

TEMA 4.- ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ecuación diferencial ordinaria de orden n.- Es una relación entre la variable “x”, la función “y” y las sucesivas derivadas de ésta, es decir $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$. Una solución es una función $y = f(x)$ que sustituida en la ecuación, la verifica.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ecuaciones de variables separadas

Tienen la forma $f_1(x)dx = f_2(y)dy$. La solución es $\int f_1(x)dx + C = \int f_2(y)dy$

Ejemplo: $(4x - x^2)dx - ydy = 0$. Integrando $\int (4x - x^2)dx - \int ydy = C \rightarrow$
 $\rightarrow 2x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} = C$

Ecuaciones de variables separables

Tienen la forma $f_1(x) \cdot f_2(y)dx = g_1(x) \cdot g_2(y)dy$. Se transforma en una de las anteriores dividiendo por $f_2(y) \cdot g_1(x)$.

Ejemplo: $y(1 + e^x)dy - (y^2 + 1)e^x dx = 0$. Dividimos por $(1 + e^x)(y^2 + 1)$ y queda
 $\frac{y}{y^2 + 1}dy - \frac{e^x}{1 + e^x}dx = 0$. Integrando $\frac{1}{2} \ln(y^2 + 1) - \ln(1 + e^x) = C$

Ecuación lineal de primer orden

Es de la forma $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$

Para resolverla, hallaremos dos funciones u y v (de x) que cumplan $y = u \cdot v$. Derivando y sustituyendo en la ecuación queda:

$$u'v + uv' + P(x) \cdot uv = Q(x) \leftrightarrow [u' + P(x)u]v + uv' = Q(x) \quad (I)$$

Hacemos entonces $u' + P(x)u = 0$, de donde $\frac{u'}{u} = -P(x) \leftrightarrow \ln u = -\int P(x)dx \rightarrow u = e^{-\int P(x)dx}$.

Sustituyendo en (I):

$$v' e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \rightarrow v' = Q(x) e^{\int P(x)dx} \rightarrow v = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx$$

Así pues, la solución sería $y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx$

Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una función $f(x, y)$ es homogénea de grado n si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$

Una ecuación diferencial de la forma $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ es homogénea si P y Q son funciones homogéneas del mismo grado. Se resuelven haciendo el cambio $y = u \cdot x$ de donde $dy = u \cdot dx + x \cdot du$. Al sustituir se transforma en una de variables separables

Ejemplo: $(x^3 + y^3) dx - 3xy^2 dy = 0$. Es homogénea de grado 3. Haciendo el cambio mencionado: $(x^3 + u^3 x^3) dx - 3xu^2 x^2 (u dx + x du) = 0$. Dividiendo por x^3 :
 $(1 + u^3) dx - 3u^2 (u dx + x du) = 0$ de donde $(1 - 2u^3) dx - 3xu^2 du = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{3u^2}{1-2u^3} du = 0 \rightarrow \ln x + \frac{1}{2} \ln(1-2u^3) = \ln C \leftrightarrow 2\ln x + \ln(1-2u^3) = \ln K \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow x^2 (1-2u^3) = K \text{ y como } u = \frac{y}{x} \text{ quedaría finalmente } x^3 - 2y^3 = Kx$$

Ecuaciones diferenciales exactas

Una ecuación $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ es diferencial exacta si existe una función $F(x, y) = C$, (que será la solución) cuya diferencial es la ecuación, es decir $\frac{\partial F}{\partial x} = P$ y $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$.

Supondremos que las primeras derivadas parciales de F son continuas. Luego se cumplirá que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Para resolverla, como $\frac{\partial F}{\partial x} = P \rightarrow \int P dx + C(y) = F$ (II), donde $C(y)$ es una

constante arbitraria que depende de y . Derivando respecto de y : $\frac{\partial}{\partial y} \int P dx + C'(y) = Q \leftrightarrow$

$\leftrightarrow C'(y) = Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P dx$. Integrando respecto de y obtenemos $C(y)$. Finalmente sustituyendo en (II) obtenemos F

Ejemplo: $(4x^3y^3 - 2xy) dx + (3x^4y^2 - x^2) dy = 0$, es diferencial exacta pues $\frac{\partial P}{\partial y} = 12x^3y^2 - 2x$ y $\frac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3y^2 - 2x$. Como $\int (4x^3y^3 - 2xy) dx = x^4y^3 - x^2y + C(y)$. Luego $3x^4y^2 - x^2 = 3x^4y^2 - x^2 + C'(y) \leftrightarrow C'(y) = 0 \leftrightarrow C(y) = K$, luego La solución es $x^4y^3 - x^2y = K$

Factor integrante

Supongamos que la ecuación $Pdx + Qdy = 0$ no es diferencial exacta pero que podemos encontrar una función $\mu = \mu(x, y)$ tal que $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ sí lo sea. Diremos que μ es un factor integrante. En este caso se tendrá que $\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$ (III)

En el caso particular que $\mu = \mu(x)$ dependa sólo de x , la expresión (III) queda $\mu \frac{\partial P}{\partial y} = \mu' Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right)$ de donde podemos obtener μ .

En el caso particular que $\mu = \mu(y)$ dependa sólo de y , la expresión (III) queda $\mu' P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \mu \frac{\partial Q}{\partial x} \leftrightarrow \frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$ de donde podemos obtener μ .

Ejemplo: Hallar un factor integrante dependiente de x para la ecuación diferencial $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$.

Calculamos $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{2y - (-2y)}{-2xy} = -\frac{2}{x}$ Integrando $\ln \mu = -2 \ln x$ y de aquí

$\ln \mu = \ln x^{-2}$ de donde $\mu = \frac{1}{x^2}$.

Ecuaciones de Bernoulli

Son de la forma $y' + P(x)y = Q(x)y^n$, donde n entero > 1 . Dividiendo la ecuación por y^n queda. $y' y^{-n} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$. Hacemos el cambio $y^{1-n} = z$ y derivando $(1-n)y^{-n} \cdot y' = z'$. Sustituyendo en la ecuación queda $\frac{1}{1-n} z' + P(x)z = Q(x)$, que es lineal de primer orden.

EJERCICIOS

1. Compruebe que $x^2 + y^2 = C$ es la solución general de la ecuación diferencial:

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Solución.-

Derivando en la expresión $x^2 + y^2 = C$ obtenemos: $2x + 2yy' = 0 \rightarrow y' = -\frac{x}{y}$

2.

Denotemos por y el ingreso en euros que se obtiene al vender x unidades de un producto. Si la tasa a la que varía el ingreso respecto al número de unidades vendidas viene dada por la ecuación diferencial:

$$y' + \frac{x^2}{1-y^2} = 0,$$

obtener y en función de x , sabiendo que la venta de 1 unidad del producto produce un ingreso de 1 euro.

Solución.-

La ecuación diferencial la podemos escribir:

$$(y^2-1)dy = x^2 dx \text{ e integrando: } \frac{1}{3}y^3 - y + C = \frac{1}{3}x^3 \leftrightarrow y^3 - x^3 - 3y + 3C = 0$$

Puesto que si $x = 1 \rightarrow y = 1$, se tiene que $3C = 3$, luego la solución es: $y^3 - x^3 - 3y + 3 = 0$.

3. Resolver la ecuación diferencial: $y' = y - \ln x + \frac{1}{x}$

Solución.-

Es una ecuación lineal de primer orden. Hacemos $y = u \cdot v \rightarrow y' = u'v + uv'$.

Sustituyendo en la ecuación: $u'v + uv' = uv - \ln x + \frac{1}{x} \leftrightarrow v(u' - u) + uv' = -\ln x + \frac{1}{x}$. Una

solución de $u' - u = 0$ es $u = e^x$, con lo que la ecuación queda $e^x v' = -\ln x + \frac{1}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow v' = -e^{-x} \ln x + \frac{e^{-x}}{x}$. Resolviendo por partes se obtiene que $v = e^{-x} \ln x + C$. Luego:

$$y = e^x(e^{-x} \ln x + C) = \ln x + Ce^x$$

4. Sea y el coste de producir x unidades de un libro. La tasa a la que varía el coste respecto a los libros producidos es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y + y^3}{x^3},$$

Hállese el coste en función del número de libros producidos, sabiendo que si se producen 5 unidades, el coste es de 10 euros.

Solución.-

Hacemos el cambio $y = ux \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + u = u + u^3 \Leftrightarrow \frac{du}{dx}x = u^3 \Leftrightarrow \frac{du}{u^3} = \frac{dx}{x}$.

Integrando: $-\frac{1}{2u^2} = \ln x + C_1$. Sustituyendo u : $\frac{x^2}{y^2} = -2 \ln x + C \Leftrightarrow y = \frac{x}{\sqrt{C - \ln x^2}}$. Para $x = 5$

tendremos $10 = \frac{5}{\sqrt{C - \ln 25}} \Leftrightarrow C = \frac{1}{4} + \ln 25$. Luego $y = \frac{x}{\sqrt{\frac{1}{4} + \ln \frac{25}{x^2}}}$.

5. Resolver la ecuación diferencial: $xdy = (x + y)dx$

Solución.-

Podemos escribir la ecuación de la forma $y' - \frac{1}{x}y = 1$, que resulta ser una ecuación lineal.

Hacemos el cambio $y = u \cdot v$ y sustituyendo en la ecuación queda $v\left(u' - \frac{1}{x}u\right) + uv' = 1$. Haciendo

$u' - \frac{1}{x}u = 0$, obtenemos que $u = x$, luego $xv' = 1$, de donde $v' = \frac{1}{x} \rightarrow v = \ln x + C$. Así pues la solución de la ecuación diferencial es $y = x \ln x + Cx$.

6. Obtener la solución general de la ecuación diferencial: $(4x^2 - 14y)dx - 7xdy = 0$

Solución.-

$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{-7x}(-14 + 7) = \frac{1}{x}$ sólo depende de x luego existe un factor integrante

dependiente de x que es $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$. Multiplicando por x la ecuación queda:

$(4x^3 - 14xy)dx - 7x^2dy = 0 \rightarrow f(x,y) = \int (4x^3 - 14xy)dx = x^4 - 7x^2y + C(y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -7x^2 + C'(y) = -7x^2$, de donde $C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = -C$. Así pues la solución general de la ecuación diferencial es $x^4 - 7x^2y = C$.

7. Hallar un factor integrante que convierta en exacta la siguiente ecuación diferencial: $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0$

Solución.-

Puesto que $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = -\frac{4}{y}$ depende sólo de y , hay un factor integrante que depende sólo de y . Se tiene que $\ln \mu(y) = \ln y^{-4} \rightarrow \mu(y) = y^{-4}$.

8. Dada la ecuación diferencial $2xy' + y = 0$, obtenga su solución hallando necesariamente un factor integrante.

Solución.-

Escribimos la ecuación en la forma $ydx + 2xdy = 0$. Como $\frac{1}{P} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \frac{1}{y}$ depende sólo de y , hay un factor integrante que depende sólo de y . Se tiene $\mu(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} = y$. Luego la ecuación $y^2 dx + 2xydy = 0$ es diferencial exacta. Se tendrá que $f(x, y) = \int y^2 dx = y^2 x + C(y) \rightarrow \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2xy + C'(y) = 2xy \rightarrow C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = -C$. Así pues la solución general de la ecuación es $y^2 x = C$

9. Sea x el número de unidades fabricadas e y el coste de producción de un bien determinado. Sabiendo que la tasa a la que cambia el coste respecto al número de unidades producidas viene dado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - x + \frac{9}{x},$$

se pide calcular el coste en función de las unidades producidas, siendo el coste unitario de producción de 4€/Ud. cuando el número de unidades fabricadas es 3.

Solución.-

Escribamos la ecuación en la forma $(y - x^2 + 9)dx - xdy = 0$. Puesto que $\frac{1}{Q} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{1}{-x} (1+1) = \frac{-2}{x}$, existe un factor integrante μ que depende sólo de x , tal que $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{-2}{x}$ de donde $\ln \mu = \ln x^{-2} \rightarrow \mu = x^{-2}$. Así pues, la ecuación $\frac{y - x^2 + 9}{x^2} dx - \frac{x}{x^2} dy = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{y}{x^2} - 1 + \frac{9}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0$ es diferencial exacta. Se tendrá que $\int \left(\frac{y}{x^2} - 1 + \frac{9}{x^2} \right) dx = -\frac{y}{x} - x - \frac{9}{x} + C(y)$, luego, derivando respecto de y deberá ser $-\frac{1}{x} + C'(y) = -\frac{1}{x}$ de donde

$C'(y) = 0 \rightarrow C(y) = -k$. Luego la solución de la ecuación diferencial es $\frac{y}{x} + x + \frac{9}{x} = k$. El valor de $k = 4 + 3 + \frac{9}{3} = 10$. Así pues $\frac{y}{x} + x + \frac{9}{x} = 10 \leftrightarrow y = -x^2 + 10x - 9$.

10. Obtener la solución general de la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{3xy^2}.$$

Solución.-

Se trata de una ecuación homogénea. Haciendo $y = ux \rightarrow y' = u'x + u$. Sustituyendo:

$$u'x + u = \frac{1+u^3}{3u^2} \leftrightarrow \frac{3u^2}{1-2u^3} du = \frac{1}{x} dx$$

Integrando:

$$-\frac{1}{2} \ln|1-2u^3| = \ln|K_1 x| \leftrightarrow \ln \frac{1}{\sqrt{1-2u^3}} = \ln|K_1 x| \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-2u^3}} = |K_1 x| \leftrightarrow 1-2u^3 = \frac{K_2}{x^2} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow u^3 = \frac{1}{2} + \frac{K}{x^2} \leftrightarrow u = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{K}{x^2}}. \text{ Así pues:}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{x^3}{2} + Kx}$$

11. Resolver la ecuación diferencial:

$$y' - \frac{y}{2x} = 5x^2 y^5.$$

Solución.-

Se trata de una ecuación de Bernoulli. Dividimos por $y^5 \rightarrow y'y^{-5} - \frac{1}{2x}y^{-4} = 5x^2$

Hacemos el cambio $z = y^{-4} \rightarrow z' = -4y^{-5}y' \rightarrow y^{-5}y' = -\frac{1}{4}z'$. Sustituyendo en la

ecuación queda $-\frac{1}{4}z' - \frac{1}{2x}z = 5x^2$ que ya es una ecuación lineal. Ponemos $z = u \cdot v \rightarrow$

$$z' = u'v + uv'. \text{ Sustituyendo de nuevo: } -\frac{1}{4}u'v - \frac{1}{4}uv' - \frac{1}{2x}uv = 5x^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow v\left(-\frac{1}{4}u' - \frac{1}{2x}u\right) - \frac{1}{4}uv' = 5x^2. \text{ Hacemos } -\frac{1}{4}u' - \frac{1}{2x}u = 0 \leftrightarrow \frac{u'}{u} = \frac{-2}{x} \rightarrow \log u = \log x^{-2} \rightarrow$$

$$\rightarrow u = x^{-2}. \text{ Luego la ecuación queda: } -\frac{1}{4}x^{-2}v' = 5x^2 \leftrightarrow v' = -20x^4 \leftrightarrow v = -4x^5 + C.$$

$$\text{Así pues } z = -4x^3 + Cx^{-2}, \text{ de donde } y = \frac{1}{\sqrt[4]{-4x^3 + Cx^{-2}}}$$

12. Resolver la ecuación diferencial: $y' - y = xy^2$ **Solución.-**

Se trata de una ecuación de Bernoulli. Dividimos por $y^2 \rightarrow y'y^{-2} - y^{-1} = x$

Hacemos el cambio $z = y^{-1} \rightarrow z' = -y^{-2}y'$. Sustituyendo en la ecuación queda $-z' - z = x$ que ya es una ecuación lineal. Ponemos $z = u \cdot v \rightarrow z' = u'v + uv'$. Sustituyendo de nuevo: $-u'v - uv' - uv = x \leftrightarrow v(-u' - u) - uv' = x$. Hacemos $u' = -u \leftrightarrow u = e^{-x}$. Luego la ecuación queda: $-e^{-x}v' = x \leftrightarrow v' = -xe^x$ que integrando por partes proporciona $v = -xe^x + e^x + C$.

Así pues $z = -x + 1 + Ce^{-x}$, de donde $y = \frac{1}{-x + 1 + Ce^{-x}}$