Tema 1
Oscilaciones libres y forzadas

TUTV-IV
Oscilaciones forzadas

Juan José Miralles Canals. Tutor InterCampus.

Centro Asociado de Albacete

Bibliografía

- French. *Vibraciones y Ondas*. Capítulo 3
- Ryley-Sturges. *Ingeniería Mecánica*. Volumen II. Dinámica. Capítulo 21
- Rañada. *Dinámica Clásica*. Capítulo 6

Oscilaciones forzadas

Para mantener un sistema real oscilando es necesario suministra energí al sistema, ya que tanto la amplitud como la energí disminuyen exponencialmente. Esto se consigue sometiendo el sistem a una fuerza externa.

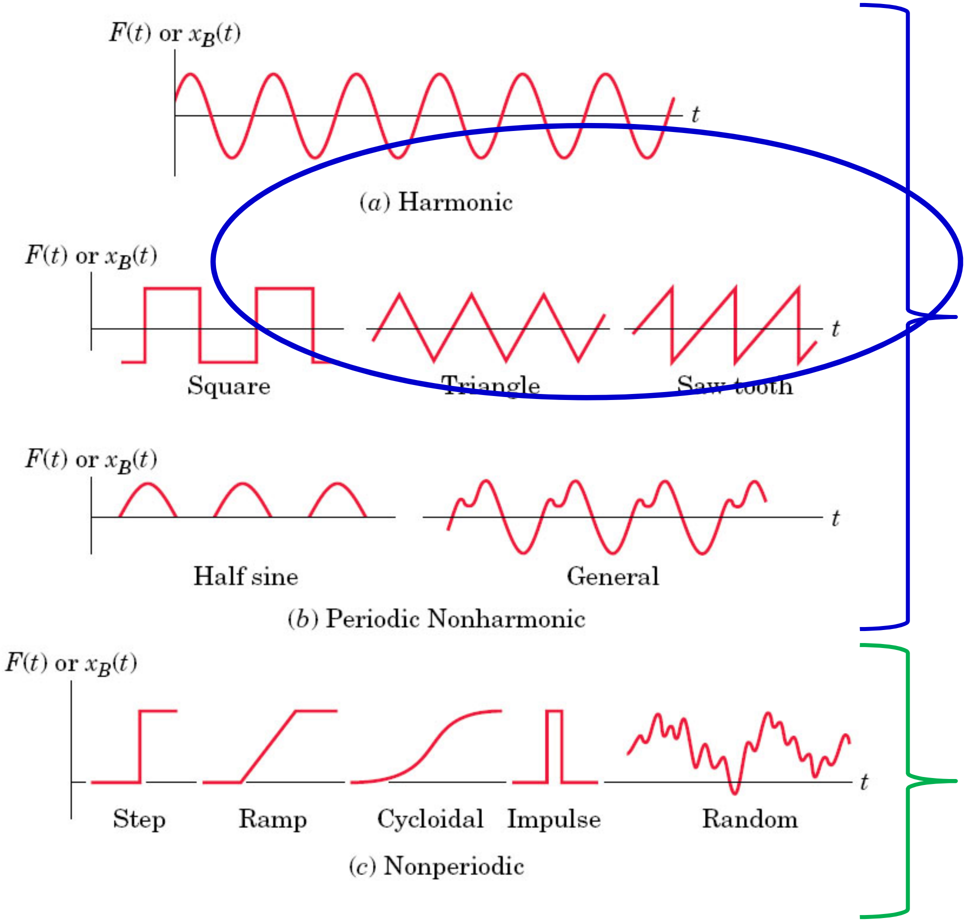
- **Vibraciones de un puente por la influencia de soldados**
- **Vibraciones de un chasis debido a impulsos de una irregularidad de sus eje**
- **Vibración de un diapasón cuando se le expone a una fuerza periódica de una onda sonora**

Las oscilaciones forzadas vibran con la frecuencia de la fuerza externa, pero la respuesta del sistema depende de la relación entre esta frecuencia externa y la frecuencia propia del sistema.

Tipos de forzamientos

Oscilaciones libres:: **Dadas las condiciones iniciales, el sistema evoluciona en el tiempo**

Oscilaciones Forzadas: (más comunes): Se aplica alguna **fuerza externa** al sistema, que de manera continua **dirige la evolución** en el tiempo del mismo.



La fuerza exterior puede ser **periodica** (repetitiva), como en **(a)** y **(b)**

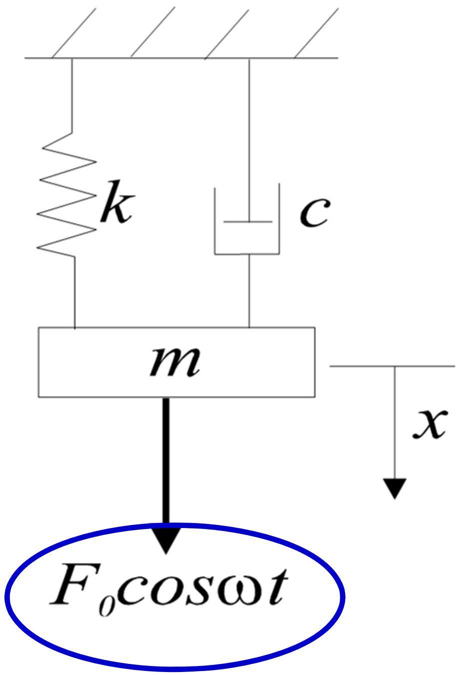
o no-periodica – como en (c)

Resulta que todas las funciones periódicas en (b) puede ser creados mediante la formación de la series infinitas de funciones armónicas (;Análisis de Fourier).

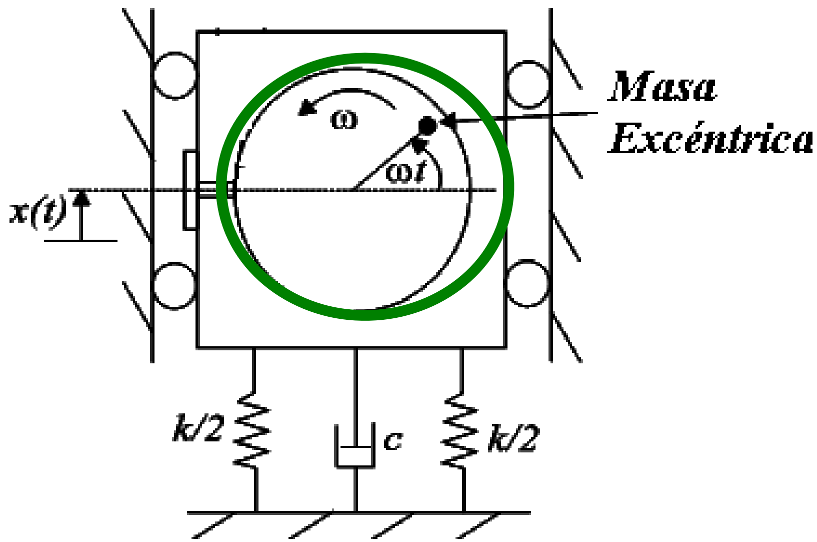
En este curso estudiaremos el caso armónico

Tipos de Forzamiento Armónico

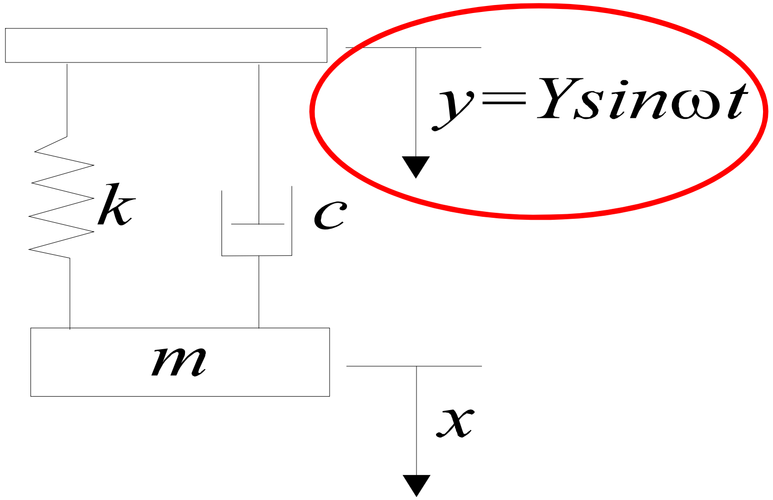
Forzamiento externo



Forzamiento Rotatorio

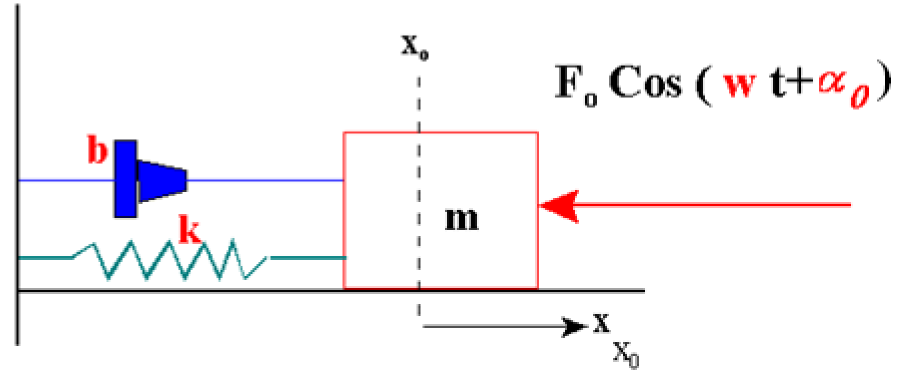


Forzamiento traslación

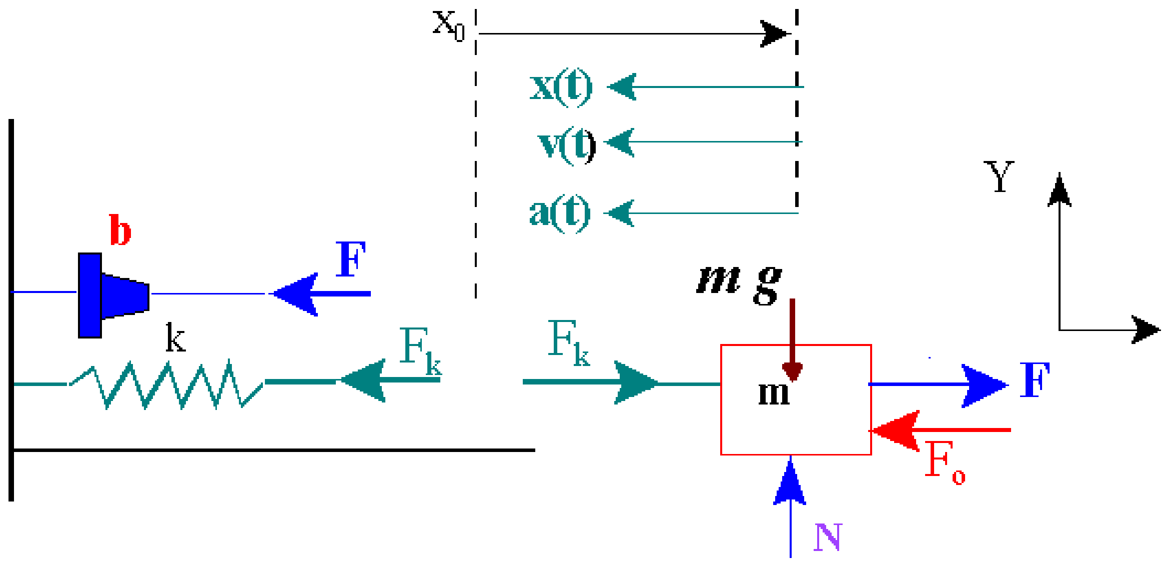


Oscilaciones forzadas

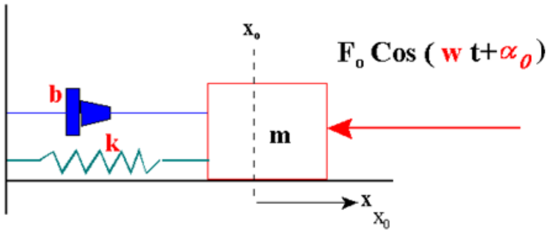
El oscilador forzado se obtiene a partir del oscilador amortiguado, introduciendo una fuerza externa armónica que actúa sobre el mismo.



El diagrama de partícula libre del sistema se obtiene como:



Oscilaciones forzadas



$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(wt + \alpha_0)$$

La solución de la ecuación diferencial de segundo orden del movimiento, **NO HOMOGENEA**, tiene dos partes:

- Solución complementaría de la homogénea: ***$x_h(t)$, misma que la del oscilador amortiguado.***

- Solución particular cualesquiera de la ecuación diferencial No homogénea: ***$x_p(t)$***

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

Consideremos un oscilador amortiguado sometido a una fuerza externa periódica dada por la expresión:

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$$

Se puede demostrar, aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de partícula libre anterior, que el sistema amortiguado bajo la acción de esta fuerza externa nos lleva a la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\, x(t) = g(t)}$$

$$g(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \alpha_0) = g_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$$

Oscilaciones forzadas: Solución

La solución esta compuesta de dos sumandos, el primero nos da la parte transitoria de la solución, el segundo sumando, nos da la parte estacionaria de la solución.

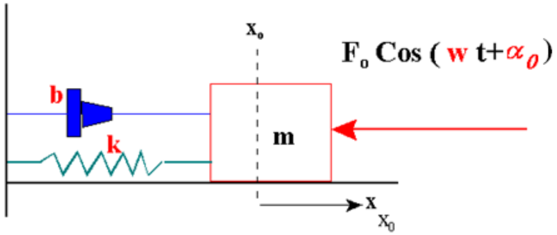
$$x(t) = \underbrace{C\, e^{-\gamma t}\, Sen(\omega_\gamma t + \delta)}_{x_{tran}} + \underbrace{\frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\, Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)}_{x_{est}}$$

La parte transitoria decae rápidamente a cero conforme el tiempo avanza, siendo las constantes C y δ función de la posición y velocidad inicial.

Para tiempos suficientemente grandes domina la **parte estacionaria** de la solución.

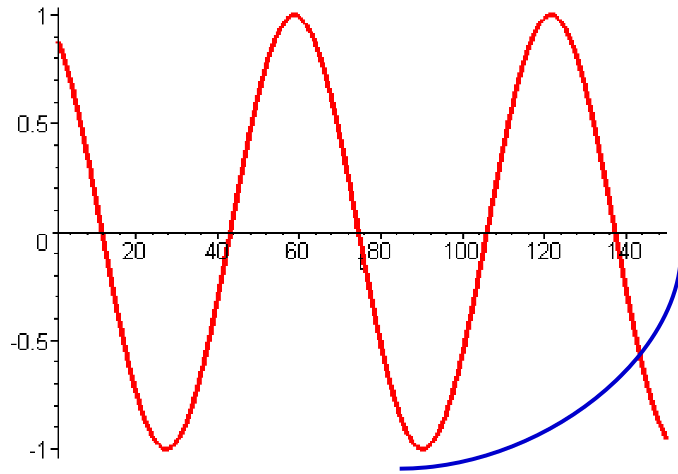
El termino estacionario representa una solución de la misma frecuencia que la fuerza (ω), con una amplitud que depende de la misma y con un defasaje de β-π/2 respecto de la misma.

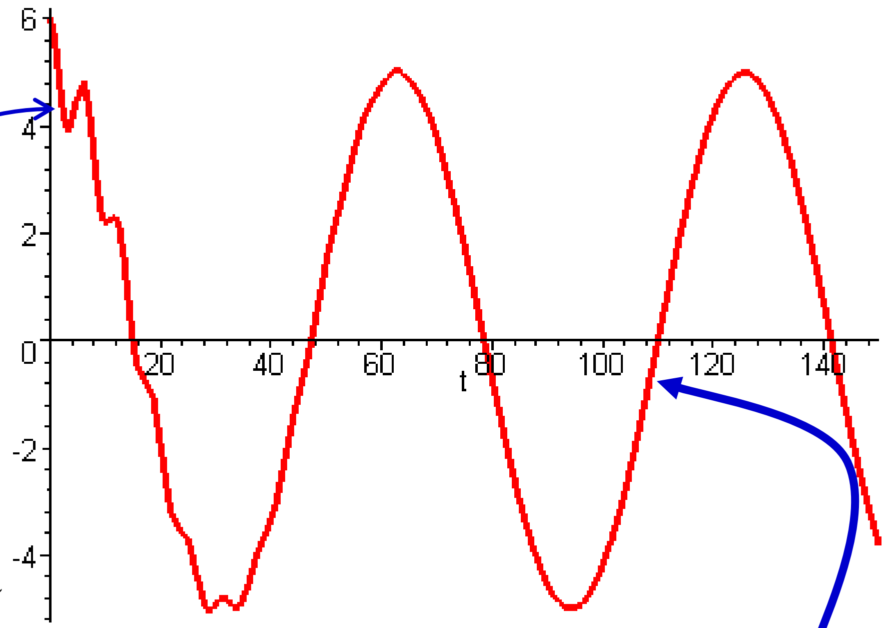
Oscilaciones forzadas: Solución



Desplazamiento, solución: $x(t) = x_h(t)+x_p(t)$

Forzamiento





Vibraciones **transitorias** respecto de la frecuencia natural se producen en el **inicio del movimiento** (superpuestas a las vibraciones estacionarias). Las vibraciones transitorias dependen de las **condiciones iniciales** y **decaen rápidamente** si hay la más mínima pérdida de energía.

Las vibraciones en **estado estacionario** se encuentran a la **frecuencia del forzamiento** y **persisten en el tiempo**. Son **independientes** de las **condiciones iniciales**, y son constantes.

Oscilaciones forzadas: Resonancia

Para tiempos suficientemente grandes, predomina la solución estacionaria, que se puede escribir como

$$x(t) = A\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w_0^2 - w^2}{2\gamma w}\right)$$

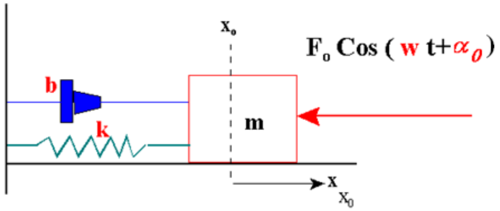
$$A = \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = f(g_0, m, \omega, b)$$

En este caso la amplitud y la diferencia de fase no dependen de las condiciones iniciales. Vemos que el sistema vibra con la frecuencia de la fuerza impulsora y que el movimiento es armónico, en el que la amplitud de la oscilación no disminuye en el tiempo.

➔Al forzar el sistema con su frecuencia natural, la energía se está agregando al sistema de la manera más eficiente posible.

Oscilaciones forzadas: Resonancia

Veamos el caso más simple en el que no hay amortiguamiento



$$A = \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}}$$

A **es pequeña cuando ω es muy distinta a ω_0, pero a medida que se van aproximando, la amplitud aumenta, siendo el caso límite cuando $\omega=\omega_0$, que la amplitud se hace infinita**

En las oscilaciones reales b≠0, y existe un valor característico de la frecuencia impulsora para el cual la amplitud de la oscilación es máxima ➡ $\omega=\omega_0$. Cuando la frecuencia del forzamiento coincide con la frecuencia natural del sistema, entonces, incluso para valores muy pequeños del forzamiento, la amplitud puede llegar a ser infinita, este fenómeno se llama Resonancia.

Resonancia: aquella condición que se presenta para la frecuencia de forzamiento, donde las oscilaciones forzadas tienen su máxima amplitud: $w=w_0$

Oscilaciones forzadas: Resonancia

En condiciones de resonancia, el sistema físico oscilante absorbe el máximo de energía posible trasmitida por la fuerza externa. Además, la fuerza aplicada y la velocidad están en fase de manera que la transferencia de energía es máxima ($P = F\,v$)

Un ejemplo familiar de resonancia se da cuando sintonizamos un receptor de radio o de televisión en cierta estación: Todas las estaciones producen oscilaciones forzadas, sobre el circuito del receptor, pero para cada posición del sintonizador existe una frecuencia natural de oscilación del circuito eléctrico del receptor. Cuando esta frecuencia coincide con la de una estación emisora, la absorción de energía es máxima y, en consecuencia, ésta es la única estación que se sintoniza.

Solución estacionaria

Para tiempos suficientemente grandes, predomina la solución estacionaria, que se puede escribir como:

$$x(t) = A\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w^2{}_0 - w^2}{2\gamma w}\right)$$

$$A = \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\frac{A}{g_0} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

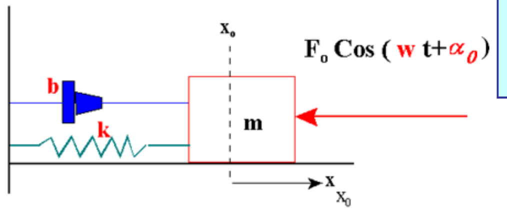
A/g_o se llama el cociente de amplitud o **factor de amplificación**, ya que indica cuánto es de grande la amplitud de vibración, en comparación con la misma fuerza aplicada solo de manera estática.

Sin ningún amortiguamiento (***$\gamma = 0$***) la relación de amplitud tiende a infinito cuando la frecuencia del forzamiento (***w***) coincide con la frecuencia natural del sistema (***w_0***).

➔**Si la frecuencia de forzamiento coincide con la frecuencia natural del sistema, a continuación, incluso para las fuerzas pequeñas, el desplazamiento se hace infinito!**

¡Resonancia!

Solución estacionaria



$$\boxed{x(t) = A\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)}$$

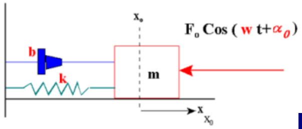
$$A = \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w^2{}_0 - w^2}{2\,\gamma\,w}\right) \qquad \zeta \equiv \frac{\gamma}{w_0}$$

$$A = \frac{g_0}{\sqrt{\omega_0^4\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + (2\,\gamma\,w)^2}}$$

$$A = \frac{g_0}{\sqrt{\omega_0^4\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \omega_0^4\left(2\,\dfrac{\gamma}{w_0}\,\dfrac{w}{w_0}\right)^2}} \Rightarrow \frac{A}{\left(\dfrac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\,\zeta\,\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w^2{}_0 - w^2}{2\,\gamma\,w}\right) = \tan^{-1}\frac{\left(1 - \left(\dfrac{w}{w_0}\right)^2\right)}{2\zeta\,\dfrac{w}{w_0}}$$



Solución estacionaria

$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$x(t) = A\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

$$\zeta \equiv \frac{\gamma}{w_0}$$

$$\delta_{est} = \frac{g_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k}$$

Desplazamiento provocado por **F**$_0$, si se aplicase estáticamente.

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w_0^2 - w^2}{2\gamma w}\right) = \tan^{-1}\frac{\left(1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right)}{2\zeta\frac{w}{w_0}}$$

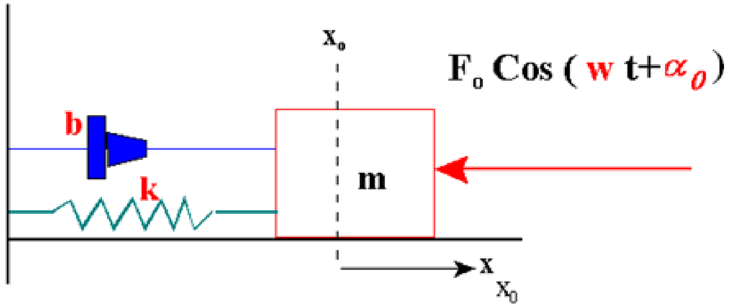
$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{A}{\delta_{est}} = F_{amplif}$$

δ_{est}: Deformación que sufriría el resorte, *k*, si se aplicará estáticamente **F**

Se denomina **factor dinámico de amplificación**, ya que indica el número de veces que la amplitud de la oscilación dinámica es mayor que la deformación estática.

$$A = \delta_{est}\ F_{amplif}$$

Solución estacionaria



$$\zeta = \frac{\gamma}{w_0}$$

$$x(t) = A\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w^2{}_0 - w^2}{2\gamma w}\right) = \tan^{-1}\frac{\left(1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right)}{2\zeta\frac{w}{w_0}}$$

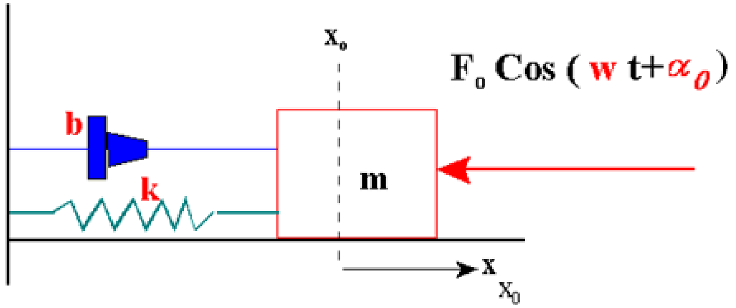
Con amortiguación ($\zeta > 0$) el cociente de amplitud para ***w=w₀*** es $\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{2\zeta}$ el cual es finito,

Observamos que este es > 1 para $\zeta < 0.5$… and < 1 for $\zeta > 0.5$

Por lo tanto se obtiene una amplificación para ***w=w₀*** para $\zeta < 0.5$

Para pequeños valores of ζ el cociente de amplitud para la resonancia puede ser todavía muy grande .

Solución estacionaria



$$\zeta = \frac{\gamma}{w_0}$$

$$x(t) = A\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

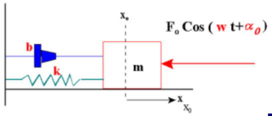
$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w^2{}_0 - w^2}{2\gamma w}\right) = \tan^{-1}\frac{\left(1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right)}{2\zeta\frac{w}{w_0}}$$

$$\dot{x}(t) = Aw\cos(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

1. ? β; ***w*=*w*$_0$** β=0, independientemente de ζ!
2. El desplazamiento esta defasado 90º respecto del forzamiento.
3. Miramos la velocidad, siempre está 90º defasada con respecto al desplazamiento, para cualquier frecuencia de forzamiento, puesto que el seno está 90º defasado respecto del coseno.
4. Si ***w* = *w*$_0$** la velocidad y el forzamiento están en fase

➔Cuando la masa se mueve a la derecha, el forzamiento apunta a la derecha, cuando la masa se mueve hacia la izquierda, la fuerza apunta a la izquierda)



Solución estacionaria

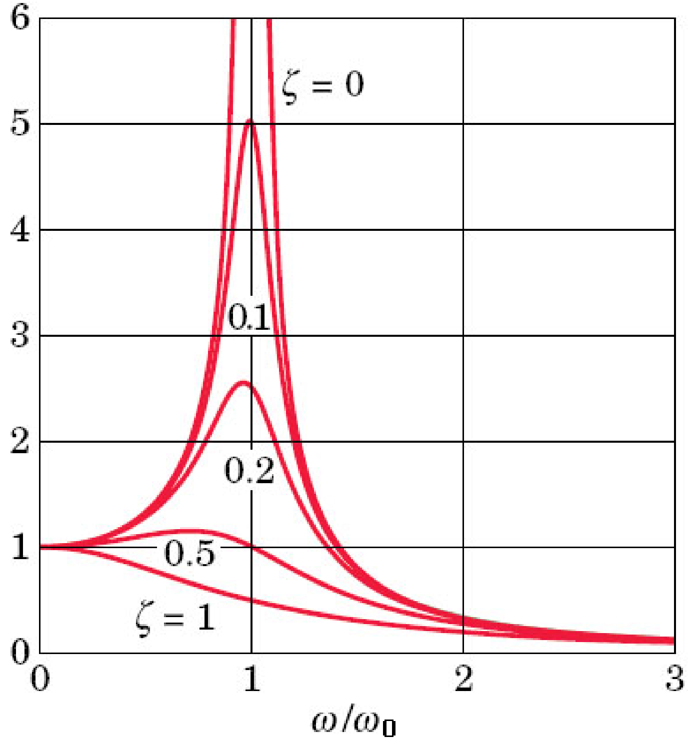
Vamos a obtener una descripción completa graficando el **factor dinámico de amplificación**, ***F_{amplif}*** y β **como función de w/w_0**, para diveros valores de la razón de amortiguamiento ζ.

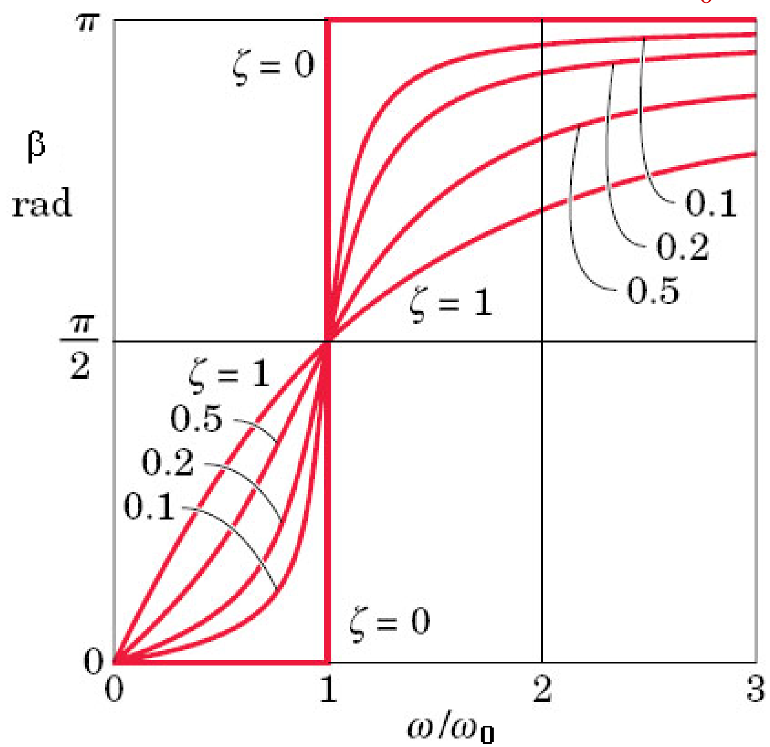
A ests gráficos se les denominan respuesta en frecuencia.

$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{A}{\delta_{est}} = F_{amplif}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w_0^2 - w^2}{2\gamma w}\right) = \tan^{-1}\frac{\left(1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right)}{2\zeta\,\frac{w}{w_0}}$$

$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)}$$

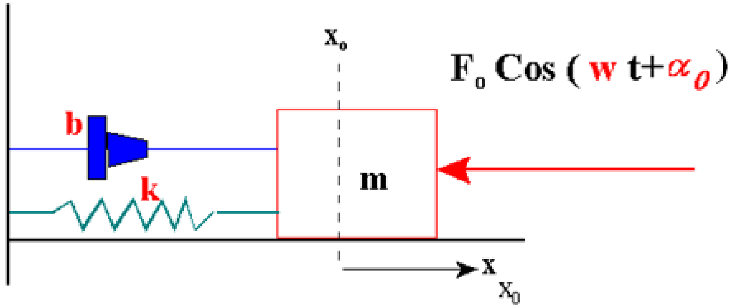




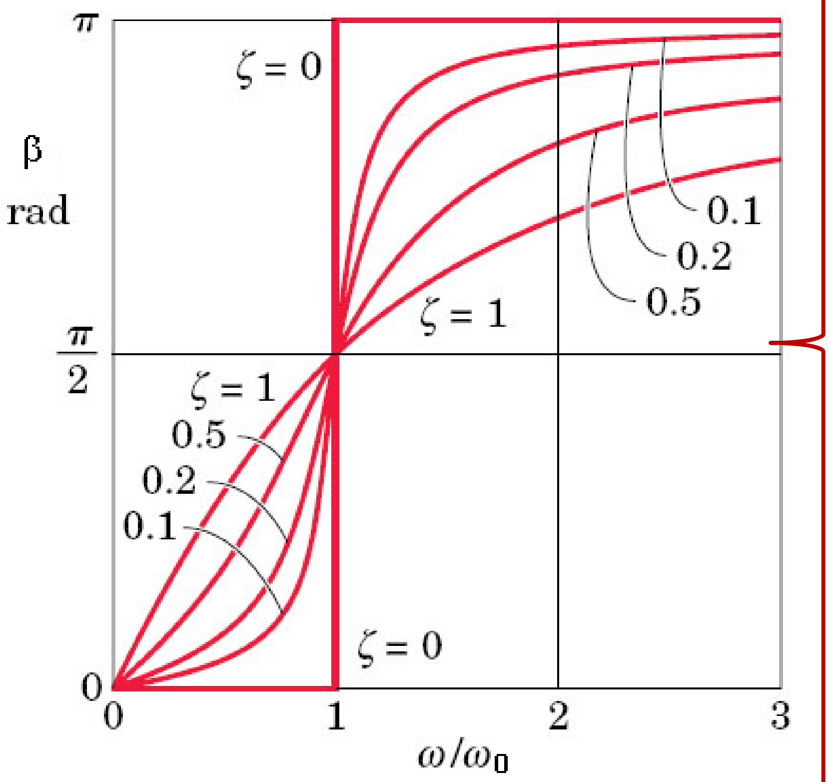
Defasaje F(t), x(t). β

Respuesta en frecuencia del defasaje: $\boldsymbol{\beta}$

$$x(t) = A\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$



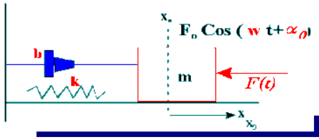
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w_0^2 - w^2}{2\gamma w}\right) = \tan^{-1}\frac{\left(1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right)}{2\zeta\frac{w}{w_0}}$$



•Frecuencias bajas **ζ<1**: la respuesta estacionaria ***x(t)***, está en su mayor parte en fase con la ***F(t)***, (0<β<π/2).

•Resonancia: **ζ=1**. β es independiente de ζ

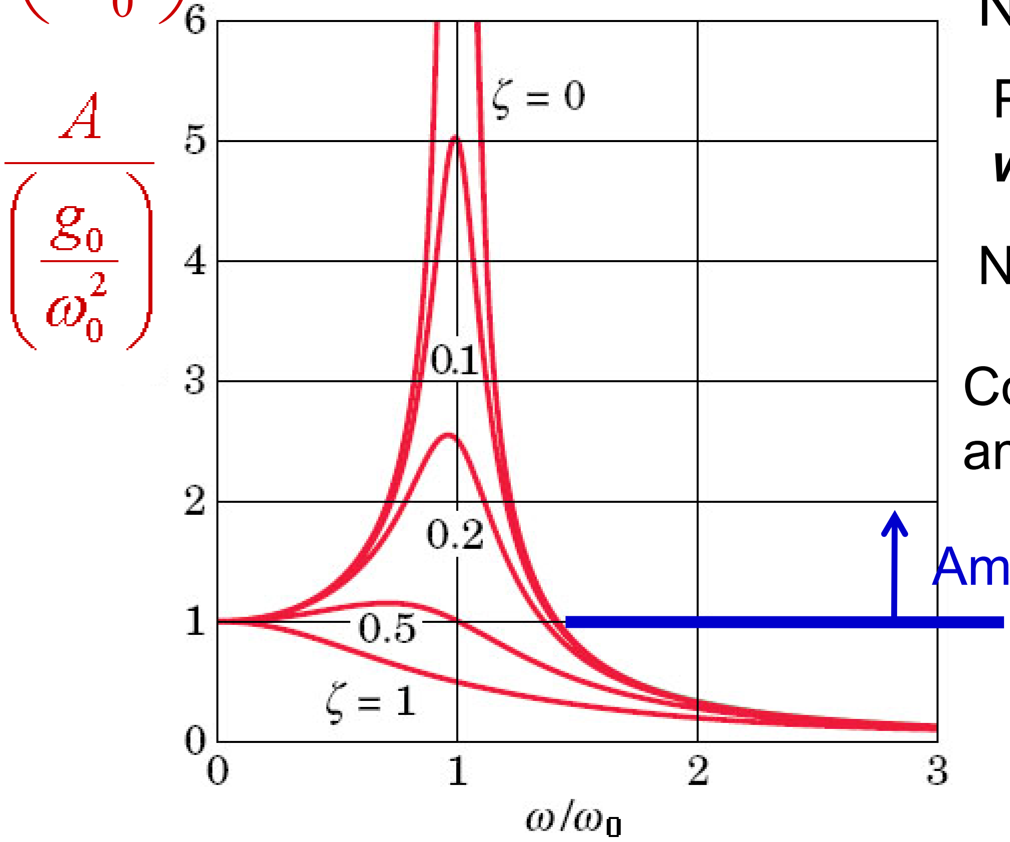
•Frecuencias alta **ζ>1**: La respuesta estacionaria ***x(t)***, está en su mayor parte en oposición de fase con la ***F(t)***, , (π/2< β< π).



Factor dinámico de amplificación

Respuesta en frecuencia del factor dinámico de amplificación: F_{amplif}.

$$\frac{A}{\left(\dfrac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = F_{Amplifica}$$



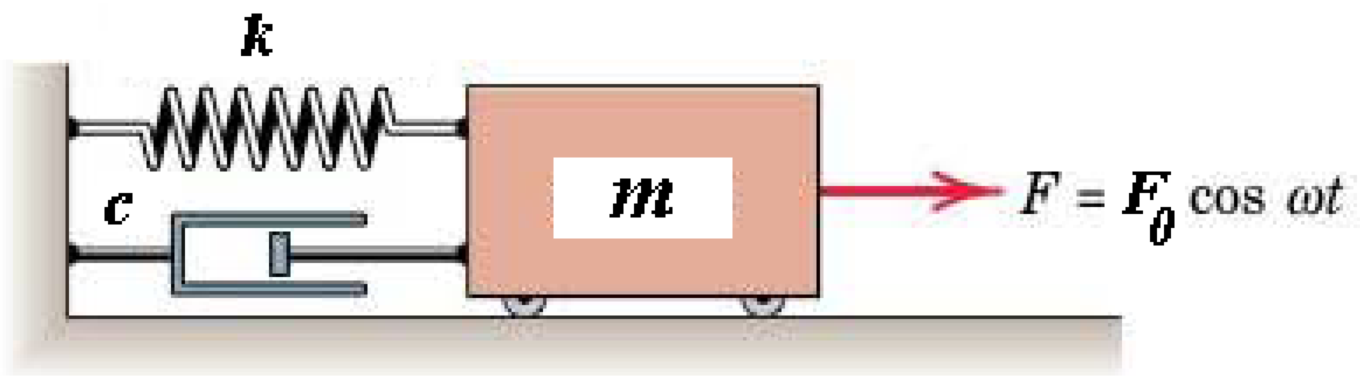
No amplificación para altos ***w/w₀***

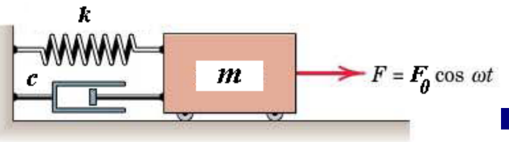
Pequeña amplificación para bajos ***w/w₀***

No amplificación para altos ζ

Com amortiguamiento, el pico de amplificación no es todo para ***w/wₒ***

TUTV4-1 En el sistema mecánico mostrado en la figura, la masa *m* pesa *286.6 N*, el muelle *k = 1051 N/m* y la amplitud *Fo* del forzamiento es de 22.24 N . Si la constante del amortiguador ***c*** es ***35 N s /m***, determinar el rango de la frecuencia de forzamiento, para el cual la magnitud de la respuesta en estado estacionario es menor que 0.076 m.





Determinar un rango de frecuencias de forzamiento, ***w***, para las cuales la amplitud de la oscilación estacionaria sea menor que ***0.076 m***

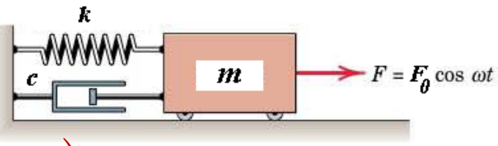
$$w_0 = +\sqrt{\frac{k}{m}} = +\sqrt{\frac{1051}{286.6/9.81}} = 6\,\frac{rad}{s}$$

$$\zeta = \frac{\gamma}{w_0} = \frac{\frac{b}{2m}}{w_0} = \frac{b}{2\,m\,w_0} = \frac{b}{2\,m\,w_0} = \frac{35}{2\,(286.6/9.81)\,6} = 0.099 \cong 0.1$$

$$\frac{g_0}{w_0^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{w_0^2} = \frac{F_0}{m\,w_0^2} = \frac{22.24}{(286.6/9.81)\,6^2} = 0.021\,m$$

$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\frac{A}{(0.021)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{6}\right)^2\right)^2 + \left(2\,0.1\frac{\omega}{6}\right)^2}} < 0.076$$



TUTV4-1

$$\frac{(0.021)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{6}\right)^2\right)^2+\left(2\,0.1\frac{\omega}{6}\right)^2}}<0.076$$

$$0.021^2<0.076^2\left(\left(1-\left(\frac{\omega}{6}\right)^2\right)^2+\left(2\,0.1\frac{\omega}{6}\right)^2\right)$$

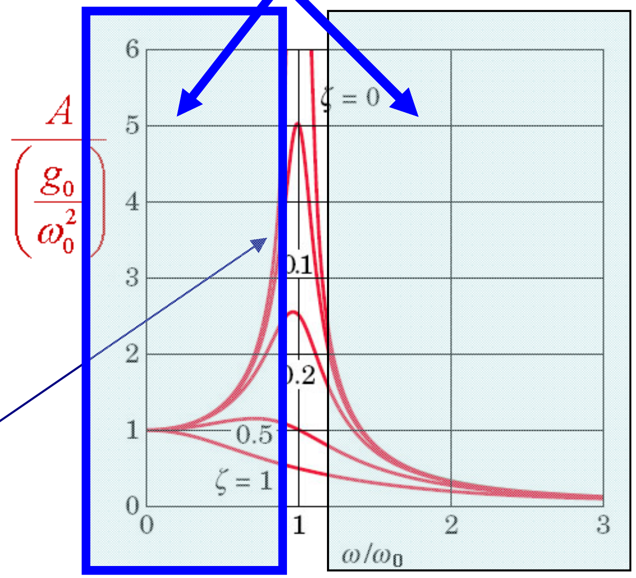
$$0.021^2<4.46\times10^{-6}\,w^4-0.00031\,w^2+0.0058$$

$$\text{InequalitySolve}\left[0.021^2<0.076^2\left(\left(1-\left(\frac{w}{6}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\,0.1}{6}\right)^2 w^2\right),\ w\right]$$

$$w<-6.49472\ \lor\ -5.32716<w<5.32716\ \lor\ w>6.49472$$

$$\omega<5.32\ rad/s$$
$$\omega>6.5\ rad/s$$

Márgenes de seguridad



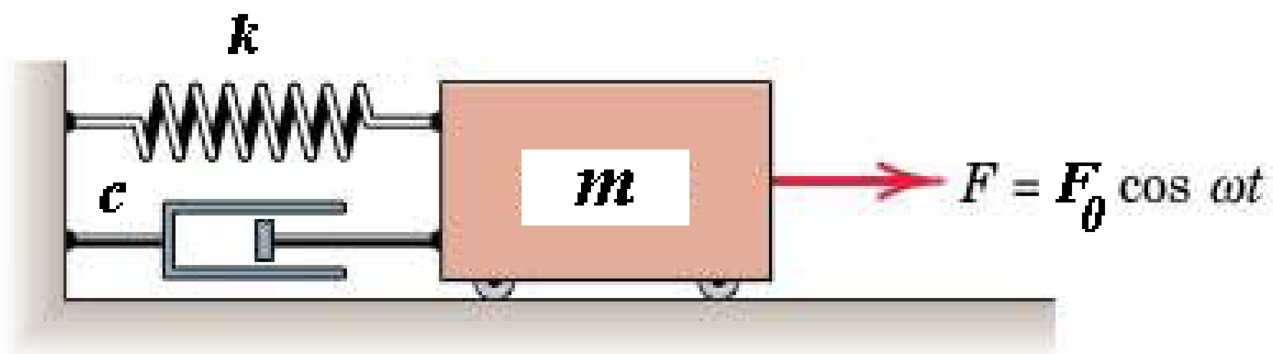
$$\zeta=\frac{\gamma}{w_0}\approx0.1$$

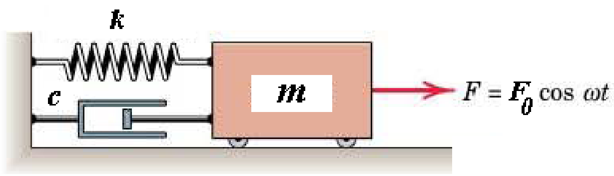
Frecuencia natural del sistema

$$w_0=+\sqrt{\frac{k}{m}}=6\ \frac{rad}{s}$$

Curva relevante (ζ=0.1)

TUTV4-2 En el sistema mecánico mostrado en la figura, la masa *m* pesa *286.6 N*, el muelle $k = 1051\ N/m$ y la amplitud F_o del forzamiento es de *22.24 N* . Si la constante del amortiguador ***c*** es nula, determinar el rango de la frecuencia de forzamiento, para el cual la magnitud de la respuesta en estado estacionario es menor que 0.076 m.





TUTV4-2

$$w_0 = +\sqrt{\frac{k}{m}} = +\sqrt{\frac{1051}{286.6/9.81}} = 6\,\frac{rad}{s} \qquad \zeta = 0$$

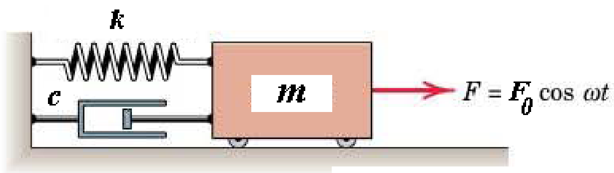
$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \xrightarrow{\zeta = 0} \frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)}$$

Tenemos dos soluciones posibles:

$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \qquad \omega < \omega_0$$

$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1\right)} \qquad \omega > \omega_0$$

Usando las dos soluciones posibles mantenemos la amplitud A positiva para todas las frecuencias *w* de forzamiento.



TUTV4-2

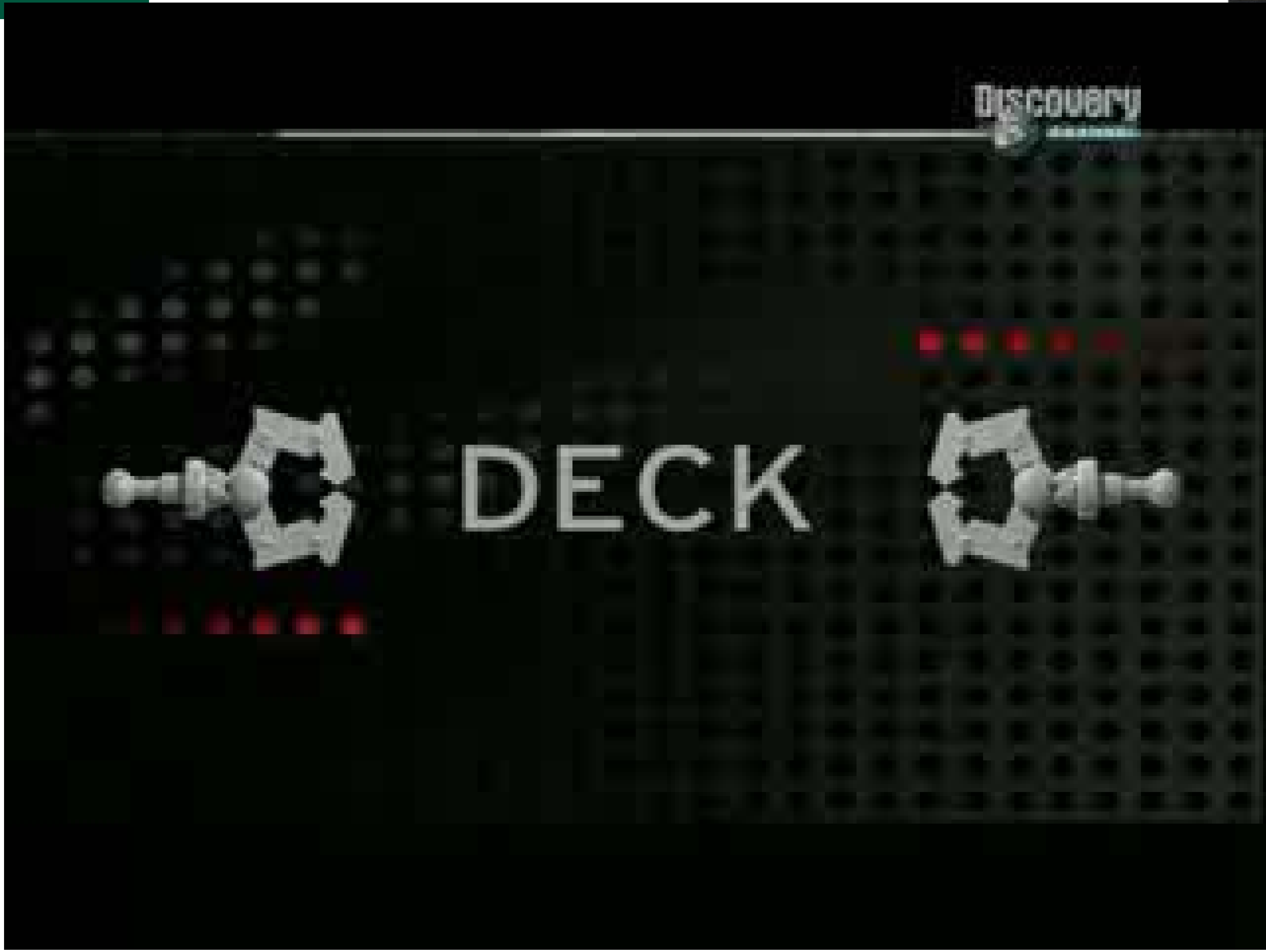
$$\frac{A}{\left(\dfrac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \qquad \frac{g_0}{w_0^2} = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{w_0^2} = \frac{F_0}{m\,w_0^2} = \frac{22.24}{(286.6/9.81)\,6^2} = 0.021\,m$$

$$\omega < \omega_0 \qquad A = \frac{0.021}{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{6}\right)^2\right)} < 0.076 \qquad \boxed{\omega < 5.1\,rad/s}$$

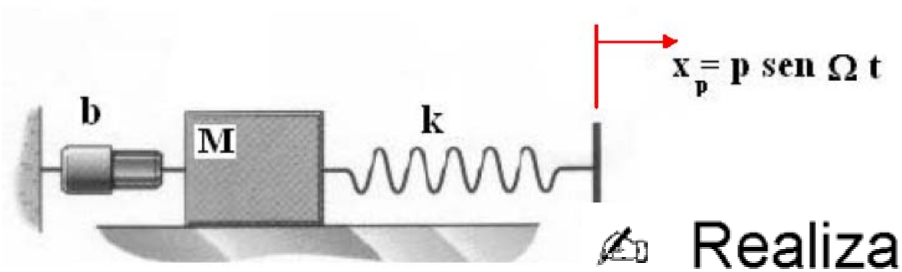
$$\omega > \omega_0 \qquad A = \frac{0.021}{\left(\left(\dfrac{\omega}{6}\right)^2-1\right)} < 0.076 \qquad \boxed{\omega > 6.78\,rad/s}$$

Comparando con el caso amortiguado anterior, el rango de frecuencias peligrosas es mayor aquí (como era de esperar)

Puente de Tacoma

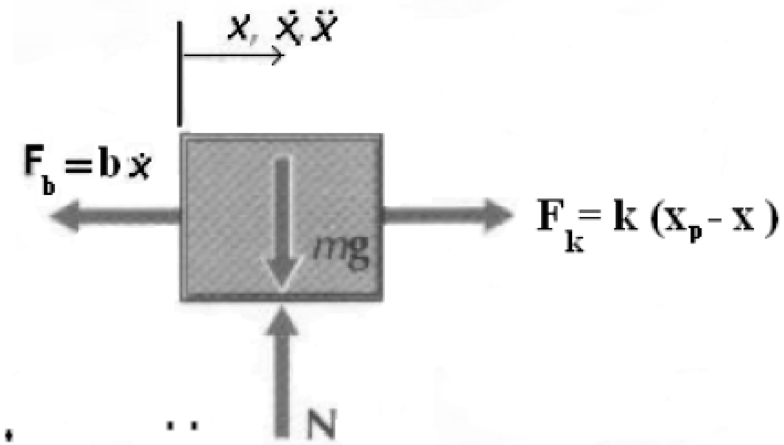


Forzamiento inducido por traslación



Apoyos sometidos a m.a.s

✍ Realizamos el digrama de sólido libre de M



La deformación del muelle, en el instante t, es la diferencia entre lo que se desplaza el apoyo móvil y lo que se desplaza la masa.

$$\delta(t) = x_p(t) - x(t)$$

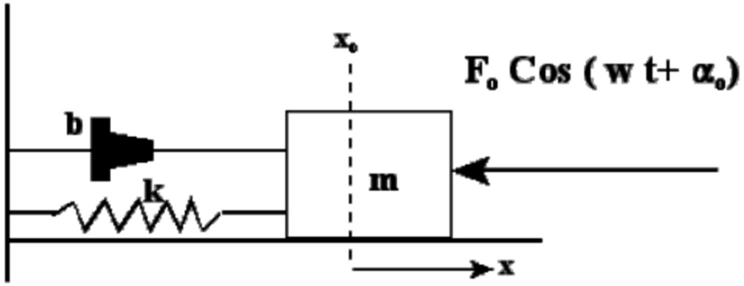
$$\left.\begin{aligned} N - mg &= 0 \\ F_k - F_b &= m\ddot{x} \\ F_k &= k(x_p - x) \\ F_b &= b\dot{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

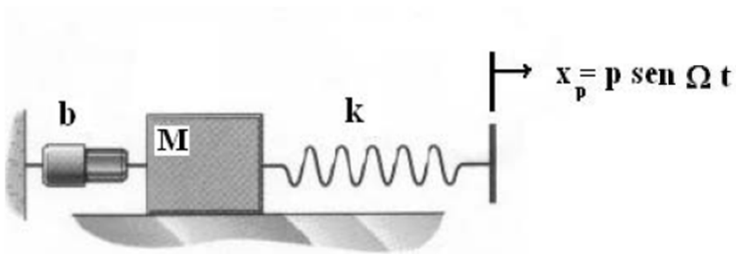
$$k(x_p - x) - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$N = mg$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = k\,p\,\text{sen}\,\Omega t}$$

Forzamiento inducido por traslación





$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\,\gamma\,\dot{x}(t) + w_0^{\,2}\,x(t) = k\,p\,\mathrm{sen}\,\Omega\,t}$$

$$2\,\gamma = \frac{b}{m}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$g_0 = \frac{k\,p}{m}$$

$$\mathrm{sen}\,\Omega\,t = \mathrm{Cos}\left(\Omega\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$w = \Omega$$

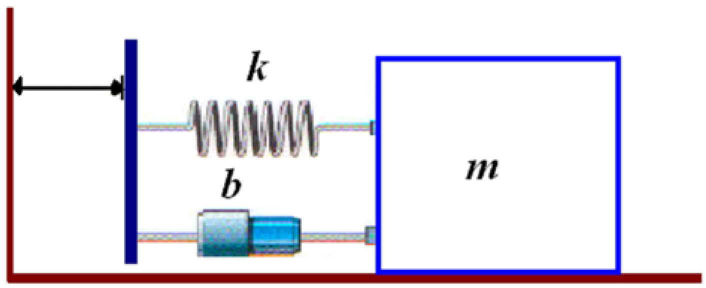
$$\alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = C\,e^{-\gamma t}\,Sin\,(w_\gamma\,t + \delta) + \frac{g_o}{\sqrt{(w_o^{\,2} - w^2)^2 + 4\,\gamma^2 w^2}}\,Sin\,(w\,t + \alpha_o + \beta)$$

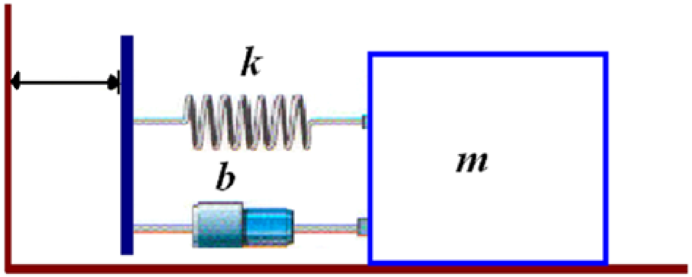
$$\beta = Arct\left(\frac{w_o^{\,2} - w^2}{2\,\gamma\,w}\right)$$

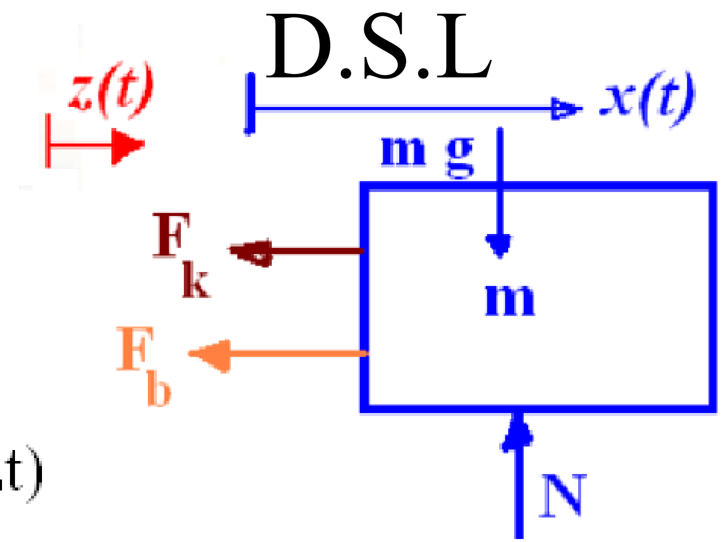
TUTV4-3 Un bloque de 20 kg se desliza por una superficie exenta de rozamiento, según se indica en la figura. El resorte de k = 50 N/m y el amortiguador de constante b = 40 Ns/m, están unidos a una pared que oscila como un m.a.s, según la ley: $z_p(t)$=5 sen5t mm. Determinar: a) La ecuación diferencial del movimiento del bloque. b) A la vista de la ecuación obtenida, ¿0scila el sistema? c) En caso de que oscile, la amplitud de oscilación mucho tiempo después de iniciado el movimiento. d) Establecer un entorno de seguridad, para el diseño del mecanismo, referido a la frecuencia de oscilación de la pared. e) Realizar una representación gráfica de la amplitud de oscilación en función de la frecuencia

$z_p(t) = \text{zo sen}\,\Omega\ t\ mm$



$z_p(t) = \text{zo sen}\,\Omega\ t\ \ mm$





$$F_k = k\,\delta(t) = k\left(x - z_p(t)\right) = k\,(x - \text{ zo sin } \Omega t)$$

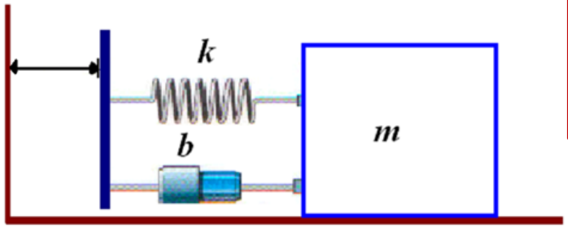
$$F_b = b\,v = b\,\frac{d}{d\,t}\,\delta(t) = b\,\frac{d\left(x - z_p(t)\right)}{d\,t} = b\left(\dot{x} - \dot{z}_p(t)\right) = b\,(\dot{x} - \text{zo}\,\Omega\,\cos\Omega\ t)$$

$$-\,k\,(x - \text{zo}\sin\Omega\,t) - b\,(\dot{x} - \text{zo}\,\Omega\cos\Omega\,t) = m\,\ddot{x}$$

$$m\,\ddot{x} + k\,x\ +\ b\,\dot{x}\ =\ k\,\text{zo}\sin\Omega\,t + b\,\text{zo}\,\Omega\cos\Omega\,t$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x + \frac{b}{m}\,\dot{x}\ =\ \frac{k}{m}\,\text{zo}\sin\Omega\,t + \frac{b}{m}\,\text{zo}\,\Omega\cos\Omega\,t}$$

$z_p(t) = \text{zo sen}\,\Omega\ t\ mm$



$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x + \frac{b}{m}\,\dot{x} = \frac{k}{m}\,\text{zo}\sin\Omega\,t + \frac{b}{m}\,\text{zo}\,\Omega\cos\Omega\,t$$

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = g_0\cos(\omega t + \alpha_0)$$

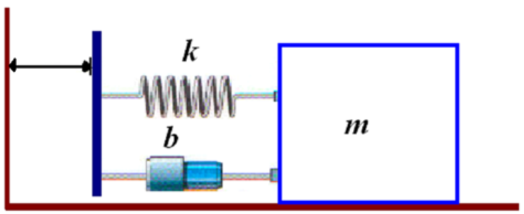
$$A\,\text{Sen}\,X + B\,\text{Cos}\,X = \sqrt{A^2+B^2}\;\text{Sen}\,(X+\varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x + \frac{b}{m}\,\dot{x} = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\,\text{zo}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\,\text{zo}\,\Omega\right)^2}\;\text{Cos}\left[\left(\Omega\,t + \text{Arctan}\left[\frac{b\,\Omega}{k}\right]\right) - \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\ddot{x} + 2\,\gamma\,\dot{x} + w_0{}^2\,x = g_0\,\text{Cos}(\Omega\,t + \alpha_0)$$

$z_p(t) = \text{zo sen}\,\Omega\ t\ mm$



$$\ddot{x} + 2\,\gamma\,\dot{x} + w_0{}^2\,x = g_0\,\text{Cos}(\Omega\,t + \alpha_0)$$

$$2\,\gamma = \frac{b}{m}$$

$$C = \sqrt{x_0{}^2 + \frac{(v_0 + \gamma\,x_0)^2}{w_\gamma}}$$

$$g_0 = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\,\text{zo}\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\,\text{zo}\,\Omega\right)^2}$$

$$w_\gamma = \sqrt{\text{wo}^2 - \gamma^2}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{x_0\,w_\gamma}{v_0 + \gamma\,x_0}\right)$$

$$m = 20\ \text{kg}$$

$$\beta = \text{Artg}\left(\frac{\text{wo}^2 - \Omega^2}{2\,\gamma\,\Omega}\right)$$

$$\alpha_0 = \text{Arctan}\left[\frac{b\,\Omega}{k}\right] - \frac{\pi}{2}$$

$$k = 50\ N/m$$

$$\gamma = \frac{b}{2\,m} = 1\ \text{rad}/s$$

$$z_0 = 5\ \text{mm}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1.58\ \text{rad}/s$$

$$\Omega = 8\ \text{rad}/s$$

$$\alpha_0 = -0.16\ \text{ad}/s$$

$$b = 40\ N\,s/m$$

$$w_\gamma = 1.22\ \text{rad}/s$$

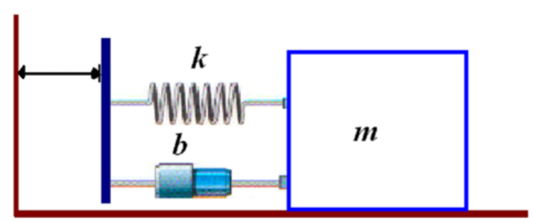
$$g_0 = 0.081\ \frac{m}{s^2}$$

$$\ddot{x} + 2\,\dot{x} + 2.5\,x = 0.081\ \text{Cos}(8\,t - 0.16)$$

$$x_{\text{estacio}}(t) = g_0\,\frac{\text{sen}(\Omega\,t + \beta + \alpha_0)}{\sqrt{(\text{wo}^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\gamma^2\,\Omega^2}}$$

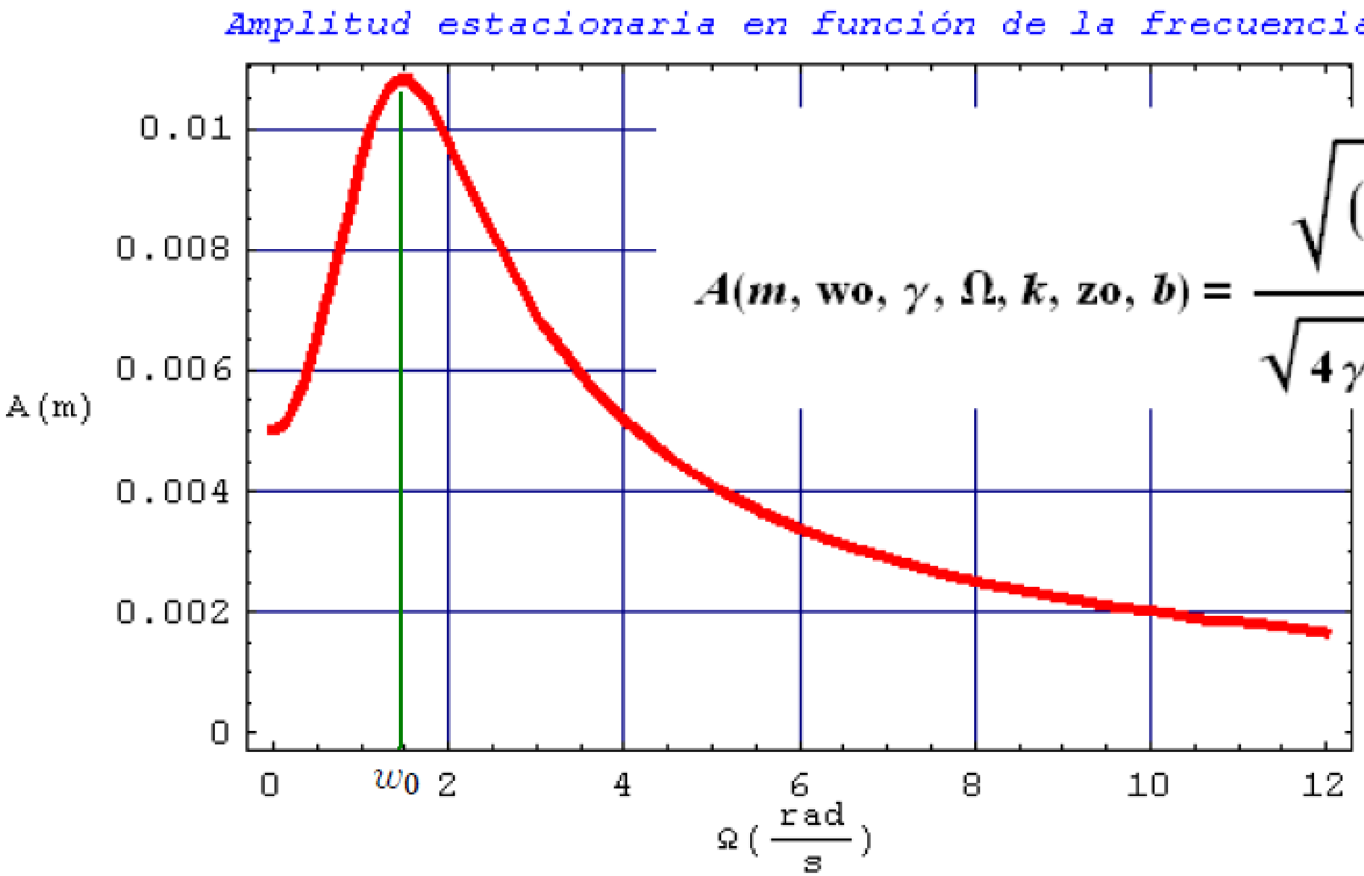
$$x_{\text{estacio}}(t) = 0.00127\ \text{sen}(8\,t - 0.155 - 1.301)$$

$$x_{\text{estacio}}(t) = 0.00127\ \text{sen}(8\,t - 1.456)$$



$$\ddot{x} + 2\,\dot{x} + 2.5\,x = 0.081\,\mathrm{Cos}(8\,t - 0.16)$$

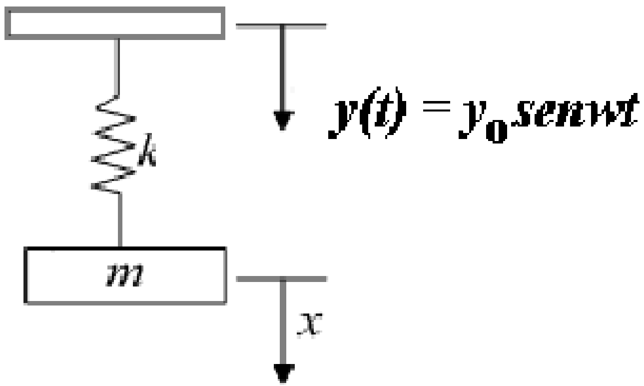
$$x_{\mathrm{estacio}}(t) = 0.00127\,\mathrm{sen}(8\,t - 1.456)$$

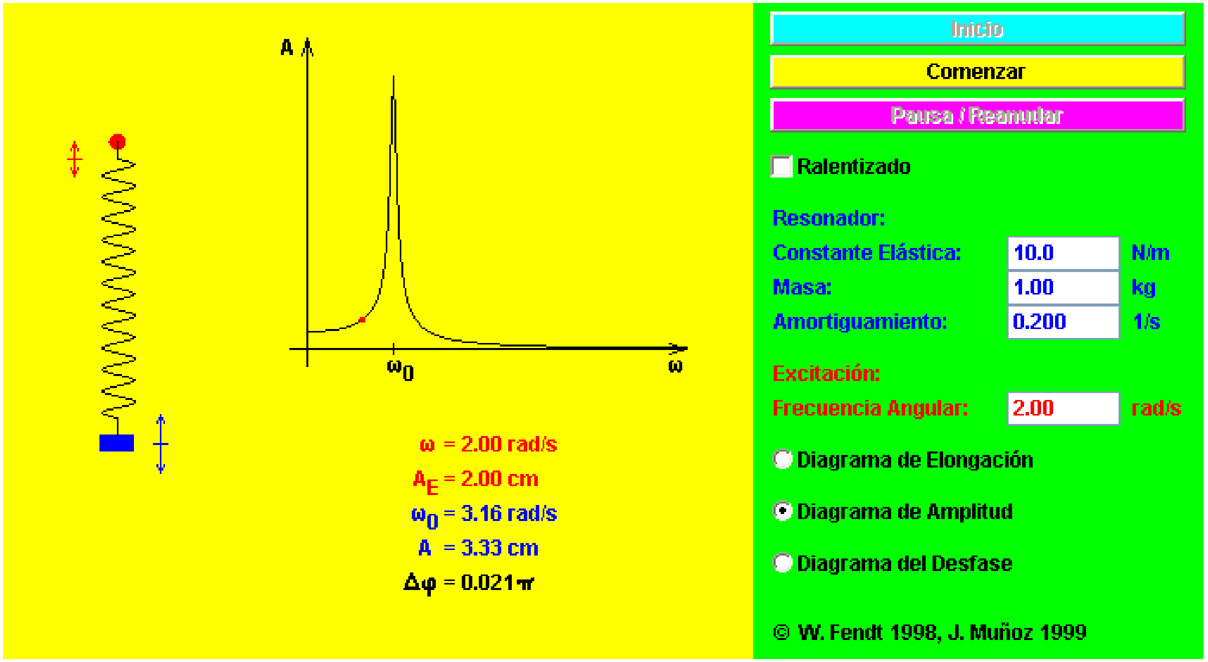


$$A(m, \mathrm{wo}, \gamma, \Omega, k, \mathrm{zo}, b) = \frac{\sqrt{\left(\frac{k\,\mathrm{zo}}{m}\right)^2 + \left(\frac{b\,\mathrm{zo}\,\Omega}{m}\right)^2}}{\sqrt{4\,\gamma^2\,\Omega^2 + (\mathrm{wo}^2 - \Omega^2)^2}}$$

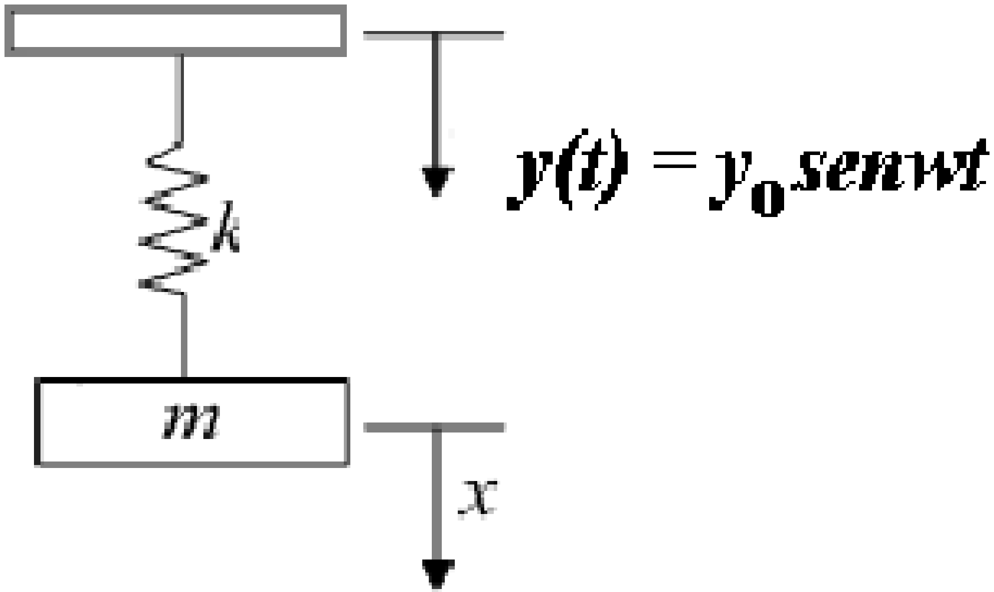
$$w_0 = \sqrt{\frac{5}{2}} = 1.58114\,\frac{rad}{s}$$

Resonancia-movimiento traslación

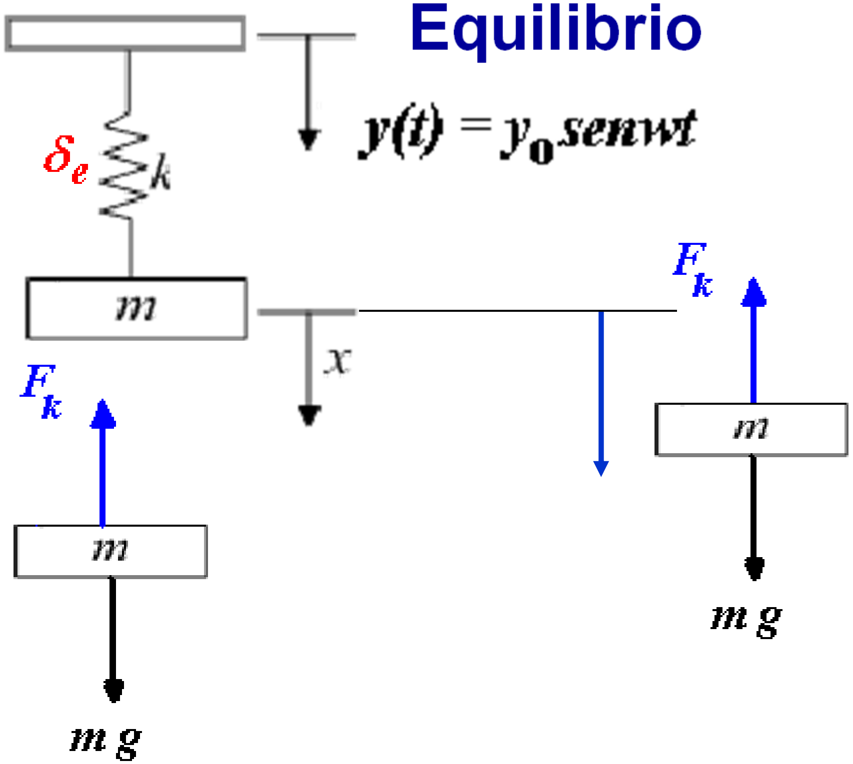




TUTV4-4 En el sistema mecánico mostrado en la figura determinar la ecuación diferencial del movimiento de la masa m.



Equilibrio



$$\boxed{k\,\delta_e - m\,g = 0}$$ **L.E**

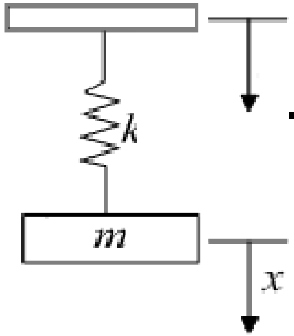
Dinámica

$$k\,\delta\,(t) - mg = (-)\,m\,\ddot{x}\,(t)$$

$$\delta\,(t) = (\delta_e + x\,(t) - y\,(t))$$

$$m\,\ddot{x} + k\,x = k\,y_0\cos\left(w\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\,x = \frac{k\,y_0}{m}\cos\left(w\,t - \frac{\pi}{2}\right)$$



$$y(t) = y_0 \, sen wt$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k\, y_0}{m} \cos\left(w t - \frac{\pi}{2}\right)$$

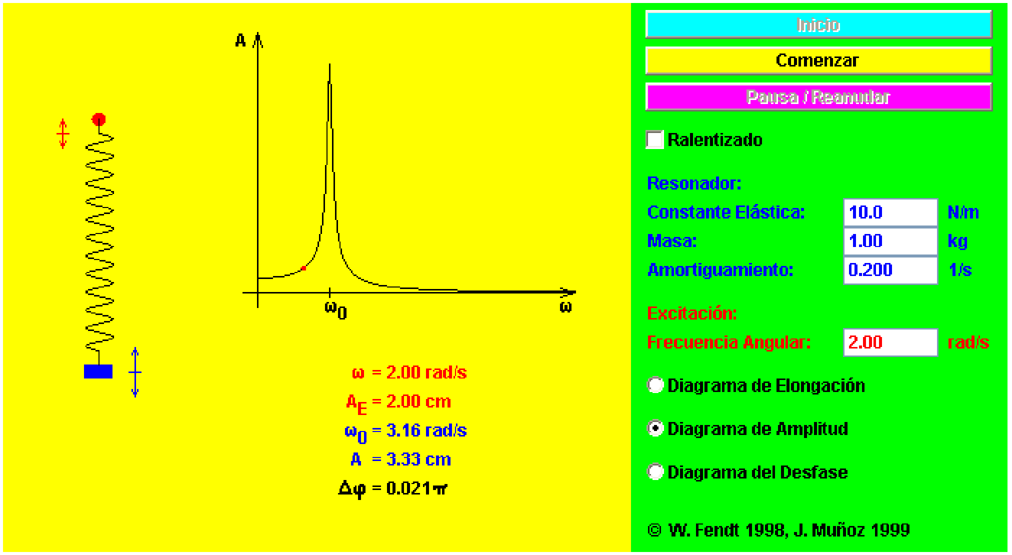
$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 \, x(t) = g(t)$$

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$$

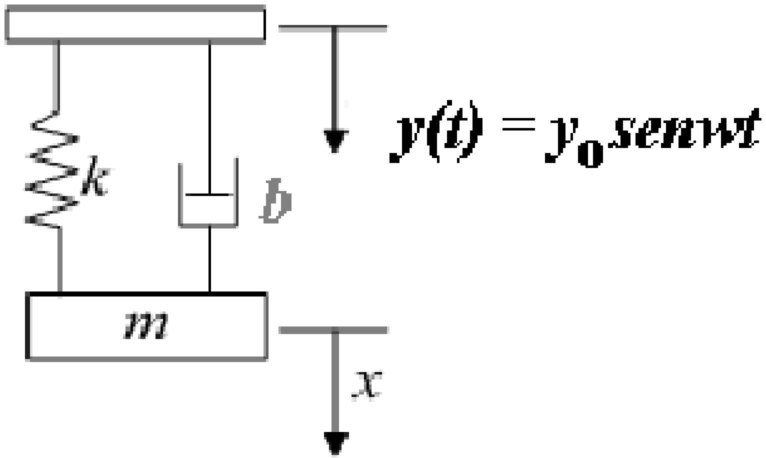
$$x(t) = A Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

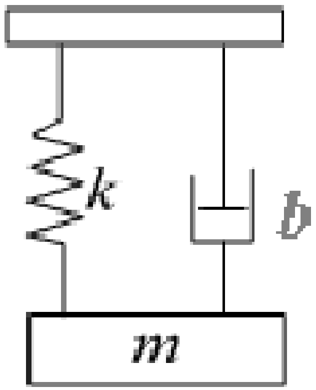
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w_0^2 - w^2}{2\gamma w}\right)$$

$$A = \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = f(g_0, m, \omega, b)$$



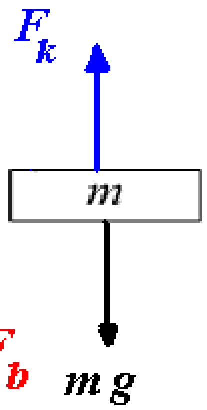
TUTV4-5 En el sistema mecánico de la figura, donde el techo superior oscila como un m.a.s, determinar la ecuación diferencial del movimiento, el tipo de oscilación y la posición de la partícula m, en todo instante de tiempo.



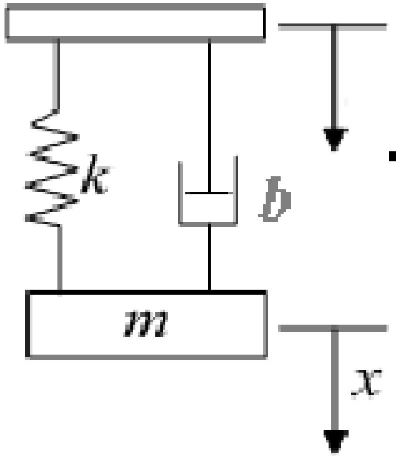


Equilibrio

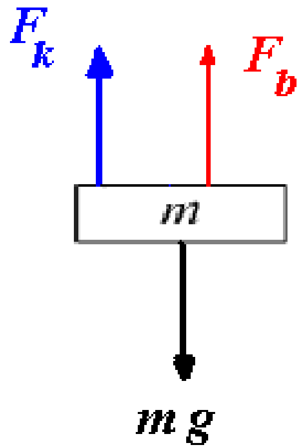
$$k\,\delta_e - m\,g = 0$$



Dinámica



$$y(t) = y_0 senwt$$

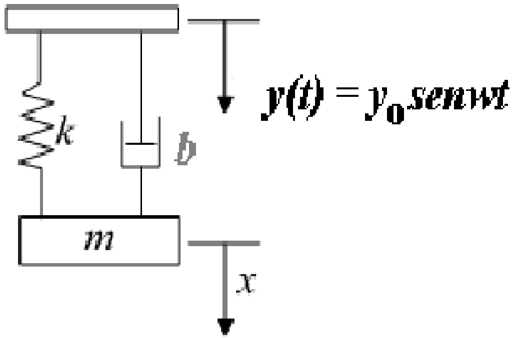


$$k\,\delta\,(t) + b\,v\,(t) - mg = (-)\,m\,\ddot{x}\,(t)$$

$$\delta\,(t) = (\delta_e + x\,(t) - y\,(t))$$

$$\mathrm{v} = \frac{d}{d\,t}\,\delta(t) = \frac{d}{d\,t}\,(\delta_e + x(t) - y(t)) = \dot{x}(t) - \dot{y}(t)$$

$$-kx + ky - b\dot{x} + b\dot{y} = m\ddot{x}$$

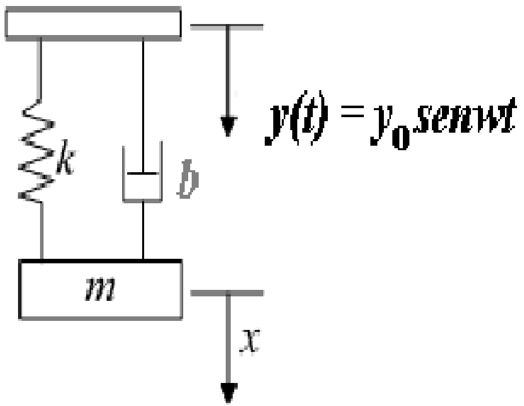


$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = ky + b\dot{y}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}y + \frac{b}{m}\dot{y}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}y_0\, senwt + \frac{b\,w}{m}y_0 \cos wt$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}y_0\,\mathrm{sen}wt + \frac{b\,w}{m}y_0\cos wt$$



$$A\,\mathrm{Sen}\,X + B\,\mathrm{Cos}\,X = \sqrt{A^2+B^2}\,\mathrm{Sen}\,(X+\varphi)$$

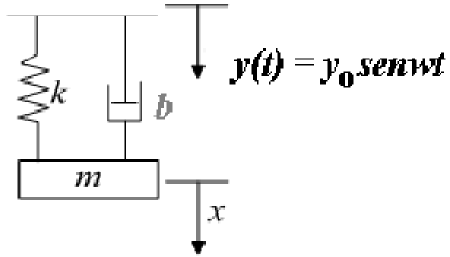
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

$$\boxed{\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = g(t)}$$

$$g(t) = \frac{F(t)}{m} = g_0\cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$F(t) = F_0\cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}y_0\, senwt + \frac{b\,w}{m}y_0\, coswt$$



$$A \operatorname{Sen} X + B \operatorname{Cos} X = \sqrt{A^2 + B^2}\ \operatorname{Sen}(X + \varphi)$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \sqrt{\left(\frac{k\,y_0}{m}\right)^2 + \left(\frac{b\,w}{m}y_0\right)^2}\ \operatorname{Sen}\left(w\,t + \tan^{-1}\left(\frac{b\,w}{k}\right)\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \sqrt{\left(\frac{k\,y_0}{m}\right)^2 + \left(\frac{b\,w}{m}y_0\right)^2}\ \cos\left(w\,t + \tan^{-1}\left(\frac{b\,w}{k}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \sqrt{\left(\frac{k\,y_0}{m}\right)^2 + \left(\frac{b\,w}{m}\,y_0\right)^2}\,\cos\left(w\,t + \tan^{-1}\left(\frac{b\,w}{k}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = g(t)$$

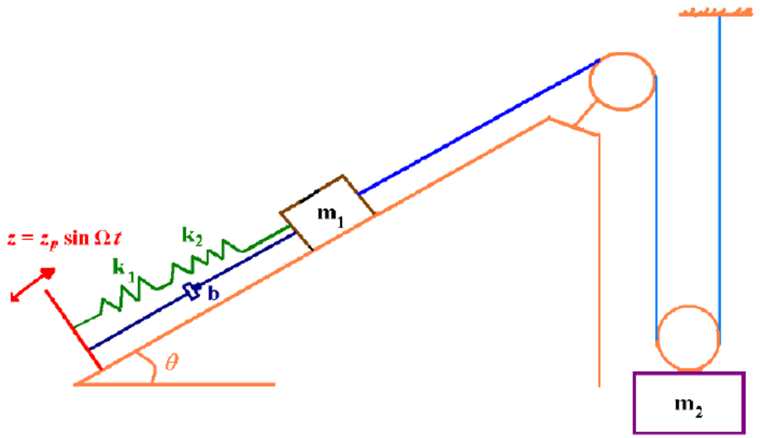
$$x(t) = A\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

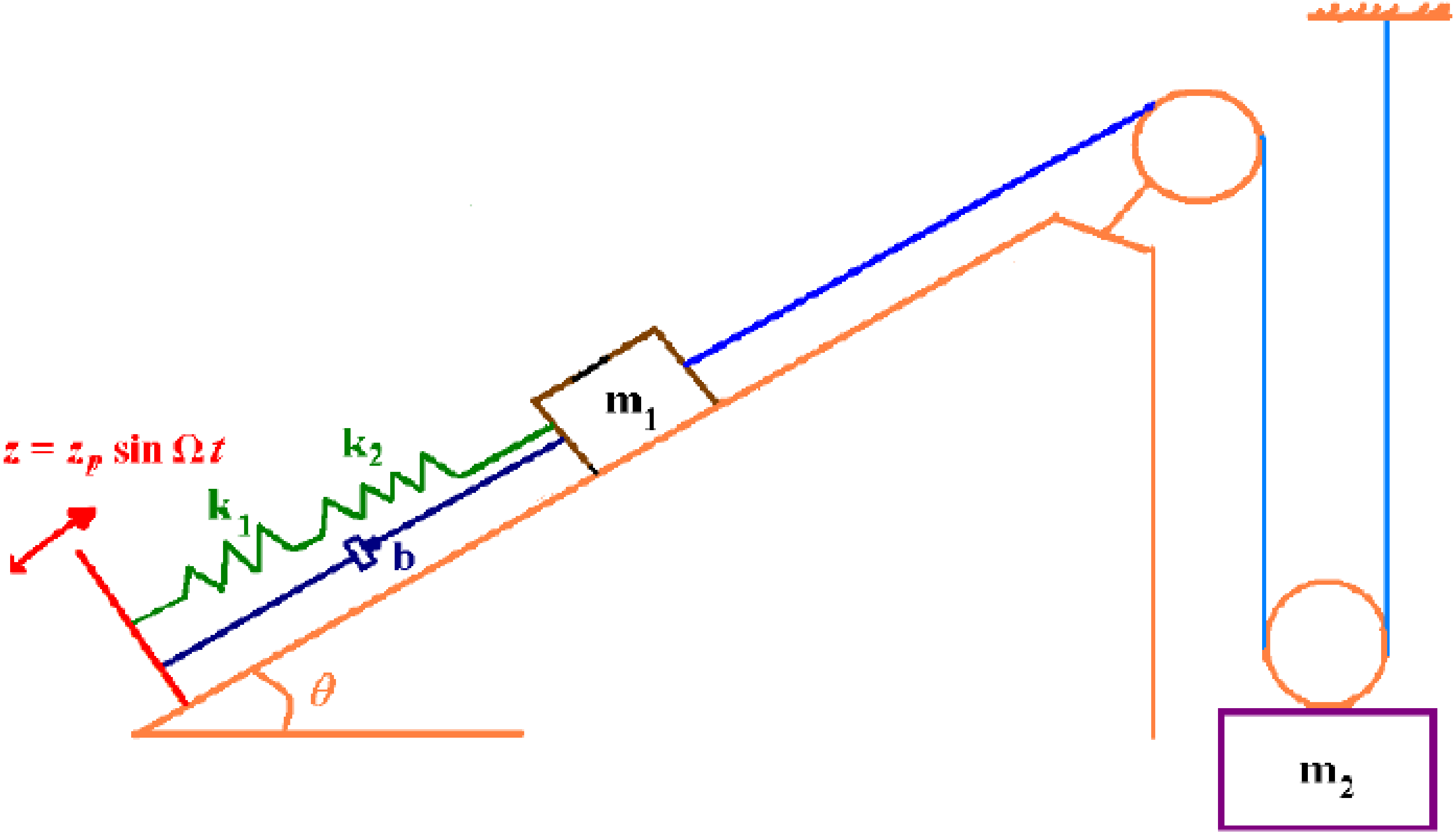
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w_0^2 - w^2}{2\gamma w}\right)$$

$$A = \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} = f(g_0, m, \omega, b)$$

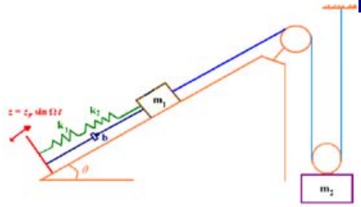
TUTV4-6 En el sistema mecánico de la figura la masa m1 = 3kg se desplaza de su posición de equilibrio 175 mm hacia arriba en el plano inclinado, y se suelta en el instante inicial con una velocidad 1.5 m/s hacia arriba. La masa m2 es de 8 kg, k1 = 1000N/m, k2 = 1350N/m, b = 20N s/m, θ= 30º.

El apoyo del muelle 1 es movíl y oscila como un oscilador armónico, según la ley z = zp sen Ωt, donde zp = 5mm, Ω = 8rad/s. (a) Obtener la ecuación diferencial del movimiento para la partícula de masa m1. (b) ¿Oscila el sistema? Justificarlo razonadamente. La frecuencia angular de vibración, en su caso, de la masa m1, en el estado estacionario. (c)La posición de la masa m2 en el estado estacionario. (d) Dar un entorno de seguridad, en el diseño del sistema mecánico, para la vibración de la pared móvil.

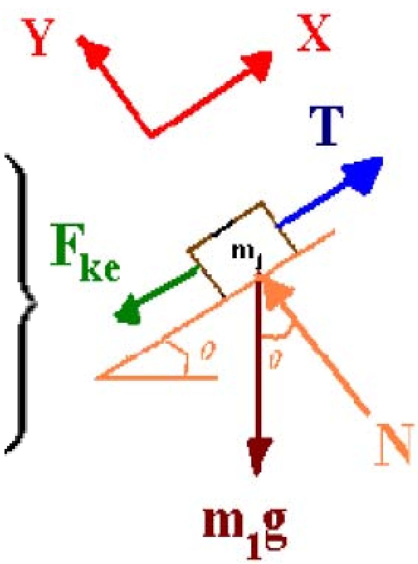



$z = z_p \sin \Omega t$
k_2
k_1
b
m_1
θ
m_2

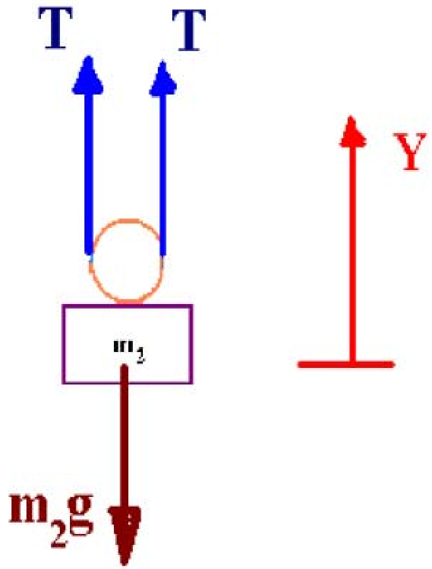
Equilibrio



$$\left.\begin{array}{c} N - m_1 g\cos\theta = 0 \\ -m_1 g\, sen\theta - F_{k_e} + T = 0 \\ F_{k_e} = k_e\delta_e \\ \frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \end{array}\right\}$$

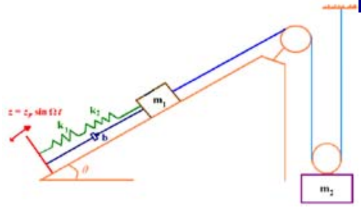


+



$$2T - m_2 g = 0$$

$$-m_1 g\, sen\theta - k_e\delta_e + \frac{1}{2}m_2 g = 0$$



$$N - m_1\, g \cos\theta = 0$$

$$T - m_1\, g\, \mathrm{sen}\,\theta - F_b - F_k = m_1\, \ddot{x}$$

$$F_k = k_e(x + \delta_e - z)$$

$$k_e = \frac{k_1\, k_2}{k_1 + k_2}$$

$$2\,T - m_2\, g = -m_2\, \ddot{y}$$

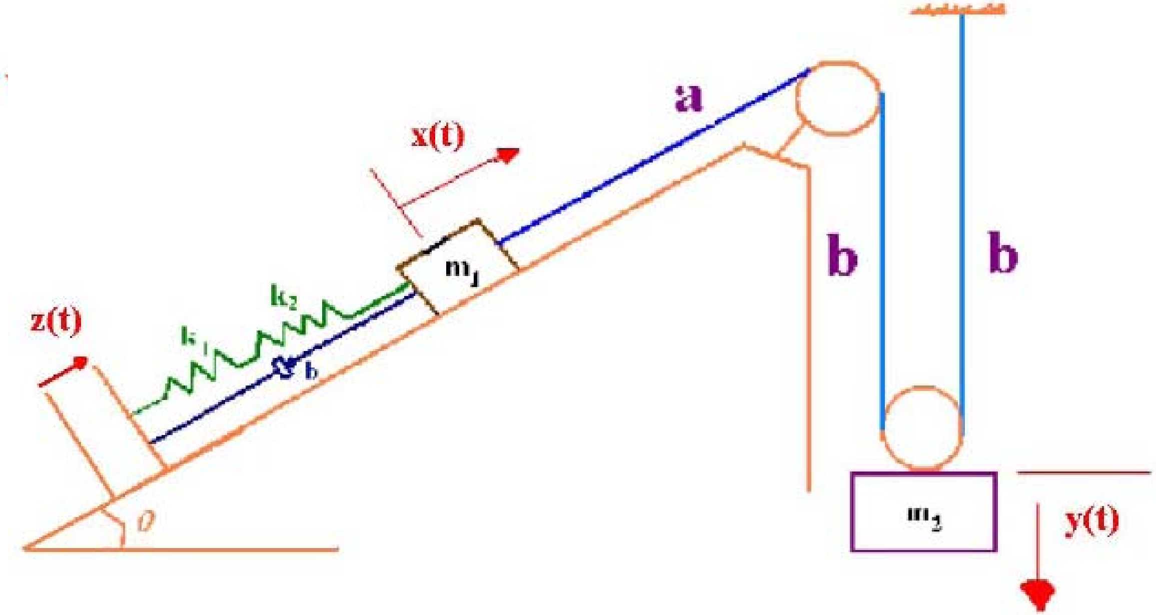


Figure 4

$$L(0) = a + 2b = cte$$

$$L(t) = a - x + 2(b + y)$$

$$N - m_1\, g \cos\theta = 0$$

$$T - m_1\, g\, \mathrm{sen}\,\theta - b\,(\dot{x} - \dot{z}) - \frac{k_1\, k_2}{k_1 + k_2}\,(x + \delta_e - z) = m_1\, \ddot{x}$$

$$a + 2b = a - x + 2(b + y) \Rightarrow x = 2y$$

$$2\,T - m_2\, g = -m_2\, \ddot{y}$$

$$\ddot{y} = \frac{\ddot{x}}{2}$$

$$-m_1\, g\, \text{sen}\,\theta - b\,(\dot{x} - \dot{z}) - \frac{k_1\, k_2}{k_1 + k_2}\,(x + \delta_e - z) + \frac{m_2}{2}\,(g - \frac{\ddot{x}}{2}) = m_1\, \ddot{x}$$

$$-m_1 g\; sen\theta - k_e\delta_e + \frac{1}{2}m_2 g = 0$$

$$\frac{b\,\dot{x}}{m_1 + \frac{m_2}{4}} + \frac{\frac{k_1\, k_2}{k_1 + k_2}}{(m_1 + \frac{m_2}{4})}\, x + \ddot{x} = \frac{b}{(m_1 + \frac{m_2}{4})}\,\dot{z} + \frac{\frac{(k_1\, k_2)}{k_1 + k_2}}{(m_1 + \frac{m_2}{4})}\, z$$

$$z(t) = z_0\, \text{sen}\Omega\, t = z_0 \cos(\Omega\, t - \frac{\pi}{2})$$

$$\dot{z}(t) = z_0\, \Omega\, \text{cons}\, \Omega\, t$$

$$\frac{b\,\dot{x}}{m_1 + \frac{m_2}{4}} + \frac{\frac{k_1\, k_2}{k_1 + k_2}}{(m_1 + \frac{m_2}{4})}\, x + \ddot{x} = \frac{\frac{(k_1\, k_2)}{k_1 + k_2}}{(m_1 + \frac{m_2}{4})}\, z_0\, \text{sen}\Omega\, t + \frac{b}{(m_1 + \frac{m_2}{4})}\, z_0\, \Omega\, \text{cons}\, \Omega\, t$$

$$\frac{b\,\dot{x}}{m_1+\frac{m_2}{4}}+\frac{\frac{k_1\,k_2}{k_1+k_2}}{(m_1+\frac{m_2}{4})}\,x+\ddot{x}=\frac{\frac{(k_1\,k_2)}{k_1+k_2}}{(m_1+\frac{m_2}{4})}\,z_0\,\mathrm{sen}\,\Omega\,t+\frac{b}{(m_1+\frac{m_2}{4})}\,z_0\,\Omega\,\mathrm{cons}\,\Omega\,t$$

$$A\,\mathrm{Sen}\,X+B\,\mathrm{Cos}\,X=\sqrt{A^2+B^2}\;\mathrm{Sen}\,(X+\varphi)$$

$$\varphi=\tan^{-1}\frac{B}{\;}$$

$$\frac{b\,\dot{x}}{m_1+\frac{m_2}{4}}+\frac{\frac{k_1\,k_2}{k_1+k_2}}{(m_1+\frac{m_2}{4})}\,x+\ddot{x}=\sqrt{\left(\frac{\frac{(k_1\,k_2)}{k_1+k_2}}{(m_1+\frac{m_2}{4})}\,z_0\right)^2+\left(\frac{b}{(m_1+\frac{m_2}{4})}\,z_0\,\Omega\right)^2}\;\mathrm{sen}(\Omega t+\varphi)$$

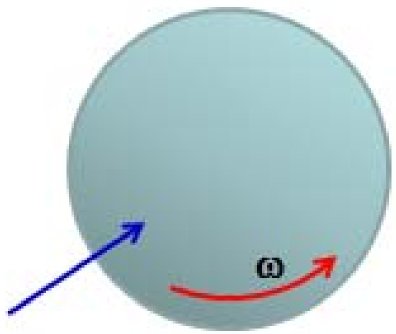
$$\varphi=\tan^{-1}\frac{B}{A}=\tan^{-1}\frac{b\,\Omega}{\frac{(k_1\,k_2)}{k_1+k_2}}$$

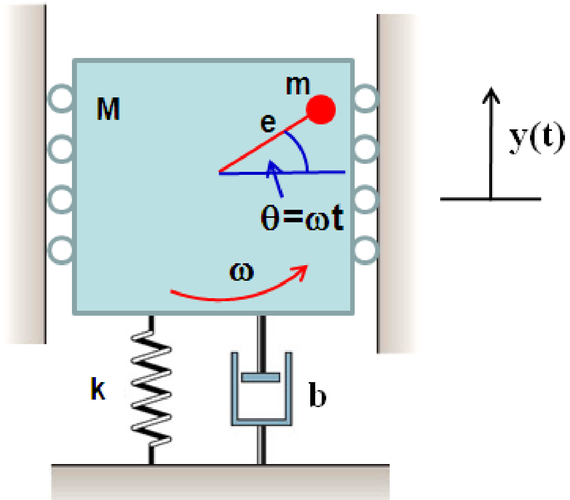
$$\mathrm{sen}(\Omega t+\varphi)=\cos(\Omega t+\varphi-\frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{\ddot{x}+4\,\dot{x}+114.90\,x\;=\;0.60\cos\left(8\,t+0.27-\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$\ddot{x}+\frac{b}{m_1+\frac{m_2}{4}}\,\dot{x}+\frac{\frac{k_1\,k_2}{k_1+k_2}}{(m_1+\frac{m_2}{4})}\,x=\sqrt{\left(\frac{\frac{(k_1\,k_2)}{k_1+k_2}}{(m_1+\frac{m_2}{4})}\,z_0\right)^2+\left(\frac{b}{(m_1+\frac{m_2}{4})}\,z_0\,\Omega\right)^2}\;\cos(\Omega\,t+\varphi-\frac{\pi}{2})$$

Fuente de vibraciones forzadas se encuentra en el desequilibrio de una pieza giratoria en una mecanismo. En general los mecanismos con partes rotatorias pueden no estar perfectamnete equilibradas, lo cual produce oscilaciones forzadas sobre los mismos.

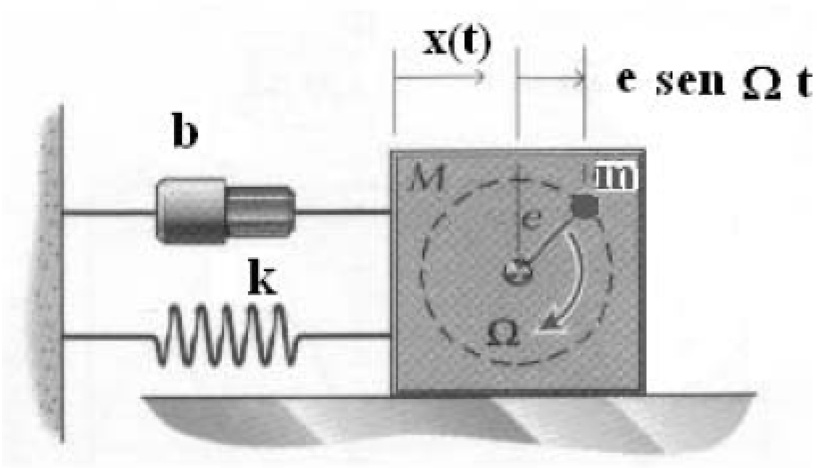


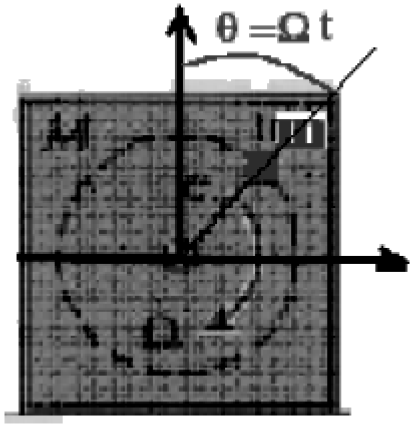


No equilibrado significa más masa en un lado de la máquina que en otro, una **distribución inhomogénea de masa**.

Modelizado como una masa efectiva no equilibrada ***m***, con una excentricidad efectiva **e**, en un mecanismo de masa ***M***.

Forzamiento inducido por rotaciones descompensadas

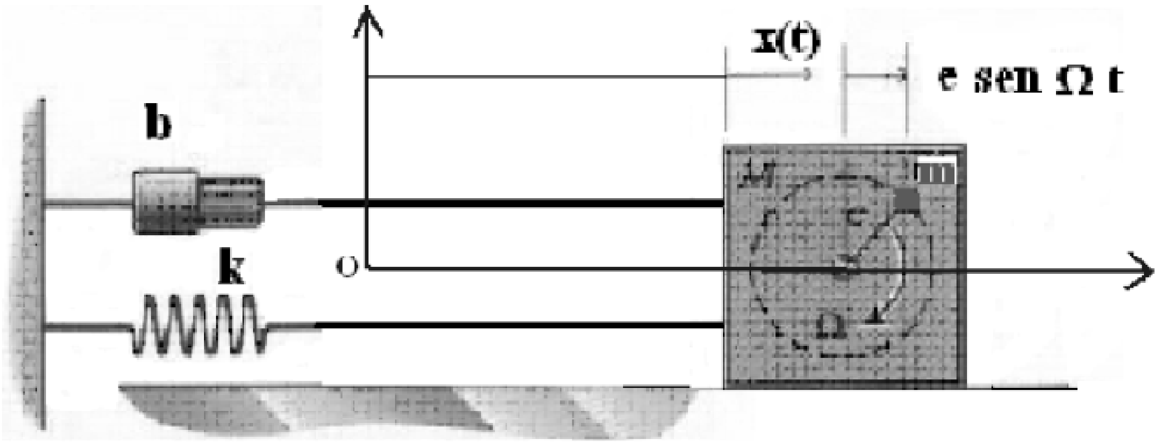


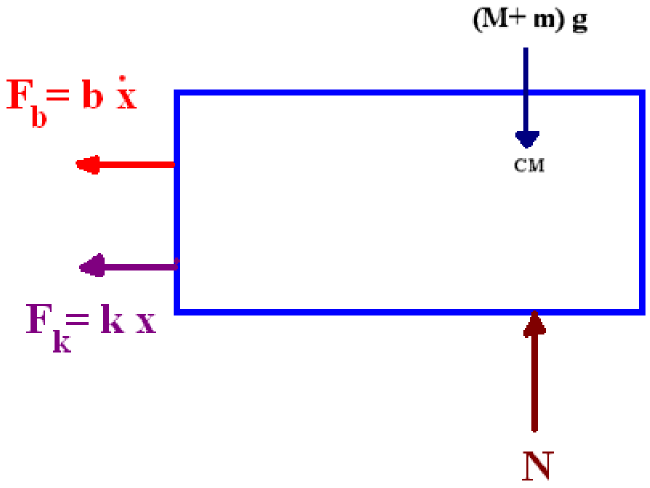


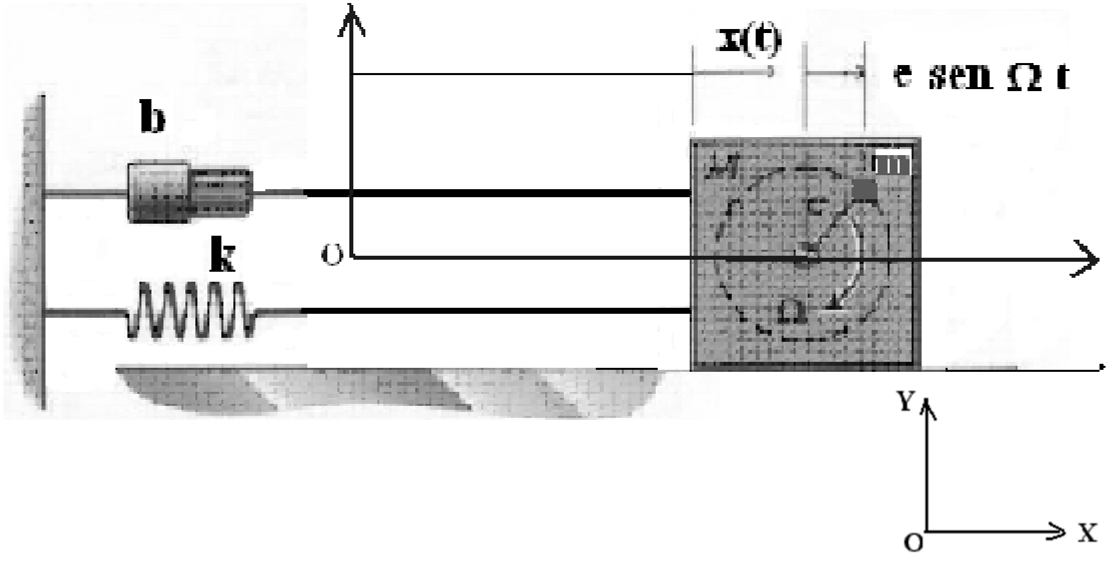
$$x_m = e\,\mathrm{sen}\,\Omega t$$

$$y_m = e\cos\Omega t$$

$$\vec{r}_{CM}(t) = (x_{CM},\ y_{CM}) = \frac{m_1\vec{r}_1(t) + m_2\vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2}$$







$$\vec{r}_{CM}(t) = (x_{CM},\ y_{CM}) = \frac{m_1\,\vec{r}_1(t) + m_2\,\vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2} = \frac{M\,(x(t),\ 0) + m\,(x(t) + x_m(t),\ y_m(t))}{M + m}$$

$$\vec{r}_{CM}(t) = (x_{CM},\ y_{CM}) = \frac{M\,(x(t),\ 0) + m\,(x(t) + e\,\text{sen}\,\Omega t,\ e\cos\Omega t)}{M + m}$$

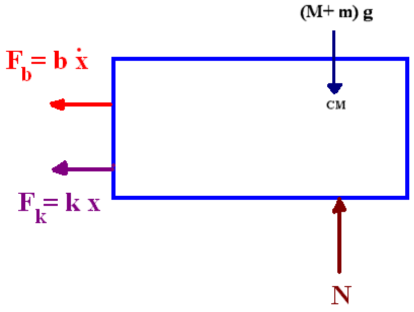
$$x_{CM}(t) = \frac{M x + m\,(x + e\,\text{sen}\,\Omega t)}{M + m}$$

$$y_{CM}(t) = \frac{m\,e\cos\Omega t}{M + m}$$

$$N - mg = (M + m)\,\ddot{y}_{CM}(t)$$

$$-F_b - F_k = (M + m)\,\ddot{x}_{CM}(t)$$

Forzamiento inducido por rotaciones descompensadas



$$N - m g = (M+m)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{m\ e\cos\Omega t}{M+m}\right)$$

$$-F_b - F_k = (M+m)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{M x + m\,(x + e\,\mathrm{sen}\,\Omega t)}{M+m}\right)$$

$$\boxed{N(t) = g m - m e \Omega^2 \cos\Omega t}$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{b}{M+m}\dot{x} + \frac{k}{M+m}x = \frac{m}{m+M}e\,\Omega^2\,\mathrm{sen}\,\Omega t}$$

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + w_0^{\,2}\,x(t) = g_0\,\mathrm{sen}\,\Omega t \qquad w = \Omega$$

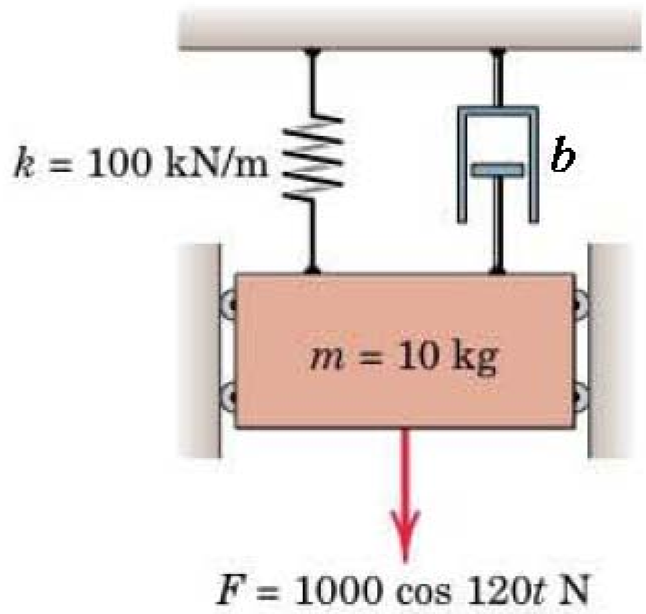
$$2\gamma = \frac{b}{m+M}$$

$$\alpha_0 = 0$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m+M}} \qquad x(t) = C e^{-\gamma t}\,Sin\,(w_\gamma\,t + \delta) + \frac{g_o}{\sqrt{(w_o^{\,2} - w^2)^2 + 4\gamma^2 w^2}}\,Sin\,(w\,t + \alpha_o + \beta)$$

$$g_0 = \frac{m}{m+M}e\,\Omega^2 \qquad \beta = Arct\left(\frac{w_0^{\,2} - w^2}{2\,\gamma\,w}\right)$$

TUTV4-7 Determinar la amplitud de la oscilación en el estado estacionario de la masa de ***10*** *kg* si la constante de amortiguamiento ***b*** tiene un valor de i) ***b=500*** *N* s/m, ii) ***b=0.*** Determinar la posición de la masa m en todo instante de tiempo en ambos casos



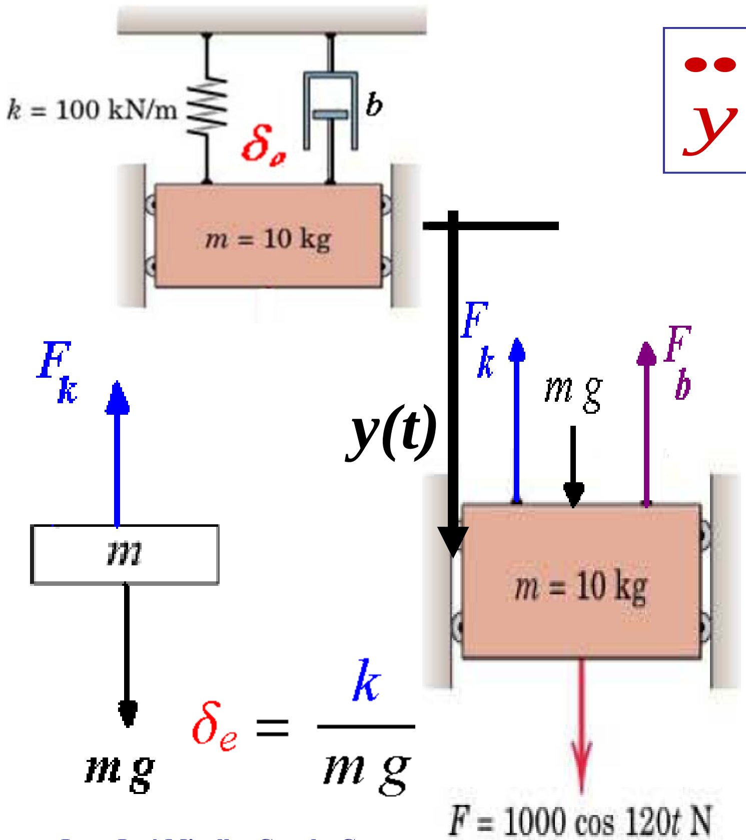
$$k\,\delta(t) + b\,v(t) - mg - F_0\cos(wt+\alpha_0) = (-)\;m\,\ddot{y}(t)$$

$$\delta(t) = \delta_e + y(t)$$

$$v(t) = \dot{\delta}(t) = \dot{y}(t)$$

$$k\,\delta_e - m\,g + k + y(t) + b\,\dot{y}(t) + m\,\ddot{y}(t) = F_0\cos(w\,t + \alpha_0)$$

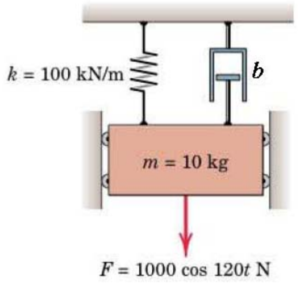
$$\boxed{\ddot{y}(t) + 2\gamma\,\dot{y}(t) + \omega_0^2\;y(t) = g(t)}$$



$$\delta_e = \frac{k}{m\,g}$$

$$g(t) = \frac{F(t)}{m} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t + \alpha_0) = g_0\cos(\omega t + \alpha_0)$$

$$y_{es}(t) \approx \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$



$$\zeta = \frac{\gamma}{w_0}$$

$$y_{es}(t) \approx \frac{g_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 100\,\frac{rad}{s} \qquad w = 120\,\frac{rad}{s}$$

$$\zeta = \frac{\gamma}{w_0} = \frac{b}{2\,m\,w_0} = \frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{w}{w_0} = \frac{120}{100} = 1.2$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w_0^2 - w^2}{2\gamma w}\right) = \tan^{-1}\frac{\left(1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right)}{2\zeta\frac{w}{w_0}}$$

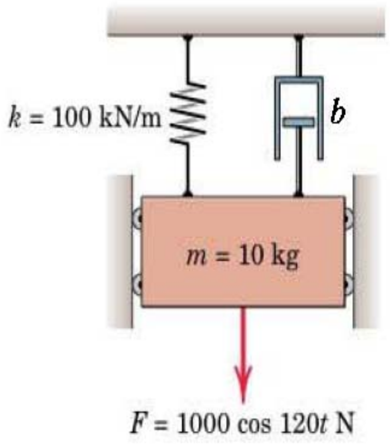
$$g_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{1000}{10} = 100\,\frac{N}{m} \qquad \frac{g_0}{w_0^2} = \frac{100}{10^4} = 0.01\,m$$

$$A = \frac{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{0.01}{\sqrt{\left(1-(1.2)^2\right)^2 + (2\ \text{x}\,0.25\ \text{x}\,1.2)^2}} = 0.0134 \quad m$$

$$A = \frac{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2}} = \frac{0.01}{\sqrt{\left(1-(1.2)^2\right)^2}} = 0.0227 \quad m$$

$$y(t) = A\,Sin(\omega t + \alpha_0 + \beta)$$

TUTV4-7



b=500 Ns/m

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w^2{}_0 - w^2}{2\gamma w}\right) = \tan^{-1}\frac{\left(1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right)}{2\zeta\frac{w}{w_0}} = \tan^{-1}\frac{\left(1-(1.2)^2\right)}{2\,x\,0.25\,x\;1.2} = -0{,}63\;rad$$

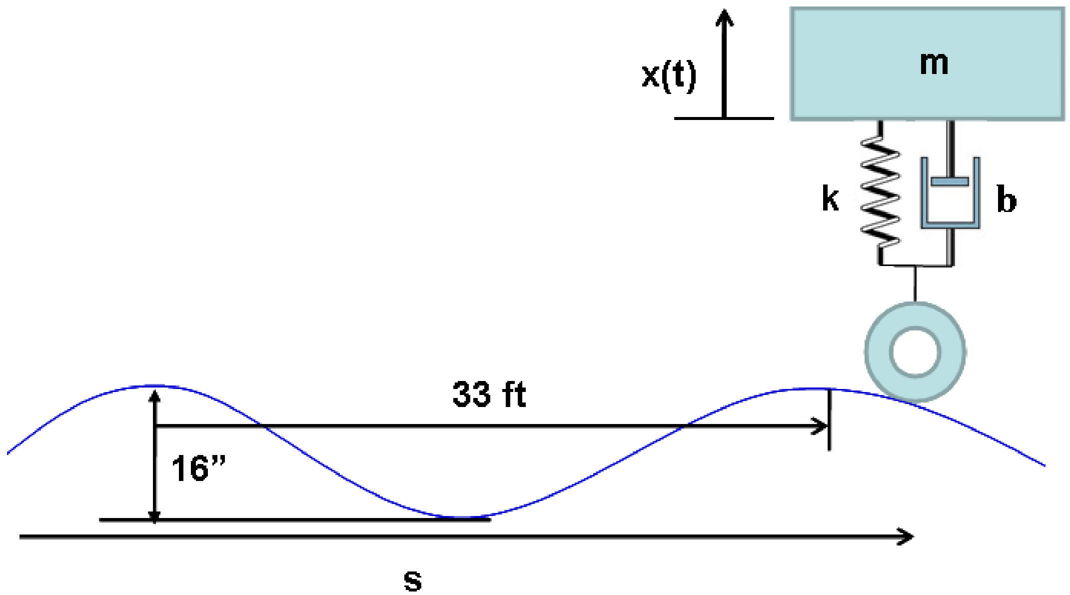
$$\boxed{y(t) = 0.0134\;m\;Sin(120t - 0.63)}$$

b=0

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{w^2{}_0 - w^2}{2\gamma w}\right) = \tan^{-1}\frac{\left(1-\left(\frac{w}{w_0}\right)^2\right)}{2\zeta\frac{w}{w_0}} = \tan^{-1}\frac{\left(1-(1.2)^2\right)}{0} = \frac{\pi}{2}\;rad$$

$$\boxed{y(t) = 0.0227\;m\;Sin(120t - \frac{\pi}{2})}$$

TUTV4-8 Un automóvil que pesa ***13344*** *N*, se desplaza sobre una carretera con perfil sinusoidal, como se muestra en la figura. Diseñar una suspensión, y por lo tanto elegir un amortiguador ***b*** y un muelle ***k***, tal que: a) La amplitud de vibración del coche sea menor que ***14”*** para todas las velocidades y b) La amplitud de vibración del coche sea menor que ***4”*** a una velocidad de ***55 millas/h***.



La ecuación del perfil de la carretera (movimiento de la base)

A la velocidad **v**, la distancia recorrida es ***s=v t***, e **Y** = 16”/2 = 8” (0.0254 m/ 1”) = ***0.203 m***

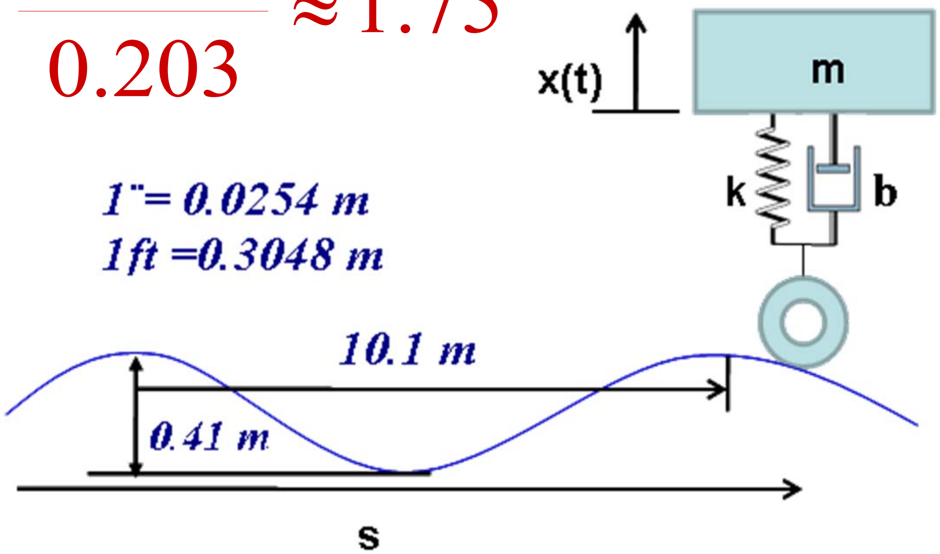
$$y = Y\sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right) \Rightarrow y = 0.20\sin\left(\frac{2\pi s}{33\times 0.3408}\right) = 0.20\sin\left(\frac{2\pi \, \mathrm{v}\, t}{10.1}\right)$$

Frecuencia del forzamiento $w = \dfrac{2\pi \, \mathrm{v}}{10.1}$

Amplitud de vibración < 14” **x 0.0254 m** /¨ para todas las velocidades (0.36 m)

$$\frac{A}{\left(\dfrac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{A}{\delta_{est}} = F_{amplif} = \frac{X}{Y} = \frac{0.3556}{0.203} \approx 1.75$$

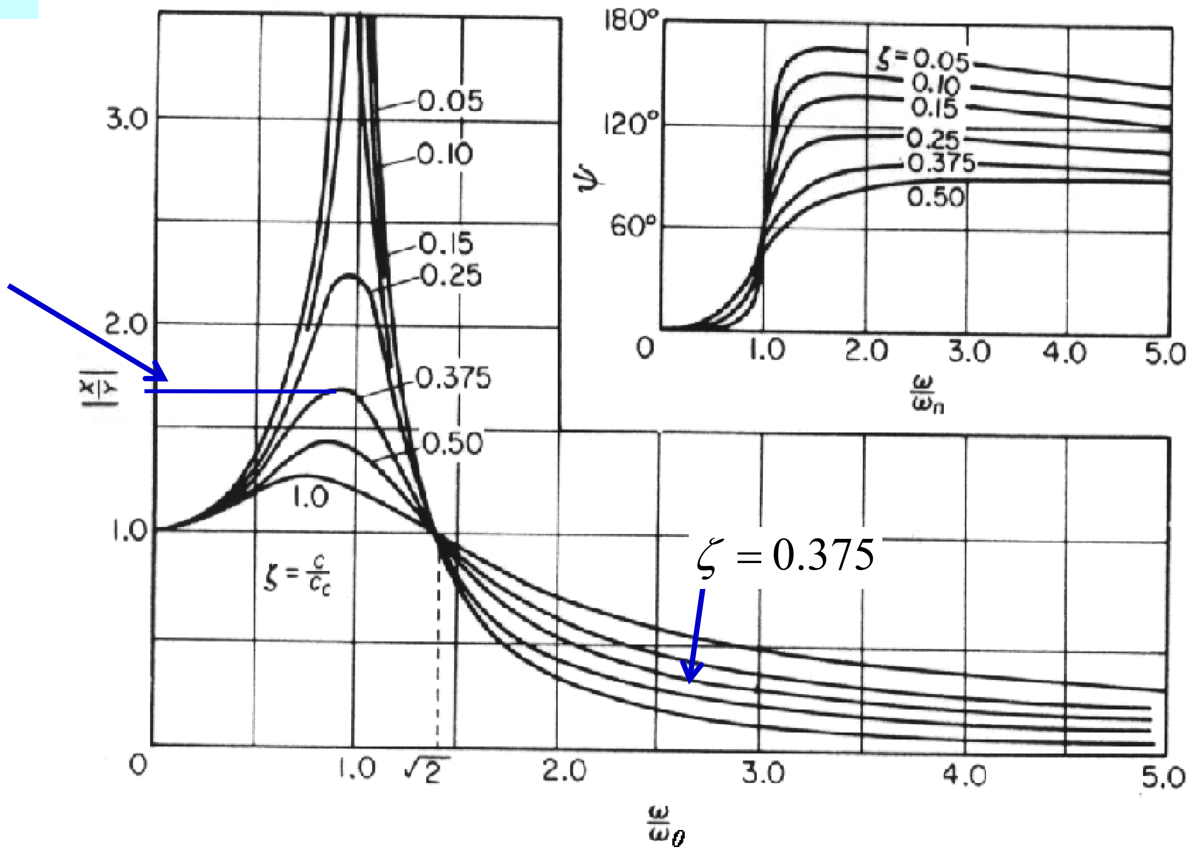
$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = 1.75$$



$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}=1.75$$

$$\zeta \cong 0.375$$

$$\zeta = \frac{\gamma}{w_0}$$



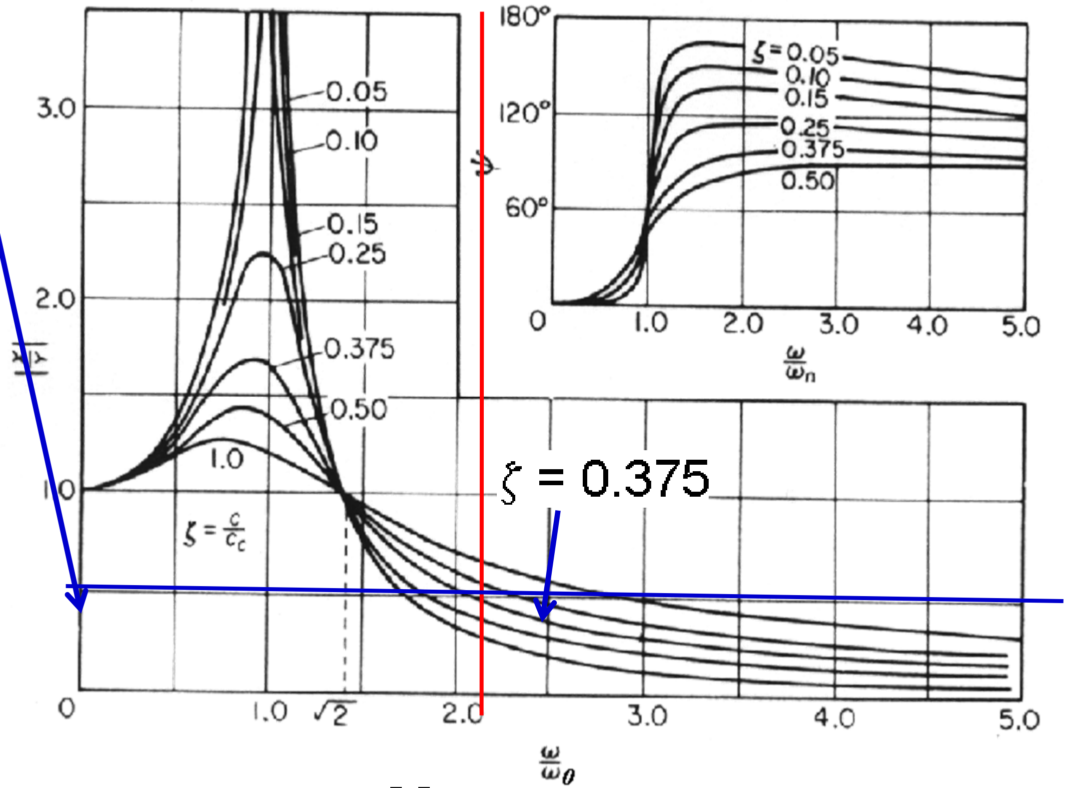
$$\frac{X}{Y} < \frac{4}{8} = 0.5$$ **a 55 mph**

$$\mathrm{v} = 55\ mph\ \mathrm{x}\ \frac{5280\ ft}{3600\mathrm{s}}\ \frac{0.3048m}{1\ ft} = 24.6\frac{m}{s}$$

Con $\zeta = 0.375$: $$\frac{X}{Y} < 0.5 \qquad \frac{\omega}{\omega_o} > 2.1 \qquad w = \frac{2\,\pi\,24.6}{10.1} = 15.3\ \frac{\mathrm{rad}}{s}$$

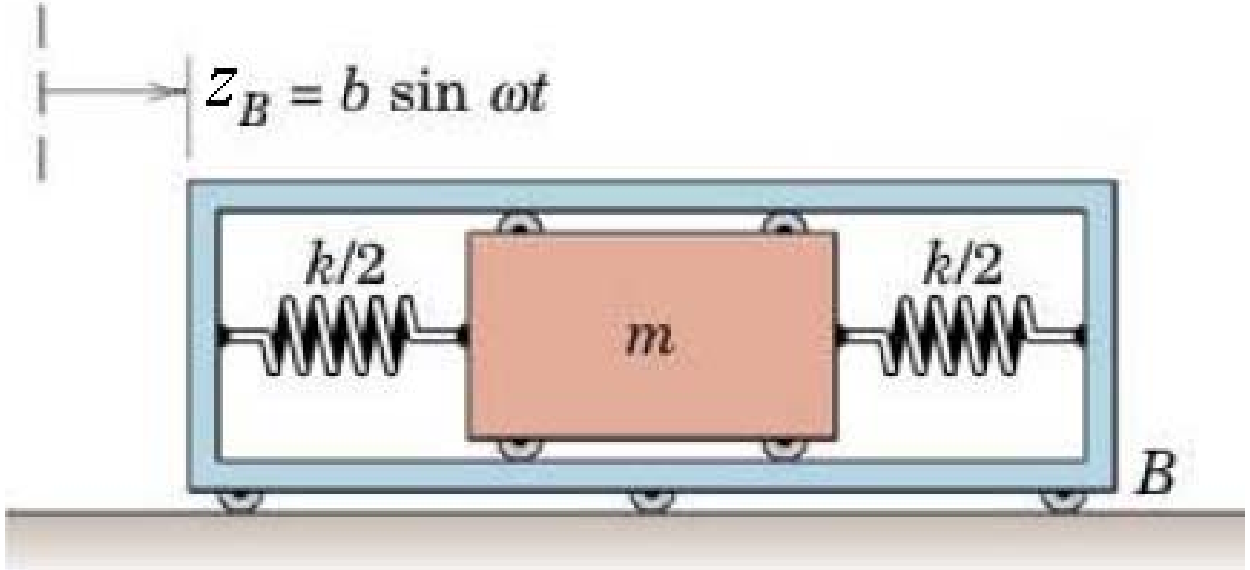
$$\omega_o < \frac{15.4}{2.1} = 7.33\ rad\,/\,s$$

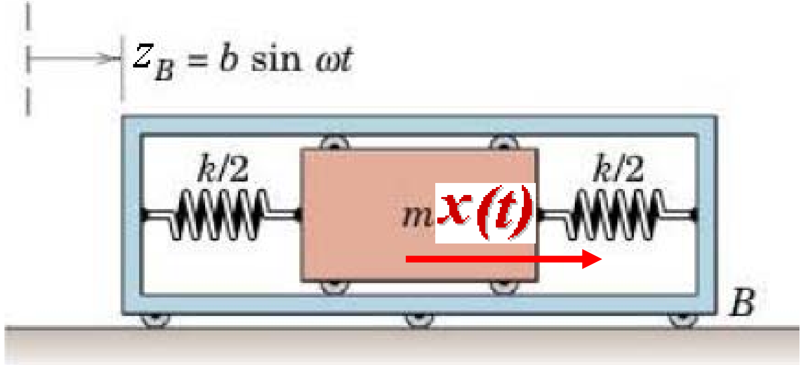
$$k = 7.33^2\left(\frac{13344}{9.81}\right) = 9970.6\frac{N}{m}$$



$$b = 0.375\,2\,m\,w_0 = 0.375\,2\,\frac{13344}{9.81}\,7.33 = 7477.94\ \frac{N\,s}{m}$$

TUTV4-8 El movimiento del objeto **B** viene dado por $\boldsymbol{z_B(t)}$ = $\boldsymbol{b \sin wt}$. Determinar el rango de las frecuencias de forzamiento **w** para las cuales la amplitud del movimiento de la masa ***m*** relativa a **B** es menor que ***2b***.





$$-k\,\delta(t) = m\,\ddot{x}(t)$$

$$\delta(t) = x(t) - z(t)$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}z(t)$$

Movimiento relativo

$$y(t) = x(t) - z(t)$$

$$\ddot{z} + \ddot{y} + \frac{k}{m}(y+z) = \frac{k}{m}z(t)$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = -\ddot{z}$$

$$\frac{A}{\left(\frac{g_0}{\omega_0^2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2}}$$

$$\frac{A}{\left(\frac{b\,w^2}{w^2{}_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2}}$$

$$\frac{A}{b} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2}}$$

$$\frac{A}{b} < \frac{2b}{b} = 2$$

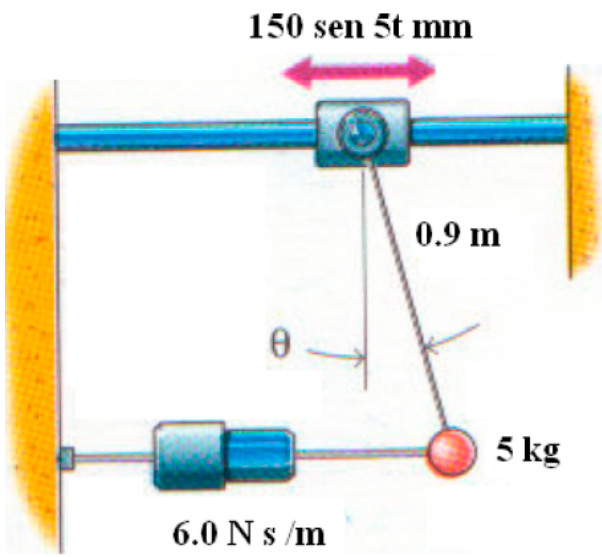
$\omega < \omega_0$

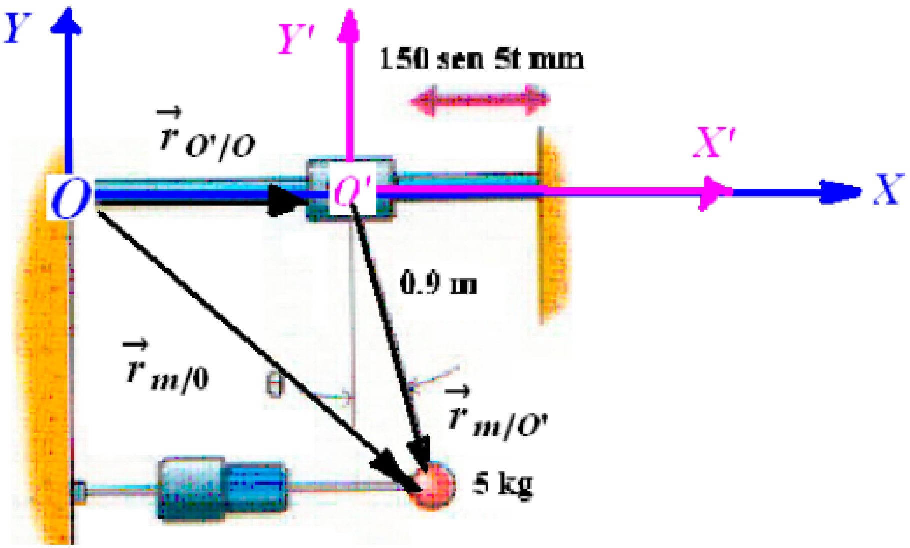
$$\frac{A}{b} = \frac{\left(\frac{\omega}{w_0}\right)^2}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{w_0}\right)^2\right)} < 2 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{\omega_o} < \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

$\omega > \omega_0$

$$\frac{A}{b} = \frac{\left(\frac{\omega}{w_0}\right)^2}{\left(\left(\frac{\omega}{w_0}\right)^2 - 1\right)} < 2 \Rightarrow \boxed{\frac{\omega}{\omega_o} > \sqrt{2}}$$

TUTV4-10. El péndulo representado en la figura, consiste en una masa de 5 kg sujeta al extremo de una varilla ligera de 0.9 m de longitud. El otro extremo de la varilla oscila a lo largo de una guía horizontal. Suponiendo oscilaciones de pequeña amplitud determinar: i) La ecuación diferencial del movimiento para la posición angular θ del péndulo. ii) La amplitud de la oscilación estacionaria.





$$
\begin{aligned}
\vec{r}_{m/O} &= \vec{r}_{m/O'} + \vec{r}_{O'/O} = l(\sin\theta, -\cos\theta) + (z_0 \sin\Omega t, 0) = (l\sin\theta + z_0\sin\Omega t, -l\cos\theta) \\
\vec{v}_{m/O} &= \left(z_0\Omega\cos(\Omega t) + l\dot{\theta}\cos\theta,\ l\dot{\theta}\sin\theta \right) \\
\vec{a}_{m/O} &= \left(-z_0\Omega^2\sin(\Omega t) - l\dot{\theta}^2\sin\theta + l\cos\theta\ddot{\theta},\ l\left(\cos\theta\dot{\theta}^2 + \sin\theta\ddot{\theta}\right) \right)
\end{aligned}
$$

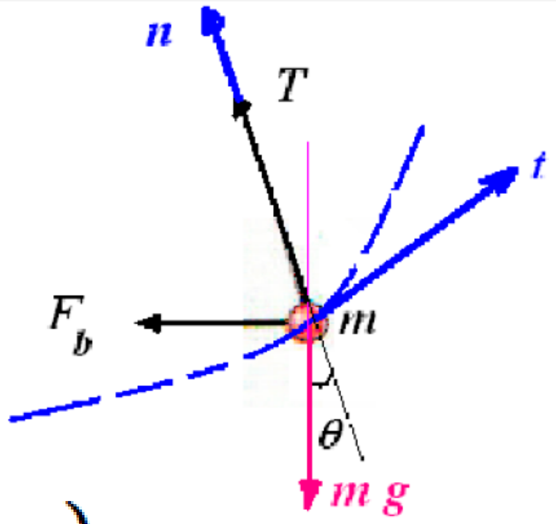
En la aproximación de ángulos pequeños: ⇒

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &\simeq \theta \\
\cos\theta &\simeq 1 \\
\dot{\theta}^2 &\simeq \dot{\theta}\theta \simeq \ddot{\theta}\theta \simeq 0
\end{aligned}
$$

$$\overrightarrow{r}_{m/O} = (l\theta + z_0 \sin \Omega t, -l)$$

$$\overrightarrow{v}_{m/O} = \left(z_0 \Omega \cos(\Omega t) + l\dot{\theta}, 0 \right)$$

$$\overrightarrow{a}_{m/O} = \left(-z_0 \Omega^2 \sin(\Omega t) + l\ddot{\theta},\ 0 \right)$$



$$\left.\begin{array}{c} -mg\sin\theta - F_b\cos\theta = ma_t = m\,\frac{dv}{dt} \\ T - mg\cos\theta + F_b\sin\theta = m\,a_n = m\frac{v^2}{L} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(z_0\Omega\cos(\Omega t) + l\dot{\theta} \right) = -z_0\Omega^2\sin\Omega t + l\ddot{\theta} \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} -m\,g\,\theta - F_b &= m\,L\ddot{\theta} - mz_0\Omega^2\sin\Omega t \\ F_b &= b\left|\dot{\overrightarrow{r}}\right| \simeq bz_0\Omega\cos(\Omega t) + bl\dot{\theta} \end{aligned}$$

$$-m\,g\,\theta - bz_0\Omega\cos(\Omega t) - bl\dot{\theta} = m\,l\ddot{\theta} - mz_0\Omega^2\sin\Omega t \Longrightarrow$$

$$m\,l\ddot{\theta} + bl\dot{\theta} + m\,g\,\theta = mz_0\Omega^2\sin\Omega t - bz_0\Omega\cos\,\Omega t$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \frac{z_0\Omega^2}{l}\sin\Omega t - \frac{bz_0\Omega}{ml}\cos\,\Omega t}$$

$$A\sin X + B\cos X = \sqrt{A^2+B^2}\sin(X+\varphi)$$

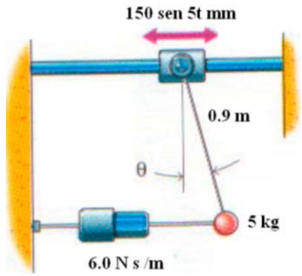
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

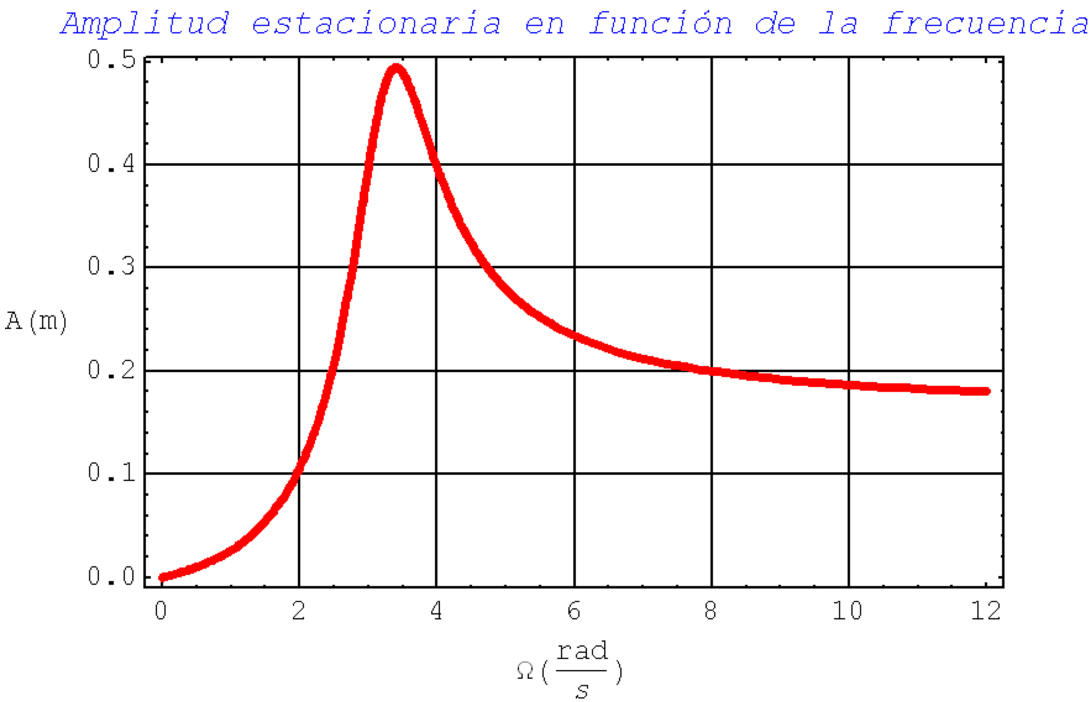
$$\ddot{\theta} + \frac{b}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = \sqrt{\left(\frac{zo\,\Omega^2}{l}\right)^2 + \left(\frac{b\,zo\,\Omega}{m\,l}\right)^2}\cos\left(\Omega\,t + \tan^{-1}\left(\frac{-b}{m\,\Omega}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x(t) = \frac{\sqrt{\left(\frac{zo\,\Omega^2}{l}\right)^2 + \left(\frac{b\,zo\,\Omega}{m\,l}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{g}{l} - \Omega^2\right)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2\Omega^2}}\,\mathrm{sen}\left(\Omega\,t + \tan^{-1}\left(\frac{\frac{g}{l} - \Omega^2}{\frac{b}{m}\,\Omega}\right) + \tan^{-1}\left[\frac{-b}{m\,\Omega}\right] - \frac{\pi}{2}\right)$$

TUTV4-10

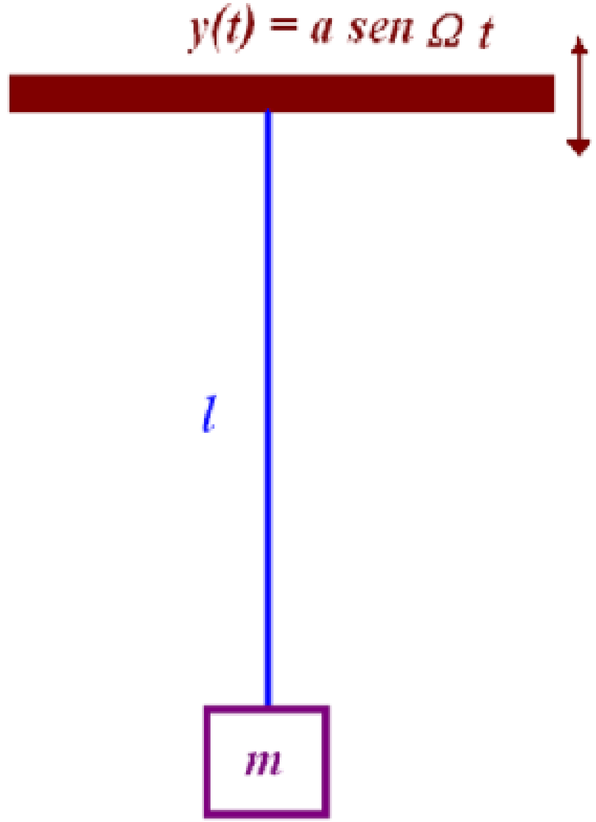
$$x(t)=\boxed{\frac{\sqrt{\left(\frac{zo\,\Omega^2}{l}\right)^2+\left(\frac{b\,zo\,\Omega}{m\,l}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{g}{l}-\Omega^2\right)^2+\left(\frac{b}{m}\right)^2\Omega^2}}}\,\mathrm{sen}\left(\Omega\,t+\tan^{-1}\left(\frac{\frac{g}{l}-\Omega^2}{\frac{b}{m}\,\Omega}\right)+\tan^{-1}\left[\frac{-b}{m\,\Omega}\right]-\frac{\pi}{2}\right)$$

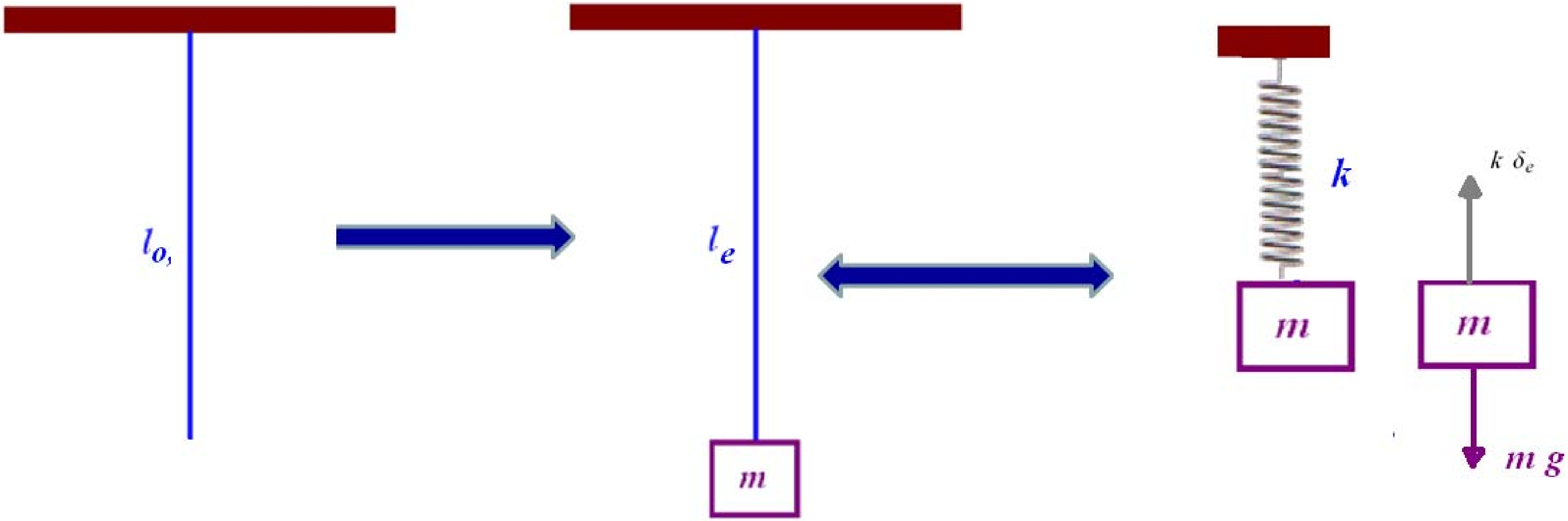




$$x(t)=\boxed{0.280}\,\sin(5\,t-2.97)$$

TUTV4-11. Una masa m de 4 kg cuelga de un cordón elástico según se indica en la figura. La longitud natural del cordón es de 1.5 m y su longitud en equilibrio es de 2.0 m. Si el cordón ha de mantenerse tenso cuando el soporte superior oscila según la ley: $y(t) = a\, sen\Omega\, t$, determinar: a) La máxima amplitud, a_{max}, cuando Ω = 4 rad/s. b) El intervalo de frecuencias de la oscilación del soporte superior cuando a =0.7 m





$$k = \frac{m\,g}{\delta_e} = \frac{m\,g}{(l_e - l_o)}$$

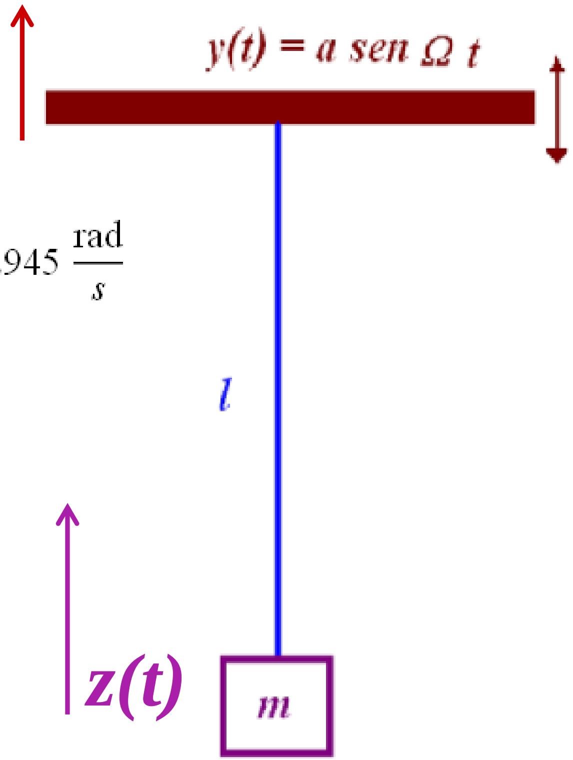
$$\ddot{z} + \frac{k}{m}\, z = \frac{k}{m}\, a \,\mathrm{Cos}(\Omega\, t + \alpha_0)$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_e}} = \sqrt{\frac{g}{l_e - l_o}} = \sqrt{\frac{9.81}{2 - 1.5}} = \sqrt{19.62} = 4.42945\ \frac{\mathrm{rad}}{s}$$

$$k = \frac{m\, g}{\delta_e} \quad \Rightarrow \quad g_0 = \frac{k}{m}\, a = \mathrm{wo}^2\, a = \frac{g}{\delta_e}\, a$$

$$\gamma = 0 \qquad \alpha_0 = -\frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \mathrm{Artg}\left(\frac{\mathrm{wo}^2 - \Omega^2}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$$



$$z(t) = g_0 \frac{\mathrm{sen}(\Omega\, t + \beta + \alpha_0)}{\sqrt{(\mathrm{wo}^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\gamma^2\,\Omega^2}} = g_0 \frac{\mathrm{sen}(\Omega\, t)}{\sqrt{(\mathrm{wo}^2 - \Omega^2)^2}} = g_0 \frac{\mathrm{sen}(\Omega\, t)}{\mathrm{wo}^2 \sqrt{\left(\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\mathrm{wo}}\right)^2\right)^2\right)}} = a \frac{\mathrm{sen}(\Omega\, t)}{\sqrt{\left(\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\mathrm{wo}}\right)^2\right)^2\right)}}$$

$$z(t) = \frac{a}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}}\ \mathrm{sen}(\Omega\, t)$$

$$z(t) = \frac{a}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}}\,\mathrm{sen}(\Omega\, t)$$

Condición de estar estirado

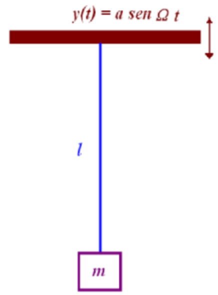
$$\boxed{\delta(t) = \delta_e + z(t) - y(t) \geq 0}$$

a) La máxima amplitud, a_{max}, cuando $\Omega = 4$ rad/s.

$$\delta(t) = \delta_e - a\,\mathrm{sen}(\Omega\, t)\left(-1+\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}}\right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} a\,\mathrm{sen}(\Omega\, t)\left(\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}} - 1\right) \leq \delta_e \\ a\,\mathrm{sen}(\Omega\, t) \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$a \leq \frac{\delta_e}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}} - 1\right)} \Rightarrow \quad a_{\max} = \frac{\delta_e}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}} - 1\right)} = 0.11\ m$$



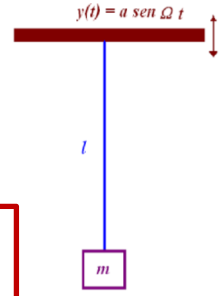
b) El intervalo de frecuencias de la oscilación del soporte superior cuando a =0.7 m

Condición de estar estirado

$$\boxed{\delta(t) = \delta_e + z(t) - y(t) \geq 0}$$

$$\delta(t) = \delta_e - a\,\mathrm{sen}(\Omega\, t)\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{\Omega}{\sqrt{\dfrac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \leq \frac{\delta_e}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{\Omega}{\sqrt{\dfrac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}} - 1\right)}$$

b) El intervalo de frecuencias de la oscilación del soporte superior cuando a =0.7 m



Condición de estar estirado

$$\boxed{\delta(t) = \delta_e + z(t) - y(t) \geq 0}$$

$$\delta(t) = \delta_e - a\,\mathrm{sen}(\Omega\, t)\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}}\right) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a \leq \frac{\delta_e}{\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\frac{g}{\delta_e}}}\right)^2\right)^2}} - 1\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_e = 0.5\, m \\ g = 9.81\, \dfrac{m}{s^2} \\ a = 0.70\, m \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \delta_e > 0,\; g > 0,\; a > 0,\; \Omega > 0$$

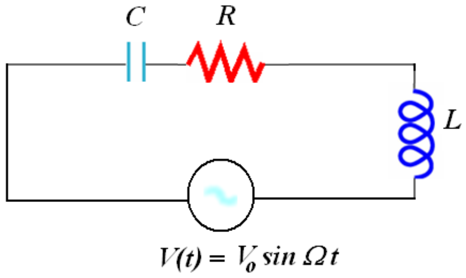
$$0 < \Omega \leq \sqrt{\frac{g}{a+\delta_e}} = 2.86\, \frac{\mathrm{rad}}{s}$$

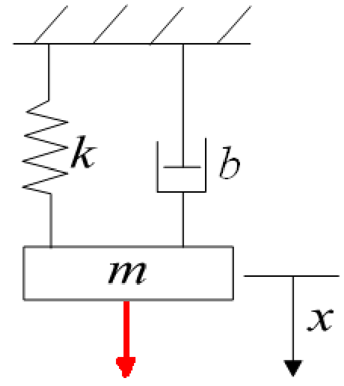
$$\sqrt{\frac{2\,g}{\delta_e} - \frac{g}{a+\delta_e}} = 5.57\, \frac{\mathrm{rad}}{s} \leq \Omega < \sqrt{2}\sqrt{\frac{g}{\delta_e}} = 6.26\, \frac{\mathrm{rad}}{s}$$

ANALOGÍA CIRCUITOS ELÉCTRICOS-MECÁNICOS

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{q}{LC} = \frac{V_0}{L}\sin\Omega t$$

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = g(t)$$





$$q(t=0) = q_0,\ \dot{q}(t=0) = 0$$

$$x(t=0) = x_0,\ \dot{x}(t=0) = 0$$

$F(t) = F_0 \sin \Omega t$

Circuito eléctrico	Sistema mecánico
L, inductancia	***m***, masa
R, resistencia	***b***, coeff. amortiguamiento
1/C, inverso capacidad	***K***, constante del resorte
q(t), carga	***x(t), desplazamiento***
i(t), corriente	***v(t)***, velocidad
V(t), fuente alterna	***F(t)***, fuerza períodica

ANALOGÍA CIRCUITOS ELÉCTRICOS-MECÁNICOS

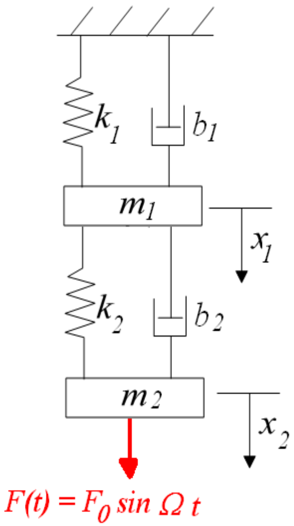
Circuito eléctrico	Sistema mecánico
L, inductancia	***m***, masa
R, resistencia	***b***, coeff. amortiguamiento
1/C, inverso capacidad	***K***, constante del resorte
q(t), carga	***x(t), desplazamiento***
i(t), corriente	***v(t)***, velocidad
V(t), fuente alterna	***F(t)***, fuerza períodica

➢Aplicación en métodos experimentales para la determinación de las características de un sistema mecánico determinado.

➢Un circuito eléctrico se construye con más facilidad que un sistema mecánico, y la variabiliad se estudia variando ***L***, ***C*** y ***R*** no ***m***, ***k***, y ***b***

ANALOGÍA CIRCUITOS ELÉCTRICOS-MECÁNICOS

Para obtener el equivalente eléctrico de un sistema mecánic dado, hay que centrar la atención en cada masa en movimiento del mismo, y observar que muelles, amortiguadores y fuerzas externas son aplicados directamente a cada masa. Por cada masa y sus elementos mecánicos, se escribe un lazo eléctrico correspondiente.



Sobre la masa m_1 actúan

• k_1 y k_2, b_1 y b_2

⇔

Lazo L_1 proporcional a m_1 con:

• dos condensadores C_1 y C_2 inversamente proporcionales a k_1 y k_2, dos resistencias, R_1 y R_2 proporcionales a b_1 y b_2

Sobre la masa m_2 actúan

• k_2 y b_2, $F(t)$

Lazo L_2 proporcional a m_2 con: C_2 y R_2, y una fuente $V(t)$, proporcional a $F(t)$

ANALOGÍA CIRCUITOS ELÉCTRICOS-MECÁNICOS