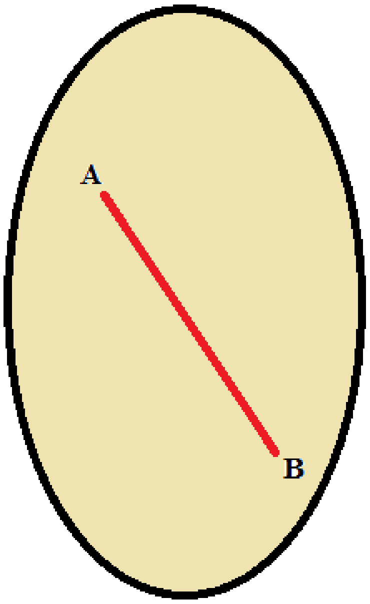
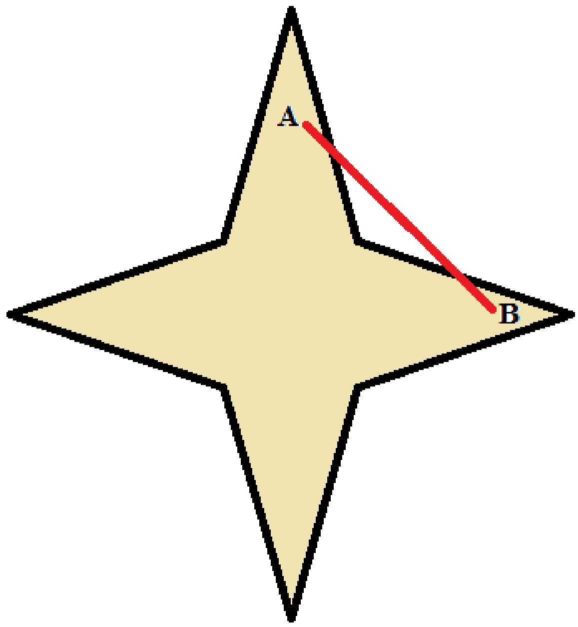
e-mail: **imozas@elx.uned.es**
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

CONVEXIDAD DE CONJUNTOS.-



Conjunto convexo



Conjunto no convexo

1. Estudiar si es convexo el conjunto:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Solución.-

No lo es ya que se trata de la circunferencia de centro (0,0) y radio 1. Dos puntos de ella, por ejemplo, son los de coordenadas (1, 0) y (–1, 0), cuyo punto medio es (0,0) que no pertenece a la circunferencia.

2. Estudiar si es convexo el conjunto:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant x^2\}.$$

Solución.-

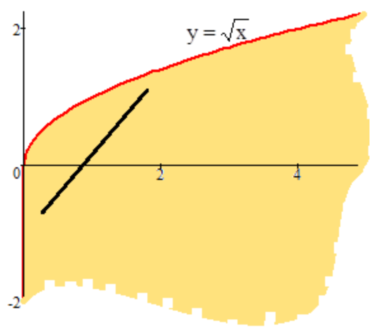
Obviamente no lo es porque, por ejemplo, los puntos (0,0) y (1,1) pertenecen al conjunto y sin embargo el punto medio $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ del segmento que determinan, no pertenece.

3. Estudiar si es convexo el conjunto (dibujarlo):

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leqslant \sqrt{x}\}.$$

Solución.-

Es un conjunto convexo pues el segmento comprendido entre dos puntos cualesquiera de él, le pertenece integramente.

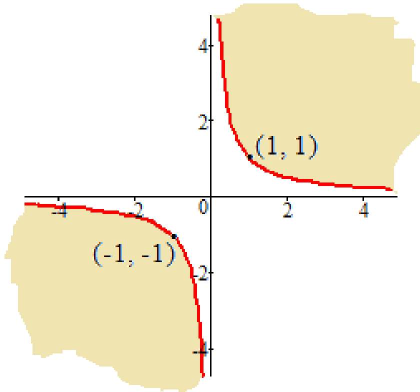


4 . Estudiar si es convexo el conjunto (dibujarlo y razonar matemáticamente):

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geqslant 1\}.$$

Solución.-

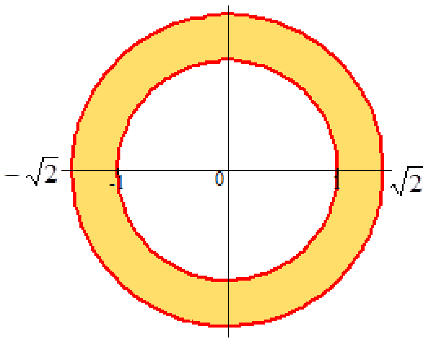
El conjunto es la zona sombreada. No es convexo porque, por ejemplo, el segmento de extremos (1, 1) y (–1, –1) no está íntegramente contenido en él.



5. Estudiar si es convexo el conjunto (dibujarlo):

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2\}.$$

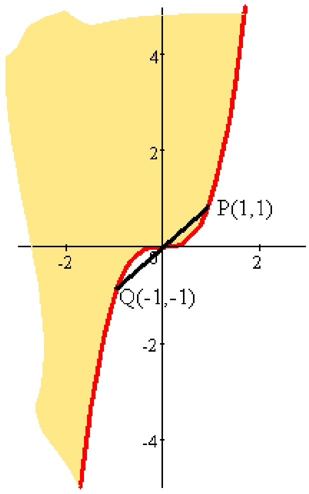
Solución.-



El conjunto no es convexo porque, por ejemplo, el segmento que une los puntos (–1, 0) y (1, 0) no está contenido en él.

6 . Estudiar si es convexo el conjunto (dibujarlo y razonar matemáticamente):

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geqslant x^3\}.$$



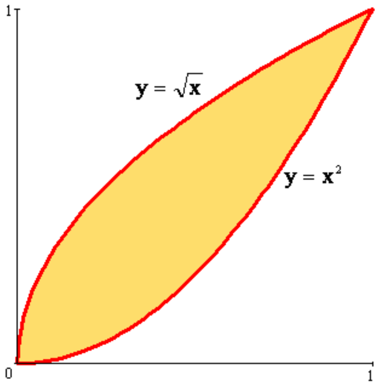
Solución.-

Evidentemente no es convexo. Por ejemplo, el segmento que une los puntos P(1, 1) y Q(–1, –1) no está íntegramente contenido en él.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

7. Estudiar si es convexo el conjunto (dibujarlo):

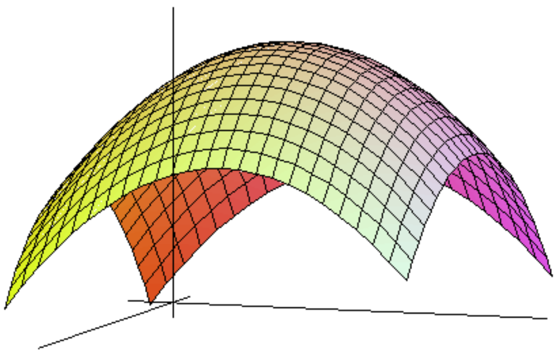
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad x^2 \leqslant y \leqslant \sqrt{x}\}.$$



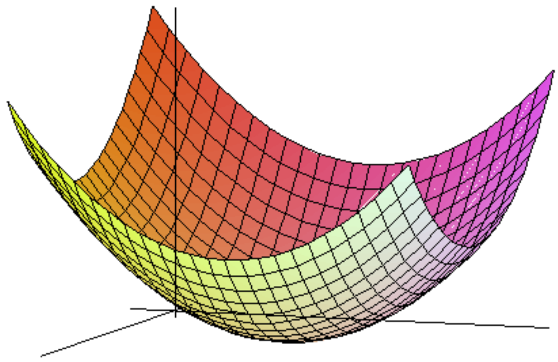
Solución.-

Es un conjunto convexo por tratarse de la intersección de los conjuntos convexos: $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ 0 \leq x \leq 1, \ x^2 \leq y\}$ y $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1, y \leq \sqrt{x}\}$.

CONVEXIDAD DE FUNCIONES.-



Gráfica de función estrictamente cóncava



Gráfica de función estrictamente convexa

Matriz Hessiana.-

$$Hf = \begin{bmatrix} f''_{x_1^2} & f''_{x_1x_2} & \cdots & f''_{x_1x_n} \\ f''_{x_2x_1} & f''_{x_2^2} & \cdots & f''_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ f''_{x_nx_1} & f''_{x_nx_2} & \cdots & f''_{x_nx_n} \end{bmatrix} \text{ siendo } f''_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}; \quad \forall i, j = 1,2, \ldots, n$$

1. Si la matriz Hessiana **de** f es definida positiva <u>en todo el dominio</u> (menores principales de $\boldsymbol{Hf}$ positivos: $h_i > 0 \quad \forall\, i = 1,2,\dots,n$), entonces f **es estrictamente convexa.**
2. Si la matriz Hessiana **de** f es definida negativa <u>en todo el dominio</u> (menores principales de $\boldsymbol{Hf}$ alternarán el signo, siendo el primero de ellos negativo: $h_1 < 0, h_2 > 0, h_3 < 0, \dots$), entonces f **es estrictamente cóncava.**

3. Si la matriz Hessiana de f es semidefinida positiva <u>en todo el dominio</u> (menores principales de $\boldsymbol{Hf}$ cumplen: $h_i > 0 \quad \forall\, i = 1,2,\dots,n-1$ y $h_n = 0$), entonces f es **convexa.** (el recíproco también es cierto)
4. Si la matriz Hessiana de f es semidefinida negativa <u>en todo el dominio</u> (menores principales de $\boldsymbol{Hf}$ cumplen: $h_1 < 0, h_2 > 0, h_3 < 0, \dots \ \forall\, i = 1,2,\dots,n-1$ y $h_n = 0$), entonces f es **cóncava**

EJERCICIOS

1. Estudiar si es cóncava o convexa la función:

$$f(x,y) = -(x+1)^2 - y^2.$$

Solución.-

El gradiente $\nabla f = (-2(x+1), -2y)$ de donde el hessiano: $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, cuya forma cuadrática asociada es definida negativa. Luego la función es cóncava (estrictamente)

2. Estudiar si es cóncava o convexa la función:

$$f(x,y) = e^{(-x)} + e^{(-y)}.$$

Solución.-

$\nabla f = \overline{\left(-e^{-x}, -e^{-y}\right)}$, de donde el hessiano es $\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}$ cuya forma cuadrática asociada es definida positiva (pues $e^{-x} > 0$ y $e^{-x-y} > 0$), luego f(x,y) es estríctamente convexa

3. Estudiar si es cóncava o convexa la función:

$$f(x,y) = e^{(x+y)} + e^{y} + 2x + y.$$

e-mail: imozas@elx.uned.es
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

Solución.-

$\nabla f = \overline{\left(e^{x+y} + 2, e^{x+y} + e^{y} + 1\right)}$, de donde el hessiano: $\begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} + e^{y} \end{pmatrix}$, cuya forma cuadrática asociada es definida positiva ya que los menores angulares $H_1 = e^{x+y} > 0$ y $H_2 = e^{x+2y} > 0$, luego f es convexa (estrictamente).

4. Considérese la función $f(x, y) = ax^2 + by^2$, donde a y b son dos parámetros reales. Discutir, según los valores de a y b, si la función f es cóncava o convexa.

Solución.-

Analicemos la forma cuadrática asociada al hessiano $\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$. Se tiene:

- Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$ la forma cuadrática es definida (o semidefinida) positiva. Luego la función es estrictamente convexa (o convexa).
- Si $a \leq 0$ y $b \leq 0$ la forma cuadrática sería definida (o semidefinida) negativa y f es estrictamente cóncava (o cóncava).
- (Si a= b = 0, f(x,y) es simultáneamente cóncava y convexa).

Si $a \cdot b < 0$, la forma cuadrática es indefinida y f no es ni cóncava ni convexa.

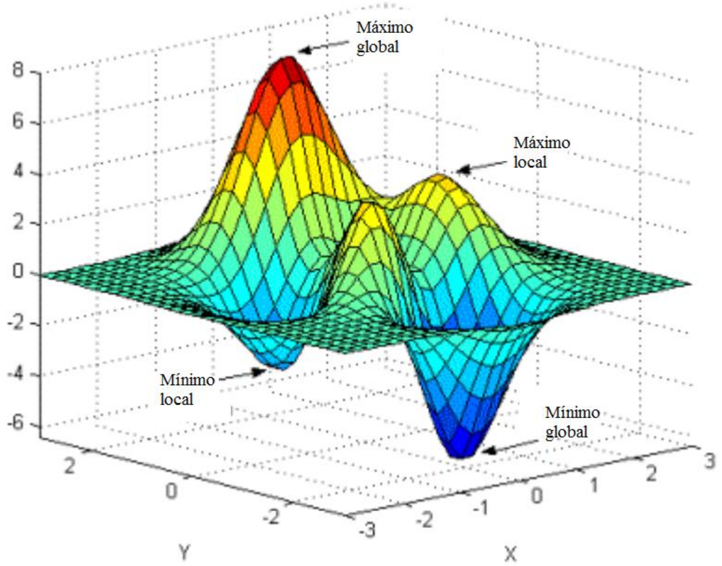
5. Estudiar si es convexa sobre $\mathbb{R}^2$ la función:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - xy - x^3.$$

Solución.-

$\nabla f(x, y) = \overline{\left(2x - y - 3x^2, -2y - x\right)}$, de donde el Hessiano: $\begin{pmatrix} 2 - 6x & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ cuya forma cuadrática asociada no es semidefinida ya que depende de x. Luego f no es convexa (ni cóncava) en $\mathbb{R}^2$.

OPTIMIZACIÓN SIN RESTRICCIONES.-
Extremos relativos de funciones de n variables.-



Sea una función $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ cuyas derivadas segundas son continuas y no simultáneamente nulas.

Condición necesaria para la existencia de óptimos locales

La condición necesaria para la existencia de extremo (máximo o minimo) de la función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ en un punto $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ situado en el espacio n-dimensional, es que las derivadas parciales primeras respecto de cada variable x_i sean nulas en el punto c. O sea:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_c = 0, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_c = 0 \cdots \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_c = 0$$

Condición suficiente para la existencia de óptimos locales.-

a) Si la matriz Hessiana de f es definida positiva en un punto crítico c de f (menores principales de $\boldsymbol{Hf}$ positivos: $h_i > 0 \ \forall\, i = 1,2,\dots,n$), entonces f **presenta un mínimo local estricto en el punto c.**

b) Si la matriz Hessiana de f es definida negativa en un punto crítico c de f (menores principales de $\boldsymbol{Hf}$ alternan el signo, siendo el primero de ellos negativo: $h_1 < 0, h_2 > 0, h_3 < 0, \dots$), entonces f **presenta un máximo local estricto en el punto c.**

Si la matriz Hessiana de f resulta ser indefinida (no se cumple ninguna de las dos condiciones anteriores y $h_n \neq 0$), entonces f presenta un **punto de silla** en el punto **c.**

En cualquier otro caso, estamos en presencia de **Caso Dudoso** o indeterminado (por ejemplo, si algunos menores h_i son cero, pero el orden de los restantes no se altera).

e-mail: imozas@elx.uned.es
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

Teorema Local – Global

Si una función f es continua y convexa (cóncava) en un conjunto factible convexo, entonces todo mínimo (máximo) local de la función, es global. Además si f es estrictamente convexa (cóncava), entonces todo mínimo (máximo) local es un mínimo (máximo) global estricto.

EJERCICIOS

1. Sea una empresa que produce tres bienes cuyos precios de mercado en competencia perfecta son $p_1 = 16$, $p_2 = 12$ y $p_3 = 20$. Su función de costes es:

$$C(q_1, q_2, q_3) = q_1^2 + 2q_2^2 + 3q_3^2 + 2q_1q_3 + 25,$$

donde q_1, q_2 y q_3 representan las cantidades producidas de cada uno de los tres bienes.
Obténgase los valores de q_1, q_2 y q_3 que maximizan el beneficio de la empresa.

Solución.-

El beneficio es la ganancia menos el coste, siendo la ganancia = $16q_1 + 12q_2 + 20q_3$. Luego el beneficio:

$$B = 16q_1 + 12q_2 + 20q_3 - q_1^2 - 2q_2^2 - 3q_3^2 - 2q_1q_3 - 25$$

El gradiente $\nabla(B) = (16 - 2q_1 - 2q_3, 12 - 4q_2, 20 - 6q_3 - 2q_1) = (0, 0, 0)$, de donde se obtiene la solución $q_1 = 7$, $q_2 = 3$ y $q_3 = 1$.

El hessiano : $\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, cuyos menores angulares son $-2 < 0$, $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 8 > 0$ y $\begin{vmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -32 < 0$, luego la forma cuadrática asociada es definida negativa, por lo que B es una función cóncava y por tanto la solución hallada $q_1 = 7$, $q_2 = 3$ y $q_3 = 1$ corresponde a un máximo.

2. Aplicando las condiciones de optimalidad, calcular los puntos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ máximos relativos de la función:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 2x^2 + 4y^2 + 6.$$

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

Solución.-

$$\nabla f = \overrightarrow{\left(3x^2+4x,\, 3y^2+8y\right)} = \overrightarrow{(0,0)} \rightarrow \begin{cases} 3x^2+4x=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\dfrac{4}{3} \end{cases} \\ 3y^2+8y=0 \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ y=-\dfrac{8}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Los candidatos a extremo son los puntos: $(0,0)$, $\left(0,-\dfrac{8}{3}\right)$, $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$ y $\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{8}{3}\right)$. El Hessiano es H = $\begin{pmatrix} 6x+4 & 0 \\ 0 & 6y+8 \end{pmatrix}$. Estudiemos la forma cuadrática asociada al hessiano de cada punto:

$H_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ Definida positiva $\rightarrow$ f tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$

$H_{(0,-\frac{8}{3})} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$ Indefinida $\rightarrow$ f no tiene extremo relativo en $\left(0,-\dfrac{8}{3}\right)$.

$H_{(-\frac{4}{3},0)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$ Indefinida $\rightarrow$ f no tiene extremo relativo en $\left(-\dfrac{4}{3},0\right)$.

$H_{(-\frac{4}{3},-\frac{8}{3})} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$ Definida negativa $\rightarrow$ f tiene un máximo relativo en $\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{8}{3}\right)$

3. Hallar los óptimos de la función: $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$

Solución.-

El sistema $\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x-2y=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2x+2y=0 \end{aligned}\right\}$ admite como solución todos los puntos del plano x = y.

En el hessiano H = $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ se cumple que h_1 = 2 y h_2 = H = 0, luego estamos en el caso dudoso. Ahora bien, observamos que la función f(x,y) = $(x - y)^2 \geq 0$ y es cero si y solo si x = y. Luego en cada punto del plano x= y existe un mínimo global (y local). No existen máximos.

4. Un agricultor utiliza como únicos factores para cultivar un campo trabajo y fertilizantes, siendo x_1, x_2 los costes de estos factores. Si el beneficio por unidad de superficie viene dado por: $B(x_1,x_2) = 20x_1 + 26x_2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2$ Encontrar los valores de x_1, x_2 que maximizan el beneficio.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

Solución.-

La solución del sistema $\left.\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x_1} = 20 + 4x_2 - 8x_1 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} = 26 + 4x_1 - 6x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$ es $x_1 = 7$ y $x_2 = 9$. La forma cuadrática asociada a la matriz hessiana H = $\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ es definida negativa luego B es cóncava y por tanto el punto $(7, 9)$ es el máximo global.

5. Dada la siguiente función $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 5x_2^2 + 4x_2 + 1$ identificar sus puntos críticos y clasificarlos como mínimos, máximos o puntos de silla. Los óptimos locales encontrados ¿son globales?

Solución.-

El gradiente $\nabla f(x_1, x_2) = \overline{(-2x_1, -10x_2 + 4)} = \overline{(0,0)} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{2}{5} \end{cases}$.

La forma cuadrática asociada a la matriz hessiana H = $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$ es definida negativa luego el punto $\left(0, \frac{2}{5}\right)$ es un máximo local.

También, por ser la matriz hessiana definida negativa, la función $f(x_1, x_2)$ es estrictamente cóncava, luego el máximo es global.