TEMA 2.- OPTIMIZACIÓN CON RESTRICCIONES DE IGUALDAD

El problema consiste en optimizar una función de n variables $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ sujeta a las m condiciones:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = b_2 \\ .... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = b_m \end{array}\right\}$$

siendo m < n.

Método de sustitución.-

Si es factible despejar m incógnitas del sistema anterior, en función de las otras n−m incógnitas, sustituimos sus valores en z y el problema se reduce a una optimización sin restricciones.

Un ejemplo:

La función de utilidad de un determinado consumidor es: $u(x, y) = \ln(2 + xy)$, *donde* x e y son las cantidades consumidas de los bienes P y M cuyos precios unitarios son de 1 euro, respectivamente. Si el consumidor dispone de una renta total de 8 euros para consumir y la gasta en su totalidad.

Calcular qué cantidad de los bienes debe comprar para maximizar su utilidad

Solución.-

Se trata de maximizar $u(x,y) = \ln(2+xy)$, sujeto a $x + y = 8$

Despejamos $y = 8 - x$, sustituimos en $u(x,y)$ y el problema se reduce, por lo tanto, a maximizar $u(x) = \ln(2 + 8x - x^2)$. Derivando e igualando a cero: $u'(x) = \dfrac{8-2x}{2+8x-x^2} = 0 \rightarrow$ $\rightarrow x = 4 \rightarrow y = 4$.

La segunda derivada: $u''(x) = \dfrac{-2(2+8x-x^2)-(8-2x)^2}{(2+8x-x^2)^2} \rightarrow u''(4) = \dfrac{-2}{18} < 0$, luego en el punto (4,4) hay un máximo.

Método de los multiplicadores de Lagrange.-

i. **Estudio de una función con dos variables independientes y una restricción**

$$\begin{array}{rl} \text{Optimizar:} & z = f(x, y) \\ \text{sujeto a:} & g(x, y) = b \end{array}$$

La función Lagrangiana L será:

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda[g(x, y) - b]$$

La **condición necesaria** de primer orden exige que se cumpla:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial g}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

Si llamamos **Hessiano Orlado** $\bar{H}$ al siguiente determinante:

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix}$$

Se demuestra que:

1. Existirá un **máximo si** $\bar{H} > 0$
2. Existirá un **minimo si** $\bar{H} < 0$

ii. **Función objetivo con tres variables independientes y una restricción**

Optimizar: $z = f(x, y, u)$
sujeto a: $g(x, y, u) = b$

La función Lagrangiana L es:

$$L = z + \lambda[g(x, y, u) - b]$$

a) **Condición necesaria:** Nos permitirá obtener los puntos críticos, y exige que:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial u} + \lambda \frac{\partial g}{\partial u} = 0 \end{aligned}\right\}$$

Sistema de tres ecuaciones, que juntamente con la restricción $g(x, y, u) = b$, nos posibilitan obtener los valores (x_0, y_0, u_0) críticos, de posibles máximos o mínimos, y asimismo saber cuál es el valor del parámetro λ o multiplicador de Lagrange.

b) **Condición suficiente:** A través del Hessiano Orlado, y sus menores principales, nos permitirá asegurar qué puntos críticos son máximos y cuales son minimos.
Llamaremos Determinante Orlado $\bar{H}$, en este caso, al siguiente determinante:

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_u \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} & L''_{xu} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} & L''_{yu} \\ g'_u & L''_{ux} & L''_{uy} & L''_{u^2} \end{vmatrix}$$

Asimismo, llamaremos $\bar{H}_2$, al menor principal de $\bar{H}$ consistente en suprimir la última fila y la ultima columna en el Hessiano Orlado $\bar{H}$, es decir:

$$\bar{H}_2 = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{vmatrix}$$

Nota: Repárese que este menor principal $\overline{H}_2$ en funciones objetivo con 3 variables independientes, coincide con el Hessiano Orlado cuando operamos con funciones objetivo de dos variables $z = f(x, y)$.

Pues bien, se demuestra que:

1.- Existirá máximo si $\overline{\mathrm{H}}_2 > 0$ y $\overline{\mathrm{H}} < 0$

2.- Existirá mínimo si $\overline{\mathrm{H}}_2 < 0$ y $\overline{\mathrm{H}} < 0$

iii. Función objetivo con n variables independientes y m restricciones

Optimizar: $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, con las m restricciones:

$$\left.\begin{array}{r} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m \end{array}\right\}$$

La función Lagrangiana será:

$$L = z + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) - b_i] \qquad i = 1,2, \dots, m$$

a) **Condición necesaria:** Obtendremos con ella los posibles puntos críticos, y exige que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, m \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

b) **Condición suficiente:** A partir del Hessiano Orlado $\overline{H}$, y sus menores principales, podremos saber si existe realmente máximo o mínimo.

Omitiendo la demostración, llamaremos **"Hessiano Orlado"** en este caso, al siguiente determinante $\overline{H}$

$$\overline{H} = \left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & g'_{11} & g'_{12} & \cdots & g'_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g'_{21} & g'_{22} & \cdots & g'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & g'_{m1} & g'_{m2} & \cdots & g'_{mn} \\ \hline g'_{11} & g'_{21} & \cdots & g'_{m1} & L''_{11} & L''_{12} & \cdots & L''_{1n} \\ g'_{12} & g'_{22} & \cdots & g'_{m2} & L''_{21} & L''_{22} & \cdots & L''_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g'_{1n} & g'_{2n} & \cdots & g'_{mn} & L''_{n1} & L''_{n2} & \cdots & L''_{nn} \end{array}\right|$$

$$siendo \;\; L''_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j} \;\; y \;\; g'_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j}$$

 e-mail: **imozas@elx.uned.es**

A partir del Hessiano Orlado $\bar{H}$ pueden formarse distintos menores principales orlados. Asi el que contiene a L''_{ii} como último elemento de su diagonal principal se denota por $\bar{H}_i$, y su expresión será:

$$\bar{H}_i = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & g'_{11} & \cdots & g'_{1i} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & g'_{m1} & \cdots & g'_{mi} \\ \hline g'_{11} & \cdots & g'_{m1} & L''_{11} & \cdots & L''_{1i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g'_{1i} & \cdots & g'_{mi} & L''_{i1} & \cdots & L''_{ii} \end{array}\right|$$

Una **condición suficiente** de optimalidad es:

- Si los últimos $(n-m)$ menores principales orlados tienen el mismo signo de $(-1)^m$, entonces en el punto $\bar{x}_0$ existira un **mínimo** relativo o local. Es decir, los últimos $(n-m)$ menores principales deben ser todos positivos si m es par, y todos negativos si m es impar.
- Si los últimos $(n-m)$ menores principales orlados tienen el **signo alternado,** comenzando por $(-1)^{m+1}$, entonces en el punto $\bar{x}_0$ existirá un **máximo** relativo o local. El signo alternado exige que si m es **par** el **primero** sea negativo y si m es **impar** entonces el primero debe ser positivo. (Nota: se entiende por "primero" el de menor orden).

Condición suficiente de optimalidad global.-

Se demuestra que si la función objetivo f, es una función **cóncava (convexa)** y el conjunto factible S, es un conjunto convexo, entonces todo punto factible que verifique la condición de Lagrange, será necesariamente un **máximo (mínimo) global**, constituyendo en este caso la condición de Lagrange una condición necesaria y suficiente de optimalidad global.

Además, en el caso de que f sea **estrictamente cóncava (convexa)**, se tiene la **unicidad** del **máximo (mínimo) global.**

Nota

Cuando el conjunto **factible** S está definida mediante restricciones de **i**gualdad, sólo se obtienen conjuntos factibles convexos si las funciones que definen las restricciones son lineales.

Interpretación de los multiplicadores de Lagrange.-

Si f toma el valor óptimo en x^*, entonces $\frac{df(x^*)}{db_k} = -\lambda_k$ ó también $df(x^*) = -\lambda_k db_k$.

EJERCICIOS

1 La función de utilidad de un consumidor es $U(x, y) = 2lnx + lny$
Su restricción presupuestaria viene dada por la ecuación x+2y =18

Calcular los niveles de x e y que el consumidor debe comprar de dos bienes A y B, respectivamente, con el fin de maximizar su utilidad.

Solución.-

Lo resolveremos por el método de sustitución. Se tiene que x = 18 – 2y luego U(x,y) = = f(y) = 2ln(18–2y) + lny.

La derivada $\frac{df(y)}{dy} = \frac{-4}{18-2y} + \frac{1}{y} = 0 \leftrightarrow 4y = 18 - 2y \leftrightarrow y = 3$.

La segunda derivada: $\frac{d^2f(y)}{dy^2} = \frac{-8}{(18-2y)^2} - \frac{1}{y^2}$ que es menor que cero en todo punto del dominio de f(y). Luego en y = 3, f(y) toma un máximo global. Por tanto en el punto (12, 3) se maximiza U(x,y)

2. La función de utilidad de un consumidor es: $U(x, y) = 2xy + y$
Sujeto a: $P_1x + P_2y = M$

Donde x e y representan las cantidades de los bienes 1 y 2 consumidos en un período de tiempo dado. P_1 y P_2 (ambos positivos), son los precios unitarios de cada uno de los bienes y M la cantidad de dinero de la que dispone el individuo.

a. Calcular la cantidad a consumir de cada uno de los bienes, si el objetivo es maximizar la utilidad.
b. ¿Cuál es la variación que experimenta la utilidad máxima ante un cambio en la cantidad de dinero disponible?

Solución.-

a) La función lagrangiana $\mathcal{L}(x, y) = 2xy + y + \lambda(P_1x + P_2y - M)$

La condición necesaria de óptimo:

$2y + \lambda P_1 = 0$

$2x + 1 + \lambda P_2 = 0$

$P_1x + P_2y = M$

Resolviendo el sistema se obtiene $x = \frac{2M - P_1}{4P_1}$; $y = \frac{2M + P_1}{4P_2}$; $\lambda = -\frac{2M + P_1}{2P_1P_2}$

El Hessiano orlado: $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & P_1 & P_2 \\ P_1 & 0 & 2 \\ P_2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4P_1P_2 > 0$, luego las cantidades obtenidas maximizan la utilidad.

b) La variación que experimentará la utilidad máxima ante un cambio (de una unidad) en la cantidad de dinero disponible es el valor opuesto del multiplicador de Lagrange, es decir, $\dfrac{2M + P_1}{2P_1P_2}$.

3. Resuelva el problema $Min \quad 4x^2 + y^2$
Sujeto a $2x + y = 5000$

Indicando el valor del multiplicador asociado a la solución.
¿Cuál será el efecto sobre el valor de la función objetivo en el óptimo, si se incrementa en una unidad la constante de la restricción?

Solución.-

La función lagrangiana $\mathcal{L}(x, y) = 4x^2 + y^2 + \lambda(2x + y - 5000)$

La condición necesaria de óptimo:

$8x + 2\lambda = 0$
$2y + \lambda = 0$
$2x + y = 5000$

Resolviendo el sistema se obtiene x =1250; y =2500; $\lambda = -5000$

El Hessiano orlado: $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -16 < 0$, luego el punto (1250, 2500) minimiza la función objetivo.

Si la constante de restricción pasa de 5000 a 5001, el valor de la función objetivo en el óptimo aumentará aproximadamente 5000 unidades (el opuesto de λ)

4. Obténgase los óptimos globales del programa: $f(x,y) = 10x + 8y - x^2 - 2y^2$ bajo la restricción dada por la ecuación $x + y = 4$.

Solución.-

Lo resolveremos por sustitución.

$x+y=4 \rightarrow y = 4 - x \rightarrow f(x) = 10x + 32 - 8x - x^2 - 2(16 - 8x + x^2) = 18x - 3x^2 \rightarrow$
$\rightarrow f'(x) = 18 - 6x = 0 \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 1$. Por otra parte $f''(x) = -6 < 0 \rightarrow$ en el punto (3, 1) hay un máximo relativo.

Como la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de f(x,y): $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ es definida negativa, la función f(x,y) es cóncava. Además el conjunto factible es convexo, luego el punto (3, 1) es máximo global.

5. Estudie los óptimos locales de la función: $f(x,y) = x^2 + y$, bajo la restricción dada por la ecuación $x^3 + y = 0$

Solución.-

Lo resolveremos por sustitución:

$x^3 + y = 0 \to y = -x^3 \to f(x) = x^2 - x^3 \to f'(x) = 2x - 3x^2 = 0 \to \begin{cases} x = 0 \to y = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \to y = -\dfrac{8}{27} \end{cases}$.

por otra parte: $f''(x) = 2 - 6x \to \begin{cases} f''(0) = 2 > 0 \to (0,0) \text{ es mínimo local} \\ f''\left(\dfrac{2}{3}\right) = -2 < 0 \to \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{-8}{27}\right) \text{ es máximo local} \end{cases}$

6 . Sea la función de costes de una empresa $C(x, y) = -x + (y-1)^2 + 10$. Donde x e y son las cantidades de los factores A y B que se utilizan para obtener el producto Q. Fijado el nivel de producción de Q en 9 unidades, la tecnología utilizada para alcanzar dicho nivel viene dada por la función de producción:

$$Q(x, y) = x^2 + (y-1)^2$$

Se pide:

a) ¿Cuál será la elección del empresario si su objetivo es determinar la combinación de factores (entendiéndose que sólo se considerará aquella combinación donde los dos factores sean positivos) que minimizan el coste de la empresa, para un nivel de producción de 9 unidades?. En este caso, ¿qué valor alcanzaría el coste de la empresa?.

b) Si tras una mejora en la productividad de la empresa, el empresario se plantease aumentar en una pequeña cantidad su nivel de producción, ¿disminuiría con ellos sus costes?. Razone la respuesta.

Solución.-

Se trata de minimizar $C(x, y) = -x + (y-1)^2$, sujeto a $Q(x, y) = x^2 + (y-1)^2 = 9$.

La función lagrangiana: $\mathcal{L}(x, y) = -x + (y-1)^2 + \lambda[x^2 + (y-1)^2 - 9]$

La condición necesaria de óptimo:

$$-1 + 2\lambda x = 0$$
$$2(y-1) + 2\lambda(y-1) = 0$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 9$$

admite como única solución (con los factores positivos): $x = 3$, $y = 1$, $\lambda = \dfrac{1}{6}$.

El hessiano orlado $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2(y-1) \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2(y-1) & 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix} = -8\lambda(y-1)^2 - 8x^2(1+\lambda) =$

= (particularizado para la solución obtenida) = $-84 < 0$, luego dicha solución minimiza el coste.

El valor mínimo sería $C(3, 1) = -3 + (1-1)^2 = -3$.

b) El coste marginal de aumentar una pequeña cantidad, por ejemplo una unidad, el nivel de producción, sería el opuesto del valor del multiplicador, es decir $-\dfrac{1}{6}$, lo que significa que disminuiría sus costes.

e-mail: **imozas@elx.uned.es**

7. La función de utilidad de un consumidor, depende de la adquisición que éste haga de tres bienes (x,y,z) , en los siguientes términos:

$$U(x,y,z) = 5lnx + 3lny + 2lnz, \qquad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0$$

Si los precios unitarios de cada uno de los bienes son 10, 2 y 4 u.m. respectivamente, determine la cantidad de cada bien que hará máxima la utilidad del consumidor, si éste agota su renta que es de 1.000 u.m.

Solución.-

El ejercicio consiste en maximizar U(x,y,z) = 5lnx+ 3lny + 2lnz sujeto a 10x + 2y + 4z = 1000.

La función lagrangiana $\mathcal{L}(x, y) = 5\ln x + 3\ln y + 2\ln z + \lambda(10x + 2y + 4z - 1000)$

La condición necesaria de óptimo:

$$\frac{5}{x} + 10\lambda = 0$$
$$\frac{3}{y} + 2\lambda = 0$$
$$\frac{2}{z} + 4\lambda = 0$$
$$10x + 2y + 4z = 1000$$

sistema que resuelto proporciona x = 50, y = 150, z = 50, $\lambda = -\frac{1}{100}$

El Hessiano orlado: $$\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 2 & 4 \\ 10 & -\frac{5}{50^2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{150^2} & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -\frac{2}{50^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{46875} < 0, \quad \text{y}$$

$$\overline{H}_3 = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 2 \\ 10 & -\frac{5}{50^2} & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{3}{150^2} \end{vmatrix} = \frac{8}{375} > 0$$, luego las cantidades obtenidas maximizan la utilidad.

8. Estudie los óptimos locales de la función: $f(x,y) = x^2 + y$, bajo la restricción dada por la ecuación $x^3 + y = 0$

Solución.-

La función lagrangiana: $\mathcal{L}(x, y) = x^2 + y + \lambda(x^3 + y)$

La condición necesaria de óptimo:

$$2x + 3\lambda x^2 = 0$$
$$1 + \lambda = 0$$
$$x^3 + y = 0$$

e-mail: **imozas@elx.uned.es**
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

admite como soluciones (x = 0, y = 0, λ = –1) y ($x = \frac{2}{3}$, $y = -\frac{8}{27}$, λ = –1)

El hessiano orlado $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 3x^2 & 1 \\ 3x^2 & 2+6\lambda x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 - 6\lambda x.$

Para la primera solución $\overline{H} = -2 < 0$, luego el punto (0, 0) es mínimo local.

Para la segunda solución $\overline{H} = 2 > 0$, luego el punto $\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}\right)$ es máximo local.

9. Considere la función de utilidad de un consumidor dada por:

$U(x, y) = lnx + lny$, donde la restricción presupuestaria viene determinada por la ecuación: $px + qy = r$, siendo p y q los precios de cada uno de los bienes y r la renta monetaria.

a) Calcular las unidades que ha de consumir x, y para maximizar la utilidad.
b) ¿Se puede afirmar que el máximo obtenido es un máximo global del problema?
c) Halle aproximadamente la variación en la utilidad máxima del consumidor si la renta disponible aumenta en una unidad.

Solución.-

a) Se trata de maximizar U(x,y) = lnx + lny, sujeto a px + qy = r.

La función lagrangiana $\mathcal{L}(x, y) = \ln x + \ln y + \lambda(px + qy - r)$

La condición necesaria de óptimo:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\lambda p=0 \\ \frac{1}{y}+\lambda q=0 \\ px+qy=r \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene x = $\frac{r}{2p}$; y = $\frac{r}{2q}$; λ = $-\frac{2}{r}$

El Hessiano orlado: $\overline{H}=\begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & -\frac{1}{x^2} & 0 \\ q & 0 & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix}=\frac{q^2}{x^2}+\frac{p^2}{y^2}$ > 0, luego los valores obtenidos de x e y maximizan la utilidad.

b) Como la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de U(x,y): $\begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$ es definida negativa, la función U(x,y) es cóncava. Además el conjunto factible es convexo, luego el punto $\left(\frac{r}{2p},\frac{r}{2q}\right)$ es máximo global.

c) Sería el opuesto del valor del multiplicador, $\frac{2}{r}$

10. Un consumidor dispone de 600 u.m para gastar en dos productos. El primero de ellos tiene un precio de 20 u.m por unidad y el segundo de 30 u.m por unidad. Sila función del consumidor es: $U(x,y) = 10x^{0,6}y^{0,4}$, se pide:

a) Determinar el número de unidades de cada artículo que deberá comprar el consumidor para maximizar la utilidad.
b) Calcule la utilidad máxima.
c) Halle aproximadamente la variación en la utilidad máxima del consumidor si la renta disponible aumenta en una unidad.

Solución.-
a) Se trata de maximizar U(x,y) = $10x^{0,6}y^{0,4}$, sujeto a 20x + 30y = 600.
La función lagrangiana $\mathcal{L}(x, y) = 10x^{0,6}y^{0,4} + \lambda(20x + 30y - 600)$

La condición necesaria de óptimo:

$$\left.\begin{array}{l} 6\left(\dfrac{y}{x}\right)^{0,4} + 20\lambda = 0 \\ 4\left(\dfrac{x}{y}\right)^{0,6} + 30\lambda = 0 \\ 20x + 30y = 600 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema se obtiene x =18; y = 8; $\lambda = -\dfrac{4}{30}\left(\dfrac{9}{4}\right)^{0,6}$

El Hessiano orlado: $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 20 & 30 \\ 20 & -\dfrac{2,4y^{0,4}}{x^{1,4}} & \dfrac{2,4}{x^{0,4}y^{0,6}} \\ 30 & \dfrac{2,4}{x^{0,4}y^{0,6}} & -\dfrac{2,4x^{0,6}}{y^{1,6}} \end{vmatrix} = \dfrac{960x^{0,6}}{y^{1,6}} + \dfrac{2880}{x^{0,4}y^{0,6}} + \dfrac{2160y^{0,4}}{x^{1,4}} > 0,$ luego los valores obtenidos de x e y maximizan la utilidad.

b) Como la forma cuadrática asociada a la matriz hessiana de U(x,y): $\begin{pmatrix} -\dfrac{2,4y^{0,4}}{x^{1,4}} & \dfrac{2,4}{x^{0,4}y^{0,6}} \\ \dfrac{2,4}{x^{0,4}y^{0,6}} & -\dfrac{2,4x^{0,6}}{y^{1,6}} \end{pmatrix}$ es semidefinida negativa (el determinante es cero), la función U(x,y) es cóncava. Además el conjunto factible es convexo, luego el punto (18, 8) es máximo global.

c) Sería el opuesto del valor del multiplicador, $\dfrac{4}{30}\left(\dfrac{9}{4}\right)^{0,6} \cong 0,2169$

11. La función de costes de una empresa:

$$C(x,y) = -x + (y-1)^2 + 10$$

Donde x e y son las cantidades de los factores A y B que se utilizan para obtener el producto Q. Fijado el nivel de producción de Q en 9 unidades, la tecnología utilizada para alcanzar dicho nivel viene dada por la función de producción:

$$Q(x,y) = x^2 + (y-1)^2 \qquad \text{con } x \geq 0,\ y \geq 0$$

Calcular la elección óptima del empresario si su objetivo es determinar la combinación de factores que minimizan el coste de la empresa.

Solución.-

Se trata de minimizar $-x + (y-1)^2 + 10$, sujeto a $x^2 + (y-1)^2 = 9$, con $x \geq 0$, $y \geq 0$

La función lagrangiana: $\mathcal{L}(x, y) = -x + (y-1)^2 + 10 + \lambda[x^2 + (y-1)^2 - 9]$

La condición necesaria de óptimo:

$$-1 + 2\lambda x = 0$$
$$2(y-1) + 2\lambda(y-1) = 0$$
$$x^2 + (y-1)^2 = 9$$
$$x \geq 0,\ y \geq 0$$

admite como solución $x = 3$, $y = 1$, $\lambda = \frac{1}{6}$

El hessiano orlado $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2(y-1) \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2(y-1) & 0 & 2+2\lambda \end{vmatrix}$, para $x = 3$, $y = 1$, $\lambda = \frac{1}{6}$ toma el valor

$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{vmatrix} = -84 < 0$ luego el punto (3, 1) es mínimo local.

12. Resuelva el problema $\quad Min \quad 4x^2 + y^2$
Sujeto a $2x + y = 5000$

Indicando el valor del multiplicador asociado a la solución.
¿Cuál será el efecto sobre el valor de la función objetivo en el óptimo, si se incrementa en una unidad la constante de la restricción?

Solución.-

La función lagrangiana: $\mathcal{L}(x, y) = 4x^2 + y^2 + \lambda(2x + y - 5000)$

La condición necesaria de óptimo:

$$8x + 2\lambda = 0$$
$$2y + \lambda = 0$$
$$2x + y - 5000 = 0$$

admite como solución $x = 1250$, $y = 2500$, $\lambda = -5000$

El hessiano orlado $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -16 < 0$ luego el punto (1250, 2500) es mínimo local.

El efecto sobre el valor de la función objetivo en el óptimo, puesto que el incremento de la constante es muy pequeño (1 frente a 5000) es prácticamente igual al opuesto del valor del multiplicador, es decir, se producirá un aumento aproximado de 5000.

 e-mail: **imozas@elx.uned.es**
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

13. Sea la función de utilidad de un consumidor $U(x,y) = 6xy + 2(y-2)$. Donde x e y, son las cantidades que de adquieren de los bienes A y B. Los precios por unidad de dichos bienes vienen determinaos por el mercado, siendo estos 4 y 2 unidades monetarias (u.m), respectivamente. La cantidad de dinero de que dispone el consumidor para comprar dichos bienes es de 8 u.m. Se pide:

a) ¿Cúal será la elección óptima del consumidor si su objetivo es alcanzar el máximo nivel de utilidad, suponiendo que se gasta toda su renta monetaria, R?. En dicha elección óptima, ¿cuál sería el valor de la utilidad para el consumidor?

b) ¿Aumentaría el consumidor su utilidad si dispusiera de una menor renta monetaria? Razone su respuesta.

Solución.-

a) Se trata de maximizar U(x,y) = 6xy + 2(y – 2), sujeto a 4x + 2y = 8.

La función lagrangiana $\mathcal{L}(x, y) = 6xy + 2(y-2) + \lambda(4x + 2y - 8)$

La condición necesaria de óptimo:

$$6y + 4\lambda = 0$$
$$6x + 2 + 2\lambda = 0$$
$$4x + 2y = 8$$

Resolviendo el sistema se obtiene $x = \frac{5}{6}$; $y = \frac{7}{3}$; $\lambda = -\frac{7}{2}$

El Hessiano orlado: $\overline{H} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 96 > 0$, luego las cantidades obtenidas maximizan la utilidad.

Sustituyendo los valores obtenidos en la función de utilidad se obtiene $U\left(\frac{5}{6}, \frac{7}{3}\right) = \frac{37}{3}$

b) Se trataría ahora de maximizar U(x,y) = 6xy + 2(y – 2), sujeto a 4x + 2y ≤ 8.

Las condiciones necesarias de Khun-Tucker

$$6y + 4\lambda = 0$$
$$6x + 2 + 2\lambda = 0$$
$$\lambda(4x + 2y) = 8$$

Para que 4x + 2y < 8, tendría que ser $\lambda = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3}$ que carece de significado.

Luego con una renta monetaria < 8 no se aumenta la utilidad.