6.- SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Estudiaremos exclusivamente los sistemas de ecuaciones lineales de primer orden con coeficientes constantes que, en su forma normal, expresaremos como:

$$\left.\begin{array}{l} y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1(x) \\ y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n(x) \end{array}\right\}$$

O matricialmente:

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \\ b_n(x) \end{pmatrix} \leftrightarrow Y'(x) = AY(x) + b(x)$$

Si $b_i(x) = 0$, $\forall i$, diremos que el sistema es homogéneo.

<u>Vectores y valores propios</u>.-

Dada una matriz real $A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$, se dice que $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$ es un <u>vector propio</u> de A si existe un número real o complejo λ, al que llamaremos valor propio, tal que $Au = \lambda u$ $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ $(A-\lambda I)\ u = 0$. Para que se verifique esto último, al ser $u \neq 0$, es necesario que el determinante $|A-\lambda I| = 0$, condición esta que nos permitirá hallar los valores propios asociados a la matriz A.

Por ejemplo, para la matriz $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}$ se tendría: $\begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 15 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$, que tiene las soluciones $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Un vector propio $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ para $\lambda_1 = 2$ ha de cumplir que $\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 15 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow 6x_1 - 2x_2 = 0 \leftrightarrow x_2 = 3x_1$. Una solución sería el vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Comprobamos que $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 15 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>Resolución del sistema lineal homogéneo</u>.-

Una solución del sistema homogéneo $\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$ es un conjunto de n funciones $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$ que verifican la igualdad anterior. Puede demostrarse fácilmente que el conjunto de las soluciones es un espacio vectorial de dimensión n. Además, si λ es un valor propio con vector propio asociado $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$, entonces $e^{\lambda x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ es una solución del sistema. En efecto

$$e^{\lambda x}\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ldots.a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ldots.a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ldots.a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\, e^{\lambda x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix} \text{ que es la derivada de } e^{\lambda x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Luego si $\left\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\ldots,\overrightarrow{u_n}\right\}$ es un conjunto de vectores propios linealmente independientes con valores propios asociados λ_1, $\lambda_2,\ldots,\lambda_n$, tendremos que la solución general del sistema será $C_1e^{\lambda_1 x}\overrightarrow{u_1}+C_2e^{\lambda_2 x}\overrightarrow{u_2}+\ldots+C_ne^{\lambda_n x}\overrightarrow{u_n}$, donde los C_i son constantes arbitrarias.

Veremos solamente el caso en que haya una base de vectores propios.

<u>Caso de valores propios complejos</u>.-

Si $\alpha \pm i\beta$ son dos valores propios conjugados y $a+ib$ es un vector propio asociado a $\alpha + i\beta$, entonces $a-ib$ es un vector propio asociado a $\alpha - i\beta$.

En efecto, $A(a+ib)=(\alpha+i\beta)(a+ib)$. Teniendo en cuenta que A es real:

$$A(a-ib)=A\overline{(a+ib)}=\overline{A(a+ib)}=\overline{(\alpha+i\beta)(a+ib)}=(\alpha-i\beta)(a-ib)$$

Se puede demostrar entonces que dos soluciones linealmente independientes son:

$$e^{\alpha x}\left[\cos\beta x a-\operatorname{sen}\beta x b\right] \text{ y } e^{\alpha x}\left[\operatorname{sen}\beta x a+\cos\beta x b\right]$$

<u>Resolución del sistema lineal no homogéneo</u>.-

Puede demostrarse que la solución general de un sistema no homogéneo es la suma de la solución general del sistema homogéneo más una solución particular del sistema no homogéneo.

Para buscar la solución particular, nos ceñiremos al caso en que los componentes de la matriz $\begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \\ b_n(x) \end{pmatrix}$ de términos independientes son **constantes, polinomios, funciones exponenciales, senos y cosenos o sumas y productos finitos de estas funciones**. Cada componente y_{pi} de la solución particular $\begin{pmatrix} y_{p1} \\ y_{p2} \\ \\ y_{pn} \end{pmatrix}$ será una combinación, con coeficientes indeterminados, de todos los tipos de funciones que aparecen en la matriz de términos independientes, multiplicados por x^s si ya aparecen con grado de multiplicidad s en la solución del sistema homogéneo. Puede servir de guía la tabla de la solución particular de las ecuaciones lineales de orden n:

Forma de b(x)	Raíces del polinomio característico	Forma solución particular donde $k = \max\{m,n\}$
$P_n(x)$	0 No es raíz	$P_n^*(x)$
	0 Si es raíz con multiplicidad s	$x^s P_n^*(x)$
$P_n(x)e^{ax}$	a No es raíz	$e^{ax}P_n^*(x)$
	a Si es raíz con multiplicidad s	$x^s e^{ax} P_n^*(x)$
$P_n(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_m(x)\cos\beta x$	$\pm i\beta$ No son raíces	$P_k^*(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_k^*(x)\cos\beta x$
	$\pm i\beta$ Si son raíces con multiplicidad s	$x^s(P_k^*(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_k^*(x)\cos\beta x)$
$e^{ax}(P_n(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_m(x)\cos\beta x)$	$a \pm i\beta$ No son raíces	$e^{ax}(P_k^*(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_k^*(x)\cos\beta x)$
	$a \pm i\beta$ Si son raíces con multiplicidad s	$x^s e^{ax}(P_k^*(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_k^*(x)\cos\beta x)$

EJERCICIOS

1.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (los autovalores de la matriz son: 1 y 3):

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} Y(t), \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución.-

Calculamos los autovectores asociados a los autovalores:

Para el 1: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Para el 3: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$

Luego la solución general: $Y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{3t} \\ C_3e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1e^t + C_2e^{3t} \\ C_3e^{3t} \\ C_1e^t + C_2e^{3t} \end{pmatrix}.$

Para t = 0 $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1 + C_2 \\ C_3 \\ C_1 + C_2 \end{pmatrix}$, de donde $C_1 = 0$; $C_2 = C_3 = 1$, luego la solución particular pedida es $Y(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

2.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} Y(t).$$

Solución.-

El polinomio característico: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 7\lambda + 4$, que admite las raíces 4 y –1 (doble).

Vector propio asociado al valor propio 4: $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resolviendo el sistema se obtiene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vectores propios asociados al valor propio –1: $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resolviendo el sistema se obtiene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Luego la solución del sistema es:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{4x} \\ C_2e^{-x} \\ C_3e^{-x} \end{pmatrix}$$

3.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales (uno de los autovalores de la matriz es igual a 1):

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} Y(t), \quad Y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución.-

El polinomio característico es $t^3 - 4t^2 - t + 4$ cuyas raíces son 1, –1 y 4. Los respectivos vectores propios asociados son:

Para el 1→ $\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ de donde se obtiene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Análogamente, para el –1 se obtiene $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y para el 4 se obtiene $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general del sistema es $Y(t) = C_1e^t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{-t}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3e^{4t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^t \\ C_2e^{-t} \\ C_3e^{4t} \end{pmatrix}$.Para la condición dada se obtiene que $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$ y resolviendo el sistema queda $C_1 = 0$, $C_2 = 0$ y $C_3 = 2$, es decir, la solución particular pedida es

$Y(t) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{4t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix}$

4.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales uno de los autovalores de la matriz es igual a 5):

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} Y(t).$$

Solución.-

El polinomio característico: $\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-3 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)^3 - 3(\lambda-3) - 2$, que admite las raíces 5 y 2 (doble).

Vector propio asociado al valor propio 5: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resolviendo el sistema se obtiene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Vectores propios asociados al valor propio 2: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resolviendo el sistema se obtiene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

Luego la solución del sistema es: $Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{5x} \\ C_2e^{2x} \\ C_3e^{2x} \end{pmatrix}$

5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$Y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} Y(t).$$

Solución.-

El polinomio característico: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5$, que admite las raíces 5 y –1 (doble).

Vector propio asociado al valor propio 5: $\begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Resolviendo el sistema se obtiene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vectores propios asociados al valor propio –1: $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Resolviendo el sistema se obtiene: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Luego la solución del sistema es:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1e^{5x} \\ C_2e^{-x} \\ C_3e^{-x} \end{pmatrix}$$

6.- Resolver el sistema: $Y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Solución.-

Los valores propios asociados a la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ resultan ser $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$ y los correspondientes vectores propios $\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} i$ respectivamente.

Luego la solución general de la ecuación homogénea es

$$Y_x = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos\frac{x}{2} + \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} \operatorname{sen}\frac{x}{2} \right) + C_2\left(\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix} \cos\frac{x}{2} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \operatorname{sen}\frac{x}{2} \right) \right)$$

Una solución particular de la ecuación completa es de la forma $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -46 \\ 18 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general de la ecuación es:

$$Y_x = e^{\frac{x}{2}}\left(C_1\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos\frac{x}{2} + \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) + C_2\left(\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}\cos\frac{x}{2} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\right) + \begin{pmatrix} -46 \\ 18 \end{pmatrix}$$

7.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$y_1' = 2y_1 + 2$$

$$y_2' = y_1 + 3y_2 + e^x$$

Solución.-

Escrito en forma matricial: $Y'(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x$

Los valores propios asociados a la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ resultan ser 2 y 3 y los correspondientes vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Luego la solución general de la ecuación homogénea es $Y_x = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una solución particular de la ecuación completa es de la forma $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} e^x$.

Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Luego la solución general de la ecuación es:

$$Y_x = C_1 e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} e^x \text{ o bien:}$$

$y_1 = C_1e^{2x} - 1$

$y_2 = -C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^x$.

8.- Resolver el sistema: $Y'(x) = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} 31 \\ 4 \end{pmatrix}$

Solución.-

Los valores propios asociados a la matriz $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ resultan ser 5 y –3 y los correspondientes vectores propios $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$respectivamente.

Luego la solución general de la ecuación homogénea es $Y_x = C_1 e^{5x}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Una solución particular de la ecuación completa es de la forma $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general de la ecuación es:

$$Y_x = C_1 e^{5x}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

9.- Resolver el sistema: $Y'(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} Y(x) + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$

Solución.-

Los valores propios asociados a la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ resultan ser i y –i y los correspondientes vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a + bi$ y su conjugado $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = a - bi$, respectivamente.

Luego la solución general de la ecuación homogénea es
$$Y_x = C_1\left(\cos x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{sen} x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + C_2\left(\cos x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Una solución particular de la ecuación completa es de la forma $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general de la ecuación es:

$$Y_x = C_1\left(\cos x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{sen} x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) + C_2\left(\cos x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} x\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$