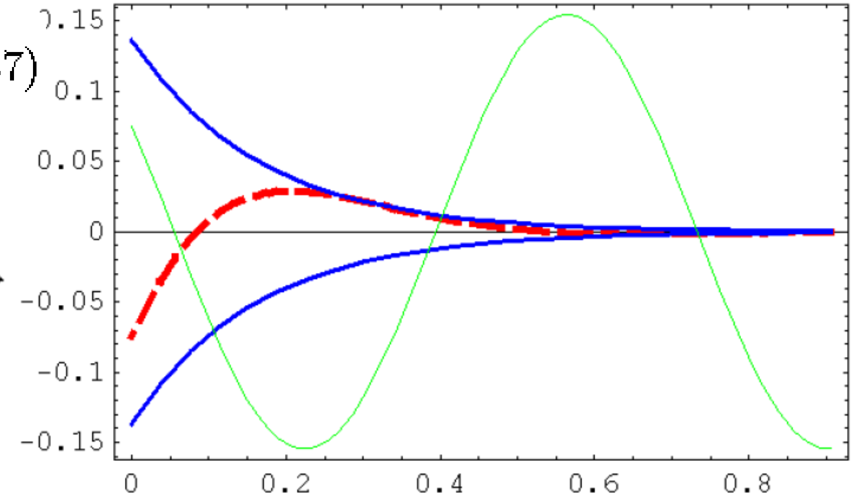


d) La aceleración de m vista por un observador inercial TUTV3-8



$$x(t) = 0{,}14\, m\, e^{-6{,}14t} \sin\left(6{,}93t - 0{,}58\right)$$

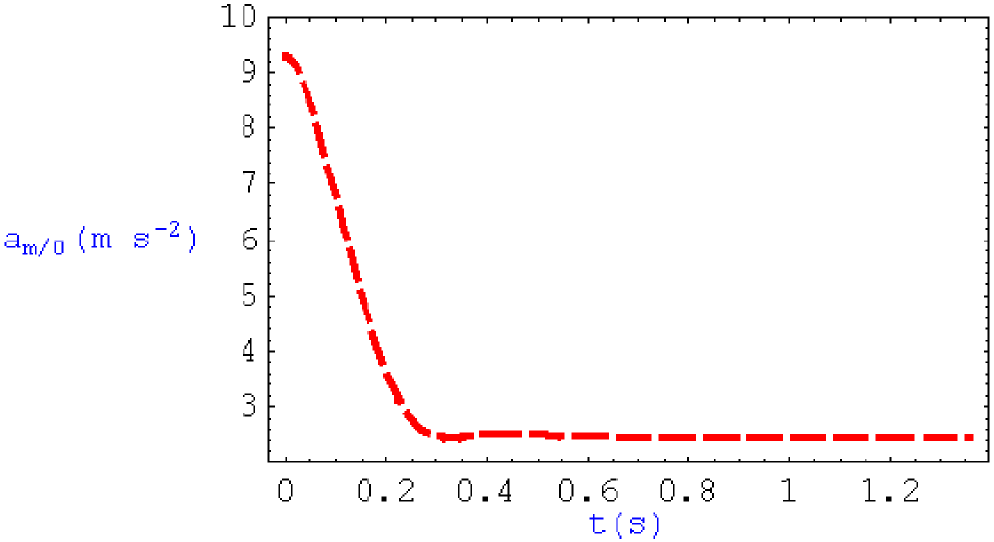
$$\ddot{x}(t) = -11{,}70 \frac{m}{s^2}\, e^{-6{,}14t} \sin\left(6{,}93t + 0{,}87\right)$$

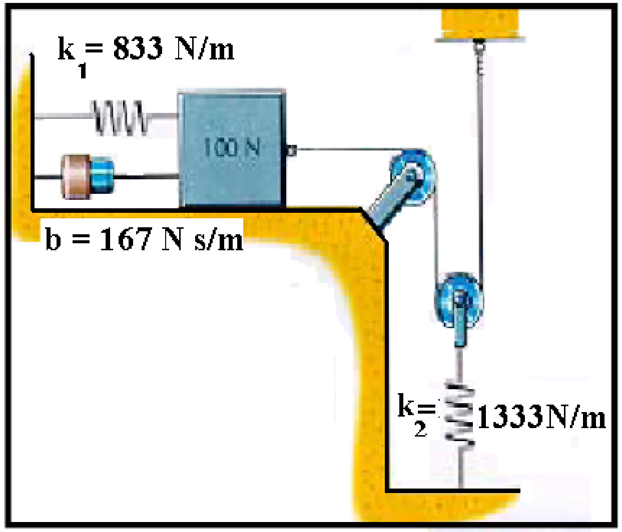


$$\overrightarrow{a}_{m/0} = \overrightarrow{a}_{m/0'} + \overrightarrow{a}_{0'/0}$$

$$\overrightarrow{a}_{m/0} = -11{,}70 \frac{m}{s^2}\, e^{-6{,}14t} \sin\left(6{,}93t + 0{,}87\right) \overrightarrow{i} - \frac{g}{4} \overrightarrow{j}$$

$$\left|\overrightarrow{a}_{m/0}(t)\right| = \sqrt{\left(11{,}70 \frac{m}{s^2}\, e^{-6{,}14t} \sin\left(6{,}93t + 0{,}87\right)\right)^2 + \left(\frac{g}{4}\right)^2}$$





$a_s = g/4$

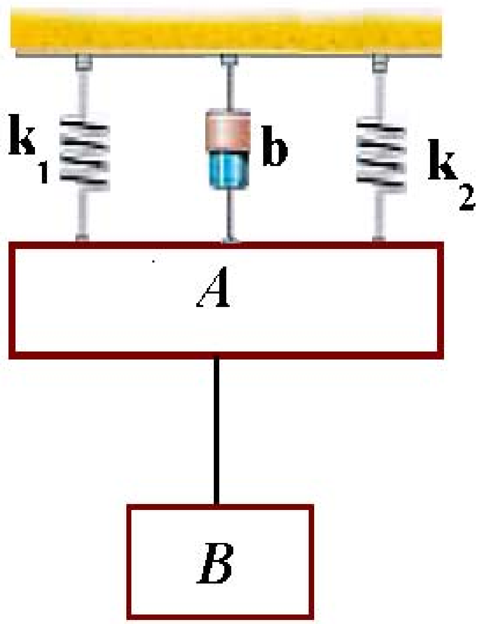
$$N - m\,g_{ef} = 0$$

El peso es de 100 N ¡dentro del ascensor!

$$P = m\,g_{\text{eff}}$$

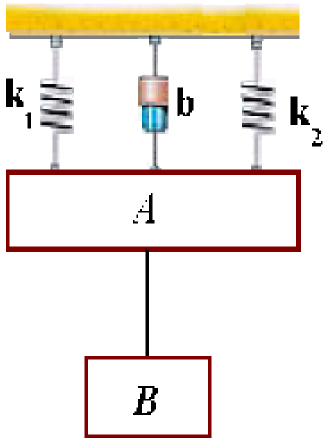
$$N(-)\vec{j} = -m\,g_{\text{eff}}\,\vec{j} = -\,m\,g\,\frac{3}{4}\,\vec{j} = -\,\frac{P}{g\,\frac{3}{4}}\,g\,\frac{3}{4}\,\vec{j} = -100\,N\,\vec{j}$$

TUTV3-9. Un bloque ***B*** de masa **0.9 kg** se conecta mediante una cuerda a un bloque ***A*** de **2.4 kg**, el cual está suspendido de dos resortes como se muestra en la figura, cada resorte tiene constante ***k=180 N/m=k₁=k₂***, y de un amortiguador cuyo coeficiente es ***b=7.5 N s/m***. Si el sistema está en reposo cuando se corta la cuerda que conecta ***A*** con ***B***, determinar: ***a)*** La posición inicial y la velocidad inicial de la masa ***A***, justo en el instante en que se corta la cuerda. ***b)*** ¿Oscila la masa ***A***, una vez cortada la cuerda? ¿Por qué? ***c)*** La posición de la masa ***A*** en todo instante de tiempo. ***d)*** La tensión mínima que actuará sobre cada resorte durante el movimiento resultante.

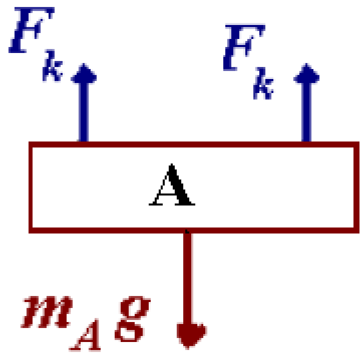


La posición inicial y la velocidad inicial de la masa **A**, justo en el instante en que se corta la cuerda. Analicemos la situación de equilibrio, los muelles están deformados debido a la acción de **A** y de **B**

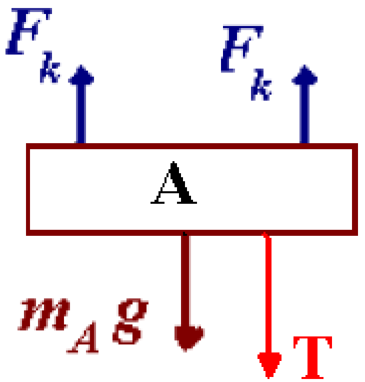
Si consideramos primero solo la acción de A sobre los muelles, estos se deforman una cantidad δ_e cada uno

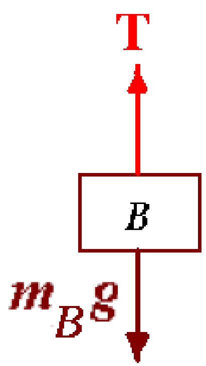


$$\left.\begin{array}{c} 2F_k - m_A g = 0 \\ F_k = k\delta e \end{array}\right\} \Longrightarrow \delta_e = \frac{m_A g}{2k} = 0{,}0654\ m$$

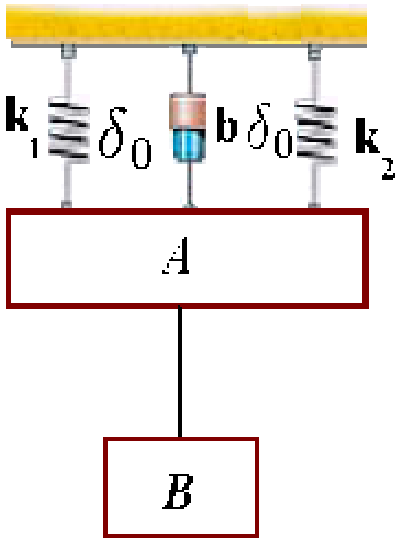


Una vez que se ha colocado la masa **B**, colgada por el hilo, los muelles se deforman más, en una cantidad δ_o





$$\left.\begin{array}{c} 2F_k - m_A g - T = 0 \\ F_k = k\,\delta_0 \\ T - m_B\, g \end{array}\right\} \Longrightarrow \delta_0 = \frac{(m_A + m_B)}{2k} g$$



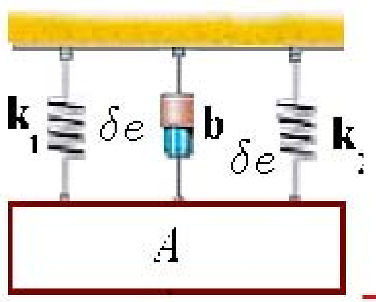
$$\delta_0 = \frac{(m_A + m_B)}{2k} g$$

Cuando cortamos la cuerda, **A** se desplaza hacia arriba en una cantidad y_0, intentando recuperar su posición de equilibrio previa (δ_e):

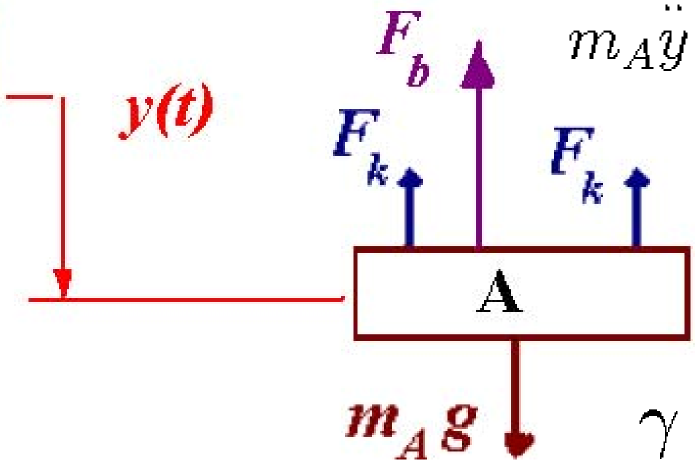
$$y_0 = \delta_0 - \delta e = \frac{(m_A + m_B)}{2k} g - \frac{m_A g}{2k} = \frac{m_B g}{2k} \uparrow$$

Luego para la dinámica de **A**, una vez cortada la cuerda, las condiciones iniciales son: Posición inicial $y_0 = m_B\, g\, /2k$, y velocidad inicial nula, en $\boldsymbol{t=0}$.

b) ¿Oscila la masa A, una vez cortada la cuerda? ¿Por qué? Analicemos ahora la dinámica: tomamos un instante de tiempo, t, donde la masa A, se encuentra una distacia $y(t)$ por debajo de su posición de equilibrio, $\delta_e = \frac{m_A g}{2k}$.



$$\left.\begin{aligned} 2F_k - m_A\,g + b\dot{y} &= m_A\ddot{y} \\ F_k &= k\,\delta(t) \\ \delta(t) &= \delta_e - y(t) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad 2k\,(\delta_e + y(t)) - m_A\,g + b\dot{y} = -m_A\ddot{y}$$



$$m_A\ddot{y} + b\dot{y} + 2k\,y + \boxed{2k\delta_e - m_A\,g} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} m_A\ddot{y} + b\dot{y} + 2k\,y &= 0 \\ \ddot{y} + \frac{b}{m_A}\dot{y} + \frac{2\,k}{m_A}y &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \frac{b}{2\,m_A} \\ w_0^2 &= \frac{2\,k}{m_A} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad w_0 = \sqrt{\frac{2k}{m_A}}$$

El sistema puede oscilar si: $w_\gamma = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} \epsilon \mathbb{R}$

oscilador amortiguado

$$w_0 = \sqrt{\frac{2k}{m_A}} = \sqrt{\frac{2\;180}{2{,}4}} = 12{,}25\frac{rad}{s}$$

$$w_\gamma = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} = w_\gamma = \sqrt{12{,}25^2 - 1{,}56^2} = 12{,}15\frac{rad}{s}$$

$$\mathbf{T}_\gamma = \frac{2\pi}{w_\gamma} = \frac{2\pi}{12{,}15} = \mathbf{0{,}52\,s}$$

c) Posición de la masa m en todo instante de tiempo.

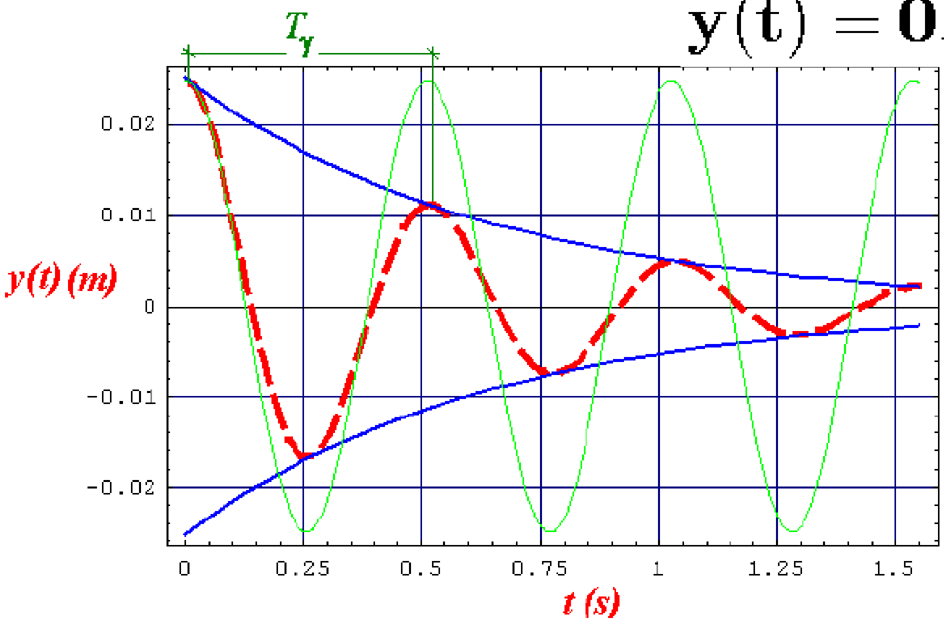
$$x(t) = Ce^{-\gamma t}\sin(w_\gamma t + \delta)$$

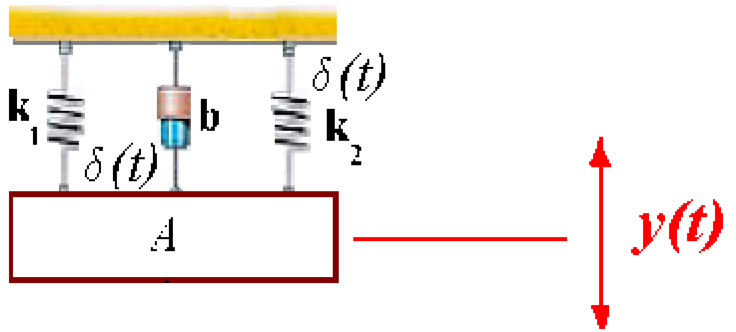
oscilador amortiguado

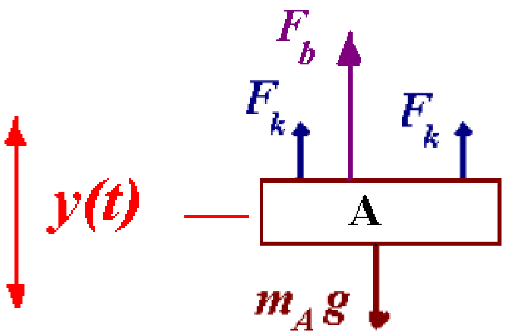
$$C = \frac{\sqrt{y_0^2\, w_\gamma^2 + \left(\dot{y}_0 + \gamma\, y_0\right)^2}}{w_\gamma} = \frac{\sqrt{0{,}025^2\ 12{,}15^2 + (1{,}56 * 0{,}025)^2}}{12{,}15} = 0{,}025\, m$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{w_\gamma\, y_0}{\dot{y}_0 + \gamma\, y_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{12{,}15\ 0{,}025}{1{,}56\ \ 0{,}025}\right) = 1{,}44\, rad$$

$$\mathbf{y(t) = 0{,}025\ e^{-1{,}56t}\ \sin\,(12{,}15t + 1{,}44)\ m}$$







d) La tensión mínima que se presentará en cada resorte durante el movimiento resultante. *En cada instante de tiempo la tensión que soporta cada muelle, viene dado por la ley de Hooke:*

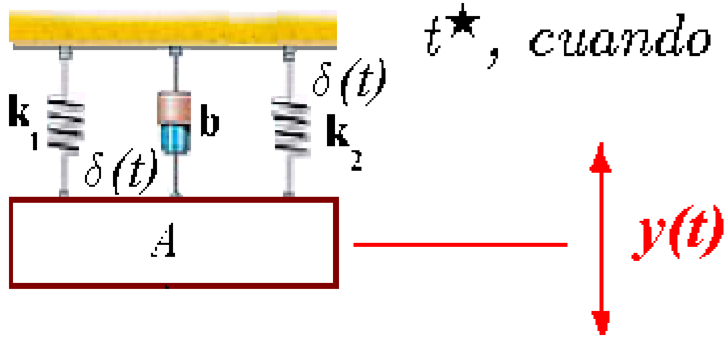
$$F_k = k\,\delta(t)$$

donde $\delta(t)$ es la longitud que se encuentra deformado cada muelle, en cada instante de tiempo, estirado o comprimido, respecto de la posición de equilibrio de la masa A, δ_e.

$$\delta(t) = \delta_e \pm |y(t)|$$

La tensión mínima se obtiene, cuando la deformación de cada muelle, $\delta(t)$ sea mínima, esto es, hay que determinar el tiempo para el cual $\delta(t)$ sea lo más pequeño posible, y esto ocurre en el instante, $t^\star$, cuando la masa A ha ascendio la máxima longitud:

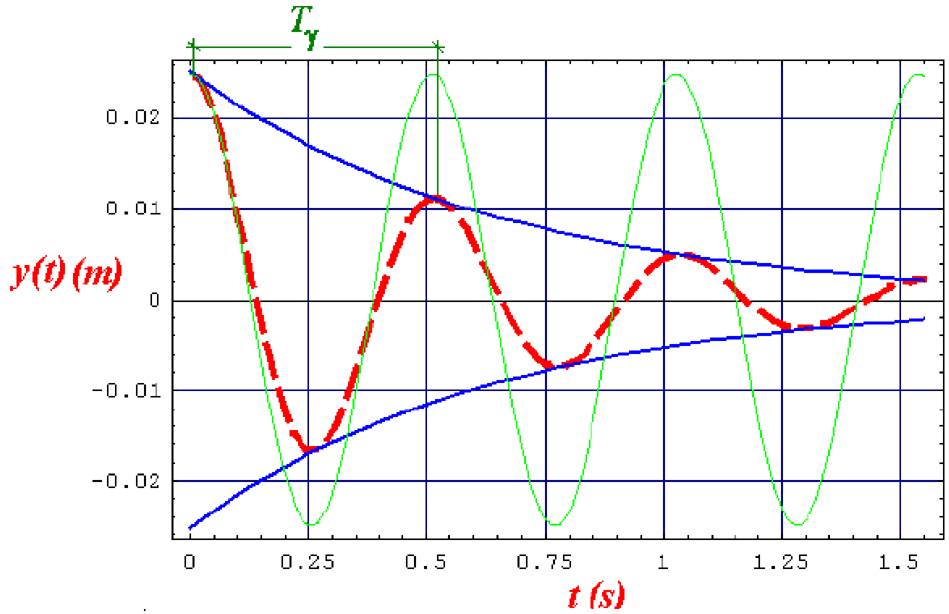
$$\delta(t^\star) = \delta_e - \left|y(t^\star)\right| \uparrow$$



$t^{\star}$, *cuando la masa A ha ascendio la máxima longitud:*

$$\delta(t^{\star}) = \delta_e - \left|y(t^{\star})\right| \uparrow$$

$$t^{\star} = \frac{T_\gamma}{2} = 0{,}26\ s$$



$$\delta\left(\frac{T_\gamma}{2}\right) = \delta_e - \left|y\left(\frac{T_\gamma}{2}\right)\right| \uparrow$$

$$F_{k,\text{mín}} = k\,\delta\left(\frac{T_\gamma}{2}\right) = k\left(\delta_e - \left|y\left(\frac{T_\gamma}{2}\right)\right|\right)$$

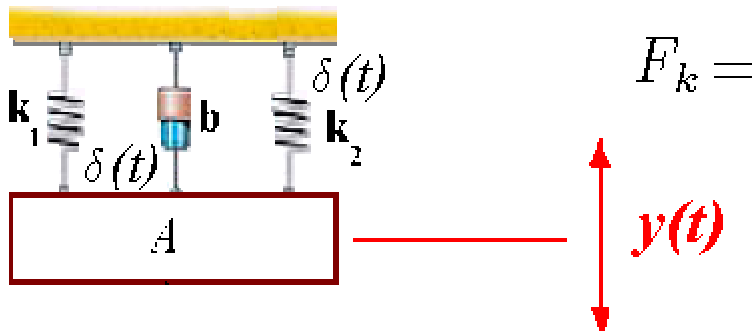
$$\left|y\left(\frac{T_\gamma}{2}\right)\right| = 0{,}025\ e^{-1{,}56\frac{T_\gamma}{2}} \sin\left(12{,}15\frac{T_\gamma}{2} + 1{,}44\right)\ m$$

$$\left|y\left(\frac{T_\gamma}{2}\right)\right| = 0{,}017 m$$

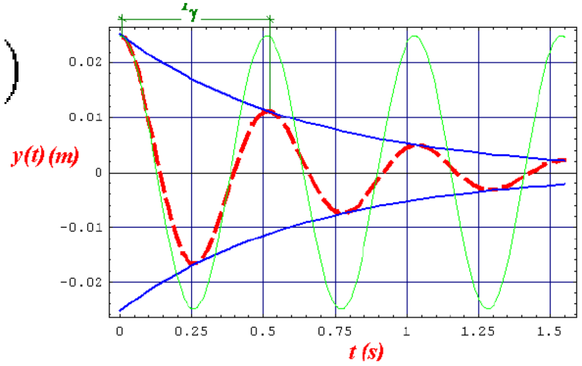
$$\delta\left(\frac{T_\gamma}{2}\right) = \delta_e - \left|y\left(\frac{T_\gamma}{2}\right)\right| \uparrow = 0{,}065 - 0{,}017 = 0{,}048\ m$$

$$\mathbf{F}_{k,\text{mín}} = k\,\delta\left(\frac{T_\gamma}{2}\right) = 180\ 0{,}048 = \mathbf{8{,}64\,N}$$

Podemos representar la tensión de un muelle en función del tiempo:

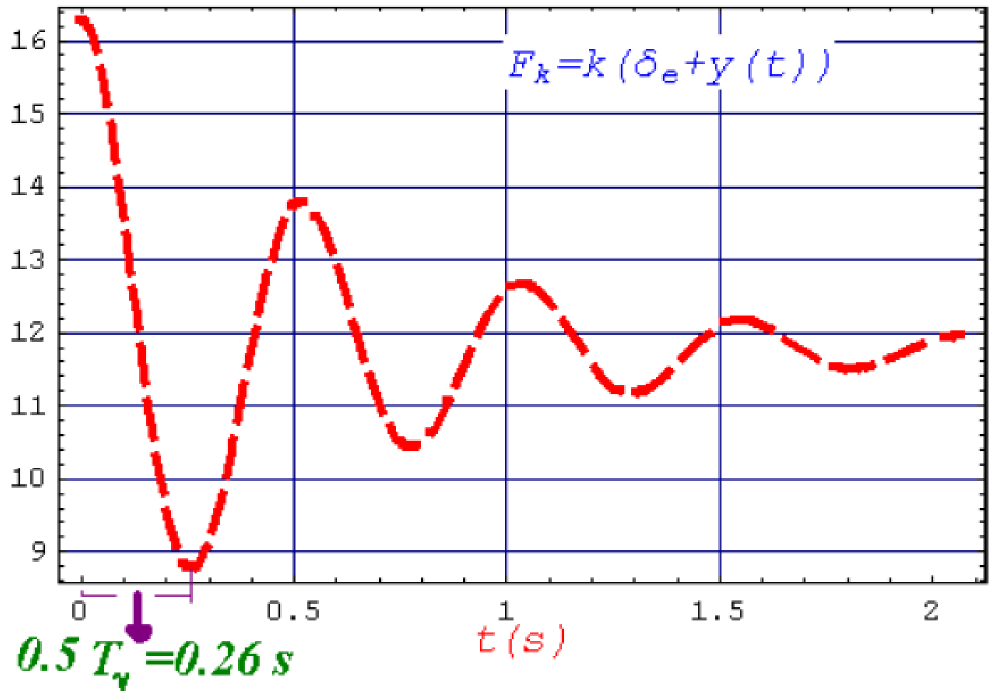


$$F_k = k\,\delta(t) = k\,(\delta_e + y(t))$$

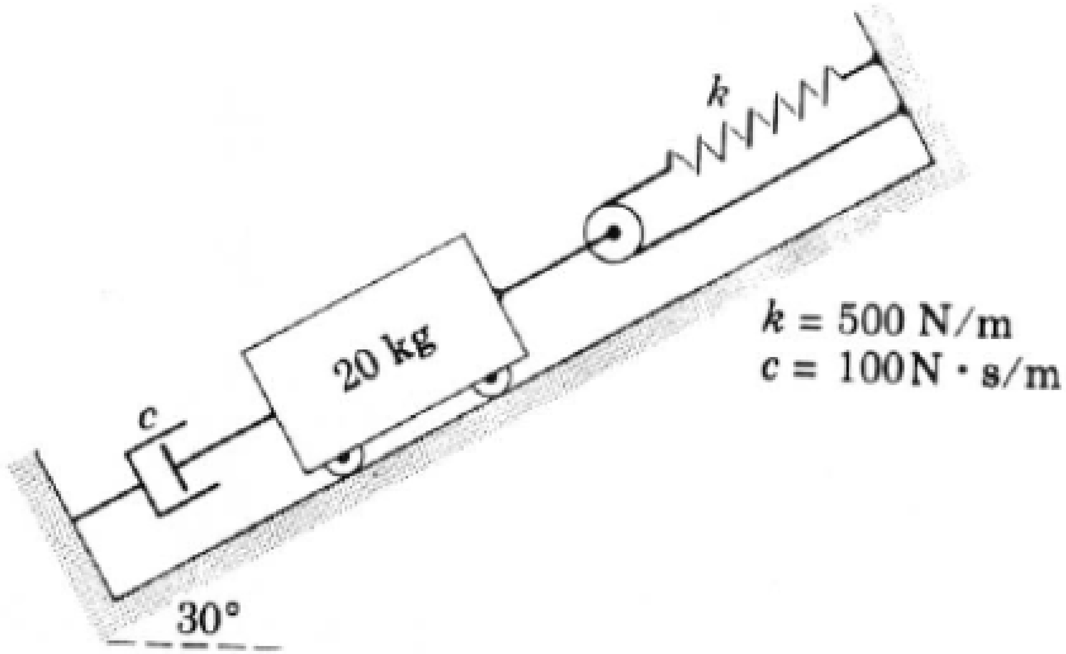


$$\mathbf{F}_k(\mathbf{t}) = \mathbf{k}(\delta_e + \mathbf{0{,}025\ e}^{-1{,}56t}\sin(\mathbf{12{,}15t + 1{,}44}))\mathbf{N}$$

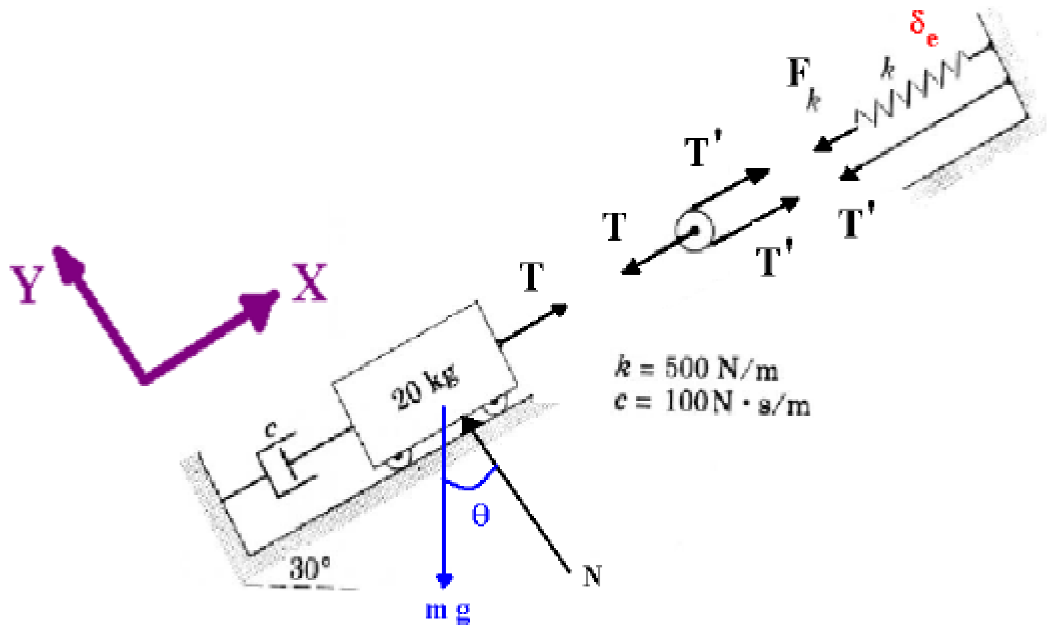
Tensión sobre cada muelle, en función del tiempo



TUTV3-10. El cuerpo de ***20 kg*** mostrado en la figura se desplaza una distancia de ***200 mm*** hacia abajo desde su posición de equilibrio y se suelta desde el reposo. a) ¿Oscila el sistema? b) En caso de que oscile, definir el tipo de oscilación y dar el período. c) Obtener la posición de la masa de ***20 kg*** en todo instante de tiempo, d) Encontrar el cociente de dos amplitudes sucesivas.



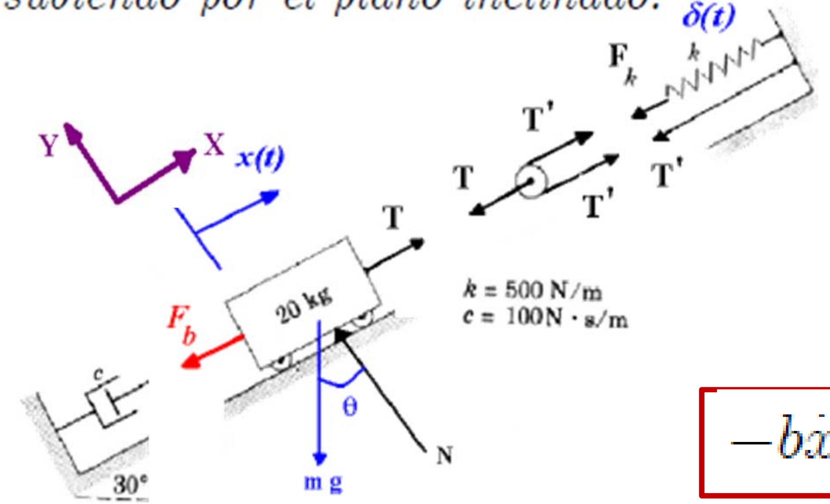
En equilibrio el muelle de constante k está deformado en una cantidad δ_e.



$$\left.\begin{array}{c} N - mg\cos\theta = 0 \\ T - mg\sin\theta = 0 \\ 2T' - T = 0 \\ T' = F_k = k\,\delta_e \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} T = 2\,T' = 2\,k\delta_e \\ \boxed{2\,k\,\delta_e - mg\sin\theta = 0} \end{array}$$

L.E

Veamos la situación dinámica: consideremos una cantidad $x(t)$ que se la movido la masa m, subiendo por el plano inclinado:



$$\left.\begin{array}{c} N - mg\cos\theta = 0 \\ -b\dot{x} + T - m\,g\sin\theta = m\ddot{x} \\ 2T' - T = 0 \\ T' = F_k = k\;\delta(t) \\ \delta(t) = \delta_e - 2\,x(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\boxed{-b\dot{x} + 2\,k\;\delta(t) - m\,g\sin\theta = m\ddot{x}}$$

$$\boxed{2\,k\,\delta_e - mg\sin\theta = 0}$$ **L.E**

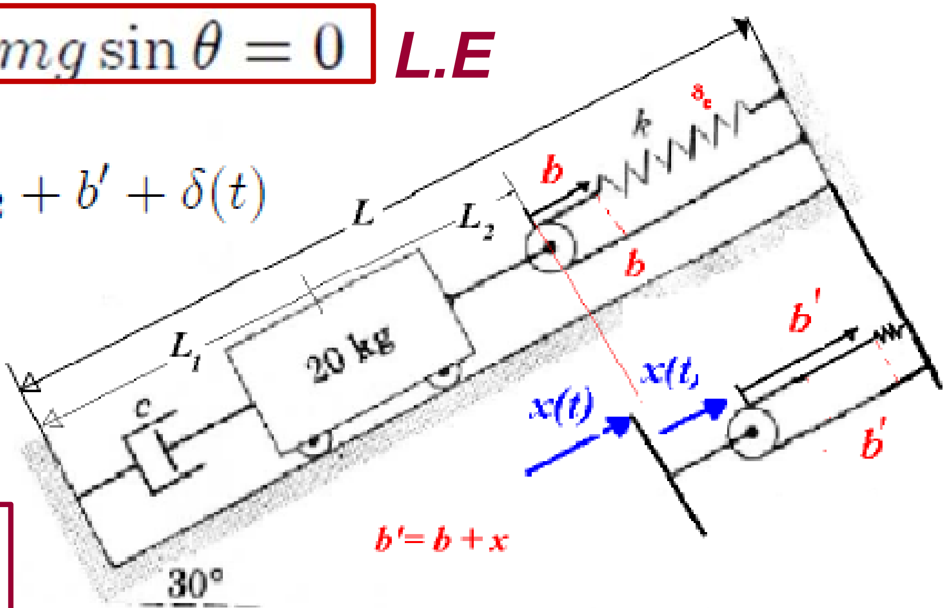
Ligaduras

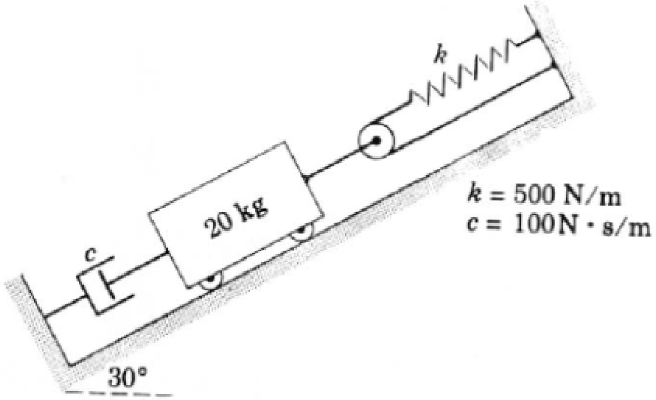
$$L = L_1 + L_2 + b + \delta_e = L_1 + x + L_2 + b' + \delta(t)$$

$$b' = b + x$$

$$\boxed{\delta(t) = \delta_e + b - x - b' = \delta_e - 2x}$$

$$\boxed{2\,k\,(\delta_e - 2\,x(t)) - m\,g\sin\theta - b\dot{x} = m\ddot{x}}$$





$$m\ddot{x} + b\dot{x} + 4\,k\,x = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{2m}\dot{x} + \frac{4k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + 5\dot{x} + 10\,x = 0}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x}(t) + w_0^2\,x(t) = 0$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma = \dfrac{b}{2m} = \dfrac{100}{2\;20} = 2.5\dfrac{rad}{s} \\ w_0^2 = \dfrac{4k}{m} \Longrightarrow w_0 = \sqrt{\dfrac{4k}{m}} = 10\dfrac{rad}{s} \end{array}\right.$$

$$\boxed{El\ sistema\ oscila\ como\ un\ oscilador\ amortiguado}$$

$$w_\gamma = \sqrt{w_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{4k}{m} - (\frac{b}{2m})^2} = 9.68\frac{rad}{s}$$

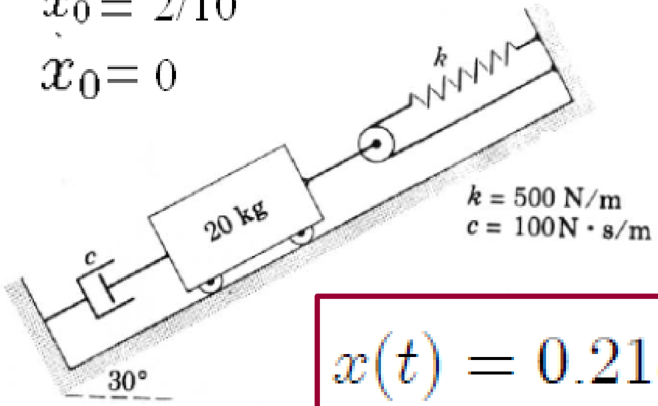
$$T_\gamma = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}} = 0.65s$$

c) La posición de la masa m en todo instante de tiempo

$$x(t) = C e^{-\gamma t} \sin(w_\gamma t + \delta)$$

$x_0 = 2/10$

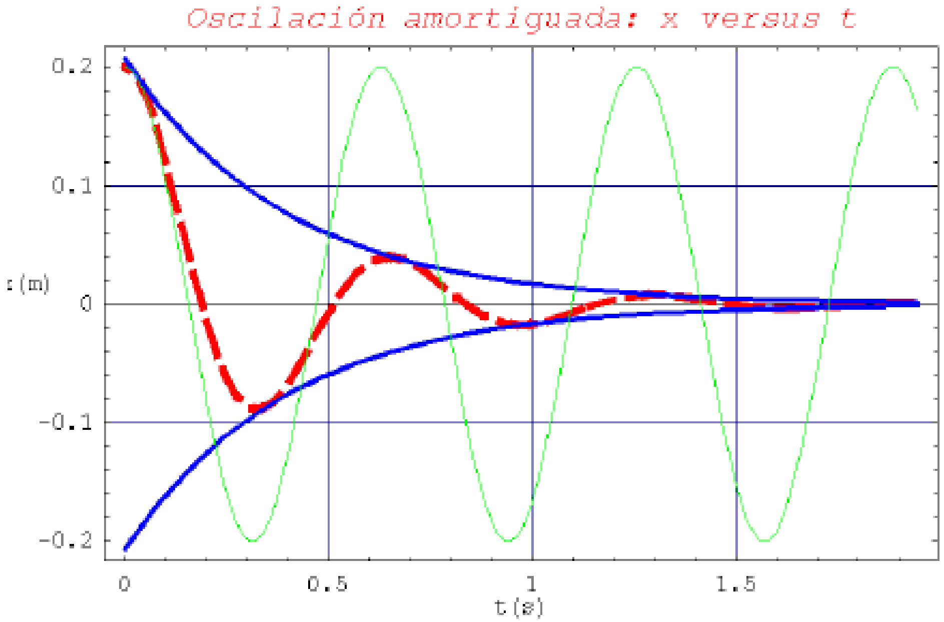
$\dot{x}_0 = 0$

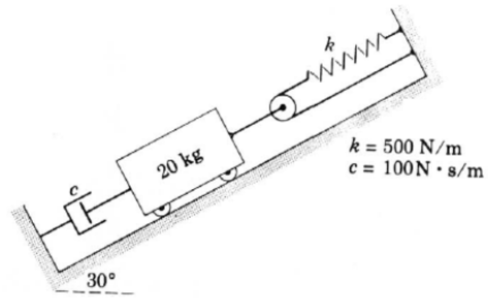


$$C_0 = \frac{\sqrt{x_0^2 w_\gamma^2 + (\dot{x}_0 + \gamma x_0)^2}}{w_\gamma}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{w_\gamma x_0}{x_0 \gamma + \dot{x}_0}\right)$$

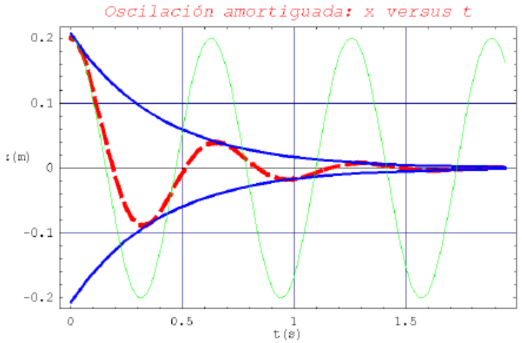
$$\boxed{x(t) = 0.21 e^{-2.5t} \sin(9.68t + 1.32)\ m}$$





d) El cociente de dos amplitudes sucesivas.

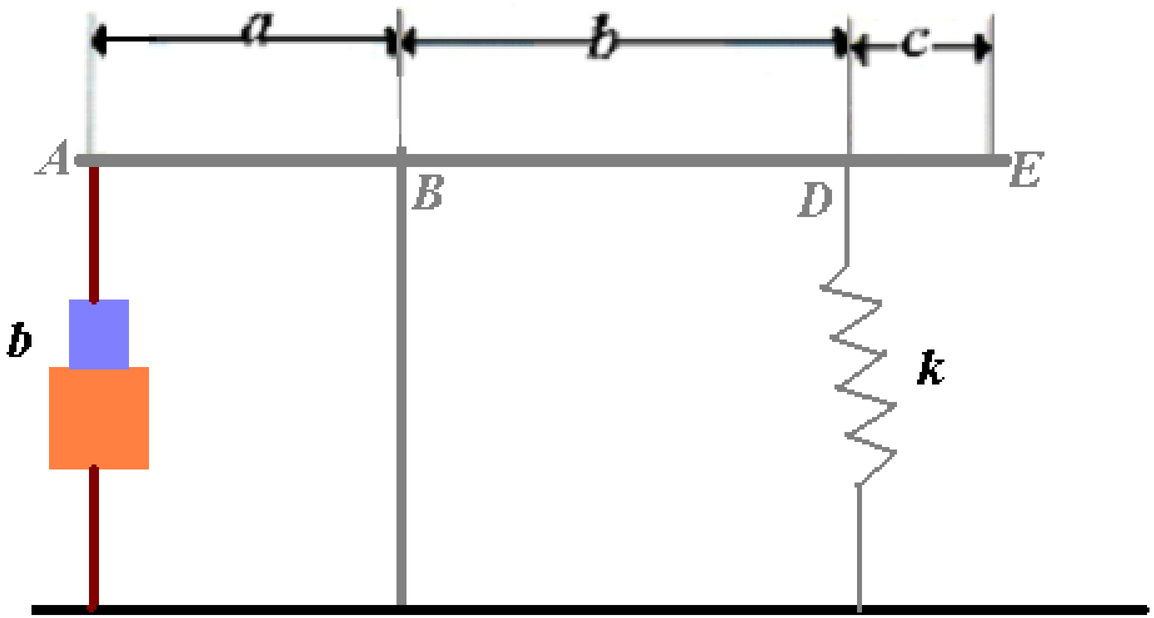
$$x(t) = \boxed{0.21e^{-2.5t}}\sin(9.68t + 1.32)\ m$$



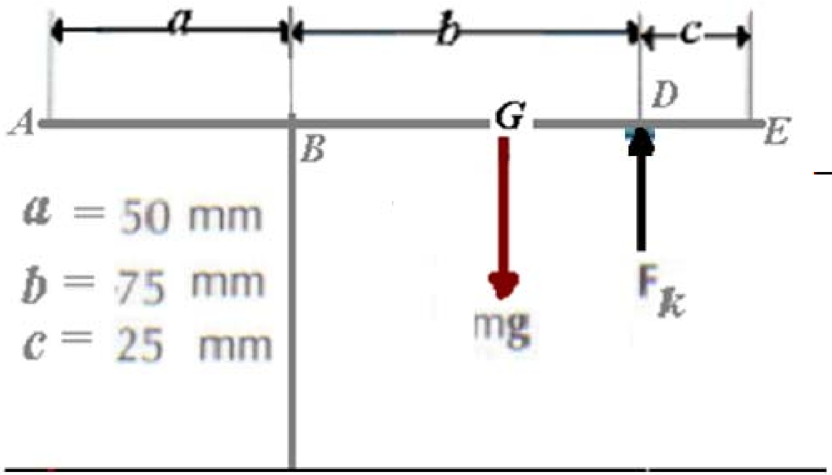
$$\frac{C(t)}{C(t+T_\gamma)} = \frac{0.21\,e^{-2.5t}}{0.21\,e^{-2.5(t+0.65)}} = \frac{0.21\,e^{-2.5\,t}}{0.21\,e^{-2.5\,t}\,e^{-2.5\ 0.65}}$$

$$\boxed{\frac{C(t)}{C(t+T_\gamma)} = e^{2.5\,0.65} = 5.08}$$

TUTV3-11 Considerar una barra esbelta uniforme de masa M = 3 kg que tiene una longitud L = 150 mm y está en equilibrio en la posición horizontal que se indica en la figura. Determinar la longitud de deformación del muelle, para los valores a = 50 mm; b =75 mm; c = 25 mm, k=400 N/m. Coeficiente de viscosidad (b=1.74 N s /m) Determinar la ecuación diferencial del movimiento de la barra.

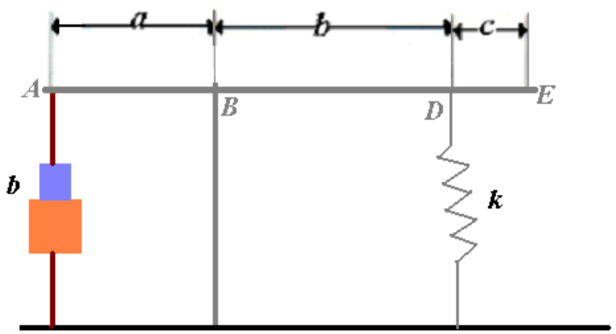


Imponemos la condición de equilibrio para la barra AE (momento de la resultante, respecto del punto B igual a cero) y se tiene, para el diagrama de sólido libre de la barra:



$$\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{M}_B^{\vec{R}} = \overrightarrow{M}_B^{\vec{P}} + \overrightarrow{M}_B^{\vec{F}_k} = \vec{0} \\ -\left(\frac{(a+b+c)}{2} - a\right) M g + F_k b = 0 \\ F_k = k\,\delta_e \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

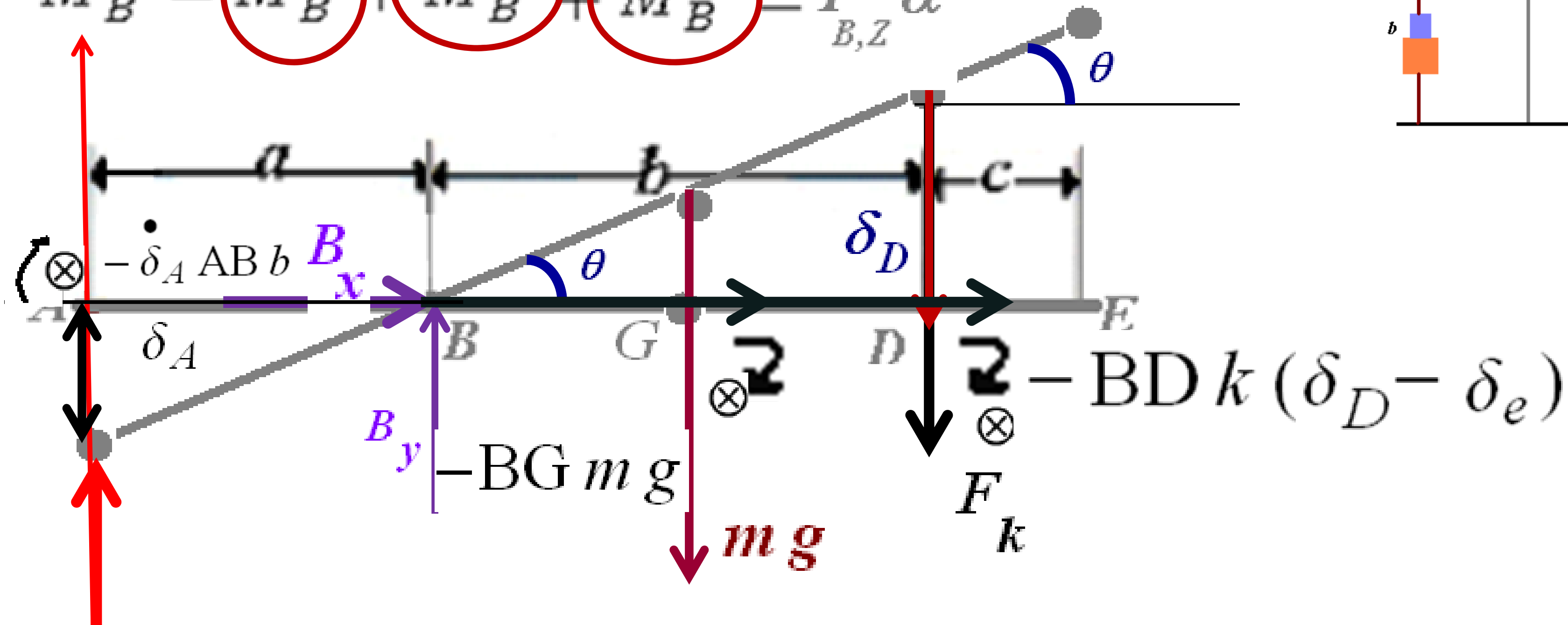
$$-\mathrm{BG}\, m\, g + \mathrm{BD}\, k\, \delta_e = 0$$

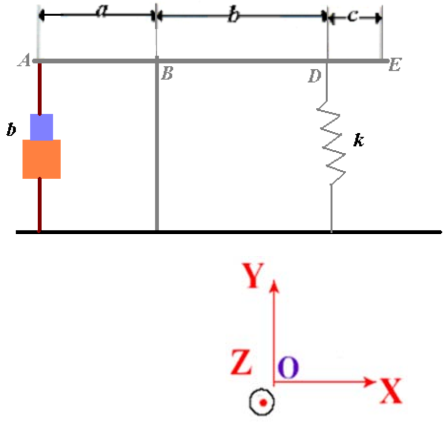


$$\delta_e = \frac{(b+c-a)}{2\,b\,k} g\, M$$

$$\delta_e = 0.025\ m$$

$$\vec{M}_B^{\vec{R}} = \vec{M}_B^{\vec{P}} + \vec{M}_B^{\vec{F}_k} + \vec{M}_B^{\vec{F}_b} = I_{B,Z}\,\vec{\alpha}$$





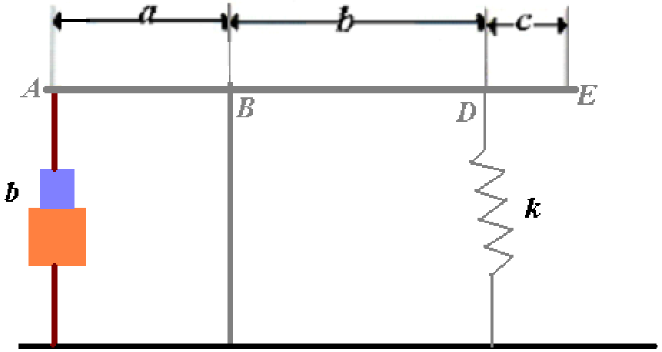
$$-\mathrm{BG}\,m\,g - \mathrm{BD}\,k\,(\delta_D - \delta_e) - \dot{\delta}_A\,\mathrm{AB}\,b = I^{\mathrm{Barra}}{}_{B,z}\,\alpha$$

$$\delta_A \simeq \mathrm{AB}\,\theta$$

$$\delta_D \simeq \mathrm{BD}\,\theta \quad \Longrightarrow \quad I^{\mathrm{Barra}}{}_{B,z}\,\ddot{\theta} + \mathrm{AB}^2\,b\,\dot{\theta} + k\,\mathrm{BD}^2\,\theta = \mathrm{BD}\,k\,\delta_e - \mathrm{BG}\,m\,g$$

$$\alpha = \ddot{\theta}$$

$$I^{\text{Barra}}{}_{B,z}\,\ddot{\theta} + \text{AB}^2\, b\,\dot{\theta} + k\,\text{BD}^2\,\theta = \text{BD}\,k\,\delta_e - \text{BG}\,m\,g$$



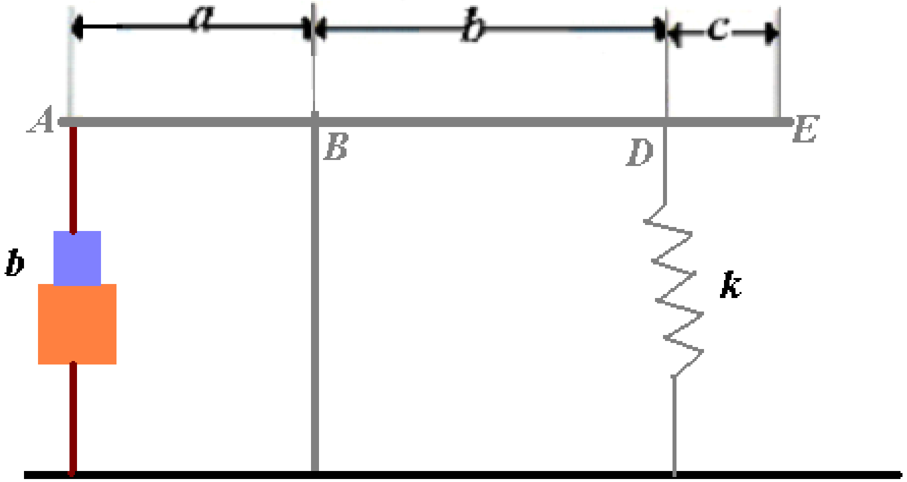
$$-\text{BG}\,m\,g + \text{BD}\,k\,\delta_e = 0$$

$$I^{\text{Barra}}{}_{B,z} = \frac{1}{12}\,m\,l^2 + m\,\text{BG}^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\text{AB}^2\, b}{(\frac{1}{12}\,m\,l^2 + m\,\text{BG}^2)}\,\dot{\theta} + \frac{k\,\text{BD}^2\,\theta}{(\frac{1}{12}\,m\,l^2 + m\,\text{BG}^2)} = 0$$

$\{k \to 400,\ \text{BD} \to 75/1000,\ \text{BG} \to 25/1000,\ m \to 3,$
$l \to 150/1000,\ b \to 1.74,\ \text{AB} \to 50/1000\}$

$$\ddot{\theta} + 0.58\,\dot{\theta} + 300\,\theta = 0$$

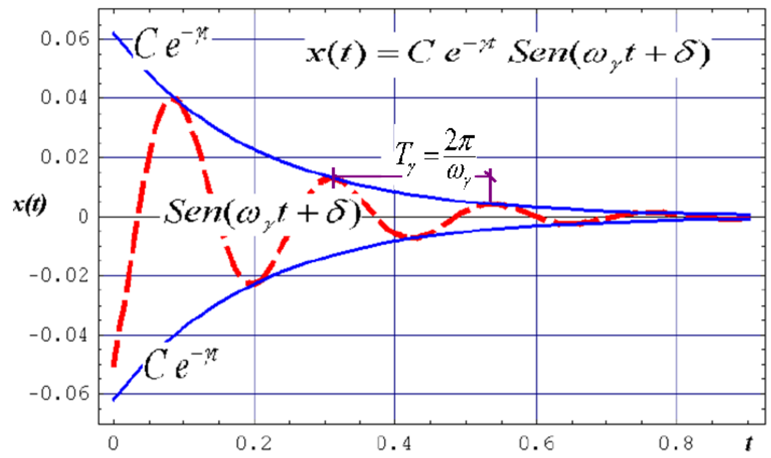


$$\ddot{\theta} + 0.58\,\dot{\theta} + 300\,\theta = 0$$

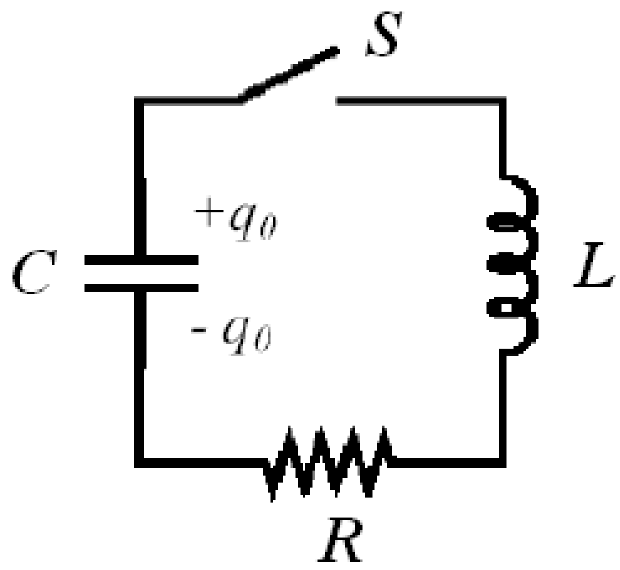
$$w_0 = \sqrt{300}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

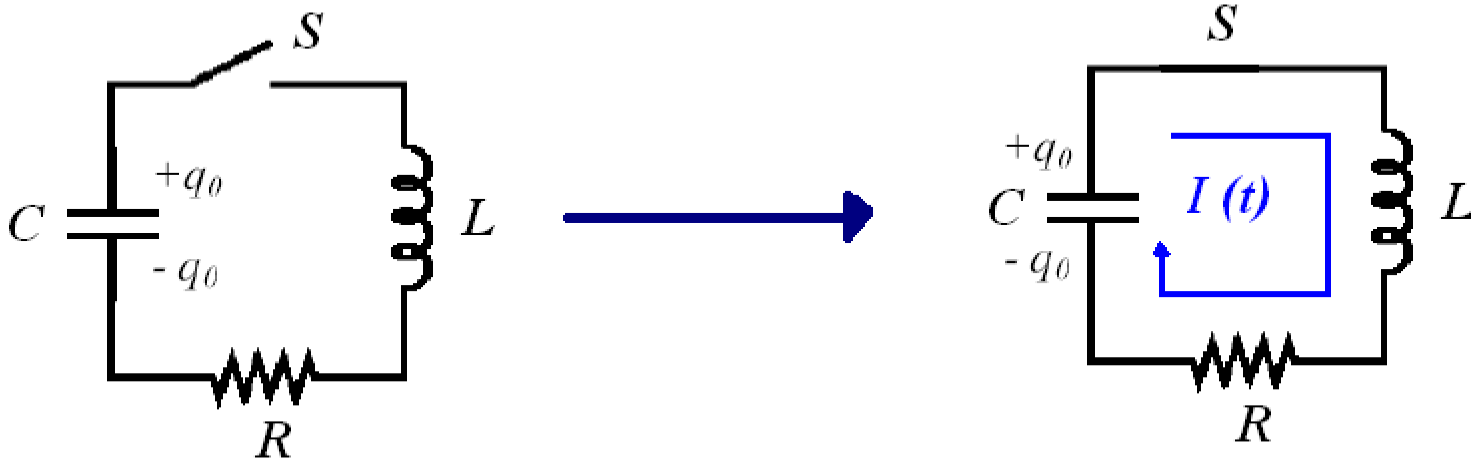
$$w_\gamma = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{b}{2\,m}\right)^2} = \sqrt{300 - \left(\frac{1.74}{6}\right)^2} = 17.32\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$T = \frac{2\pi}{w_\gamma} = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \left(\frac{b}{2\,m}\right)^2}} = 0.36\ \text{s}$$



TUTV3-12. Un condensador de capacidad *C* se encuentra en un circuito *LCR*, como se muestra en la figura, e inicialmente se encuentra cargado, q_0, con el interruptor abierto. En el instante de tiempo *t=0*, se cierra el interruptor y el condensador comienza a descargar. Determinar: a) La ecuación diferencial para *q(t)* durante la descarga del condensador. b) El mayor valor de la resistencia *R* compatible con oscilaciones amortiguadas. c) El período de oscilación. d) El valor de la carga que se ha descargado el condensador en cualquier instante de tiempo. e) La vida media del proceso de descarga.





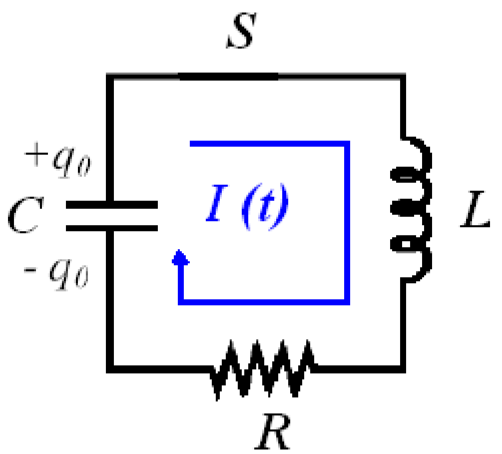
$$IR - V_c + L\frac{dI}{dt} = 0$$

$$V_c = \frac{q}{C}$$

$$I = -\frac{dq}{dt}$$

$$-L\ddot{q} - \dot{q}R - \frac{q}{C} = 0$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$



$$L\,\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0 \Rightarrow \begin{cases} w_0 = \sqrt{\dfrac{1}{L\,C}} \\ 2\,\gamma = \dfrac{R}{L} \rightarrow \gamma = \dfrac{R}{2\,L} \end{cases}$$

Oscilación amortiguada
Solución general

- **Amortiguamiento Subcrítico** → $\omega_0^2 > \gamma^2$, $\omega_\gamma \in \mathbb{R}$
- **Amortiguamiento Crítico** → $\omega_0^2 = \gamma^2$, $\omega_\gamma = 0$
- **Amortiguamiento Supercrítico** → $\omega_0^2 < \gamma^2$, $\omega_\gamma \in \mathbb{C}$

$$w_0^{\,2} - \gamma^2 > 0 \rightarrow \frac{1}{L\,C} > \frac{R^2}{4\,L^2} \rightarrow \frac{1}{C} > \frac{R^2}{4\,L}$$

$$\frac{R^2}{4\,L} < \frac{1}{C} \rightarrow R^2 < \frac{4\,L}{C}$$

$$\boxed{R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}} \Rightarrow R_{\text{límite}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\boxed{x(t) = C\, e^{-\gamma t}\, Sen(\omega_\gamma t + \delta)} \qquad T_\gamma = \frac{2\pi}{\omega_\gamma} \qquad \left\{ \begin{array}{l} C^2 = x_0^2 + \dfrac{(v_0 + \gamma x_0)^2}{\omega_\gamma^2} \\ \tan\delta = \dfrac{\omega_\gamma x_0}{v_0 + \gamma x_0} \end{array} \right.$$

Condiciones iniciales ⇨ $q(t=0) = q_0,\ \dot{q}(t=0) = 0$

$$\gamma = \frac{R}{2\,L} \qquad R_{\text{límite}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$C^2 = q_0{}^2 \left(1 + \frac{1}{1\left(\frac{4\,L}{C\,R^2} - 1\right)} \right), R < R_{\text{límite}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \boxed{C = q_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{4\,L}{C\,R^2} - 1\right)}}}$$

$$\tan\delta = \frac{w_\gamma\, x_0}{v_0 + \gamma x_0} = \frac{\sqrt{w_0{}^2 - \gamma^2}\ \cancel{q_0}}{\gamma\ \cancel{q_0}} = \frac{\sqrt{w_0{}^2 - \gamma^2}}{\gamma} = \frac{\sqrt{w_0{}^2 - \gamma^2}}{\frac{R}{2\,L}} = \sqrt{\left(4\,\frac{L}{C\,R^2} - 1\right)}$$

$$\boxed{\delta = \tan^{-1}\left(\sqrt{\left(4\,\frac{L}{C\,R^2} - 1\right)} \right), \quad 1 < 4\,\frac{L}{C\,R^2}}$$

d) El valor de la carga que se ha descargado el condensador en cualquier instante de tiempo

$$\boxed{q(t) = q_0 \sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{4L}{CR^2} - 1\right)}}\, e^{-\frac{R}{2L}} \sin\left(\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t - \tan^{-1}\left(\sqrt{\left(4\frac{L}{CR^2} - 1\right)}\right)\right)}$$

$$R < R_{\text{límite}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}},\ R^2 < 4\frac{L}{C},\ 1 < 4\frac{L}{CR^2}$$

c) El período de oscilación.

$$T_\gamma = \frac{2\pi}{\omega_\gamma} \Rightarrow T_\gamma = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \gamma^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{\frac{4L - CR^2}{CL^2}}}$$

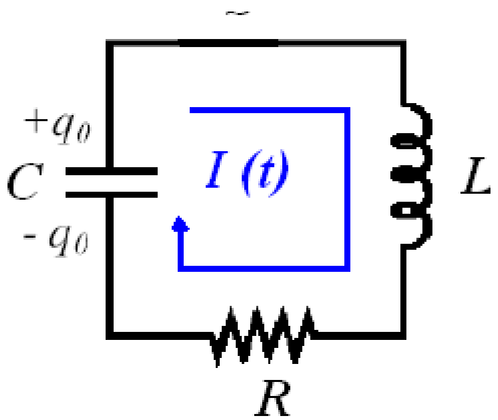
e) La vida media del proceso de descarga.

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R},\ R < R_{\text{límite}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

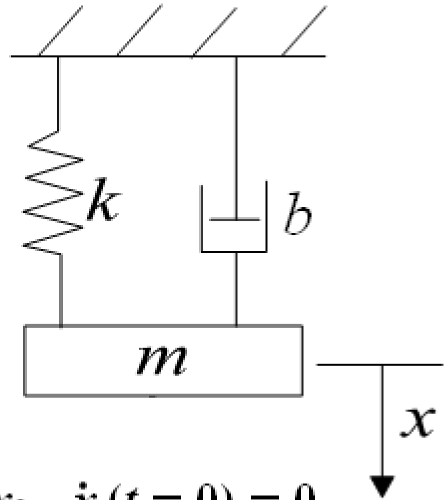
ANALOGÍA CIRCUITOS ELÉCTRICOS-MECÁNICOS

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = 0$$

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$$



$$q(t=0) = q_0,\ \dot{q}(t=0) = 0$$



$$x(t=0) = x_0,\ \dot{x}(t=0) = 0$$

Circuito eléctrico	Sistema mecánico
L, inductancia	***m***, masa
R, resistencia	***b***, coeff. amortiguamiento
1/C, inverso capacidad	***K***, constante del resorte
x(t), desplazamiento	***q(t)***, carga
v(t), velocidad	***i(t)***, corriente

ANALOGÍA CIRCUITOS ELÉCTRICOS-MECÁNICOS

Circuito eléctrico	Sistema mecánico
L, inductancia	***m***, masa
R, resistencia	***b***, coeff. amortiguamiento
1/C, inverso capacidad	***K***, constante del resorte
x(t), desplazamiento	***q(t)***, carga
v(t), velocidad	***i(t)***, corriente

- Aplicación en métodos experimentales para la determinación de las características de un sistema mecánico determinado.

- Un circuito eléctrico se construye con más facilidad que un sistema mecánico, y la variabiliad se estudia variando ***L***, ***C*** y ***R*** no ***m***, ***k***, y ***b***

ANALOGÍA CIRCUITOS ELÉCTRICOS-MECÁNICOS