7.- ECUACIONES EN DIFERENCIAS

En general podemos expresar una ecuación en diferencias de orden n, de la forma

$$F(f(x), f(x+1), f(x+2), ..., f(x+n)) = 0$$

donde la incógnita f es una función del conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ en el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ (se trata por tanto de una sucesión). A veces f(x) se escribe y_x.

Ecuación en diferencias lineal de primer orden autónoma.-

$$\boxed{y_{x+1} = ay_x + b}$$

Resolución:

Para x = 0: $y_1 = ay_0 + b$
Para x = 1: $y_2 = ay_1 + b = a(ay_0 + b) + b = a^2y_0+b(a + 1)$
Para x = 2: $y_3 = ay_2 + b = a[a^2y_0+b(a + 1)] + b = a^3y_0+b(a^2 + a + 1)$
Para x = 3: $y_4 = ay_3 + b = a[a^3y_0+b(a^2 + a + 1)] + b = a^4y_0+b(a^3 + a^2 + a + 1)$

....

Así sucesivamente, para un valor cualquiera x–1:

$$y_x = a^xy_0+b(a^{x-1} + a^{x-2} +...+ a^2 + a + 1)$$

- Si $a \neq 1$ tendríamos que $\mathbf{y_x} = a^xy_0 + b\dfrac{1-a^{x-1}\cdot a}{1-a} = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{1-a}} + \left(\mathbf{y_0} - \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{1-a}}\right)\mathbf{a^x}$.

Si fuese $y_0 = \dfrac{b}{1-a}$, entonces $y_x = \dfrac{b}{1-a}$, es decir $y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = ... \dfrac{b}{1-a}$. El valor $\dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{1-a}}$ recibe el nombre de solución **estacionaria o de equilibrio**

- Si a = 1: $\mathbf{y_x} = y_0+b(1 + 1 +...+ 1 + 1 + 1) = \mathbf{y_0 + bx}$

Ejemplos: La solución general de la ecuación $y_{x+1} = \dfrac{1}{2}y_x + 3$ es $y_x = 6 + (y_0 - 6)\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$.

La solución general de $y_{x+1} = y_x - 5$ es $y_x = y_0 - 5x$.

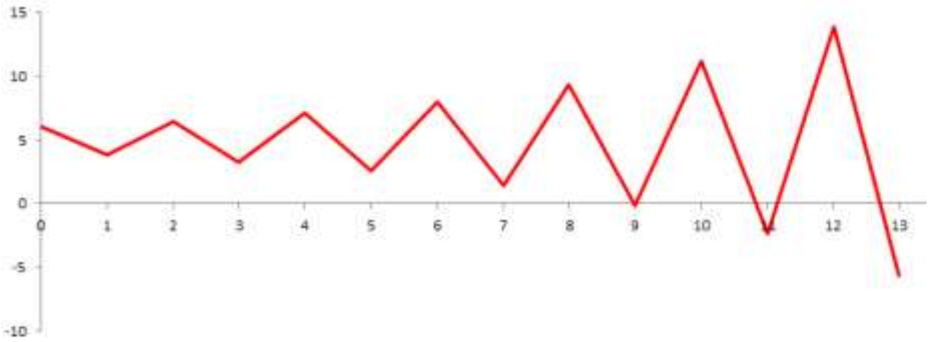
Trayectoria temporal de la solución.-

Es la poligonal que obtenemos al unir los puntos de coordenadas (x, y_x).

Caso de $a < -1$:

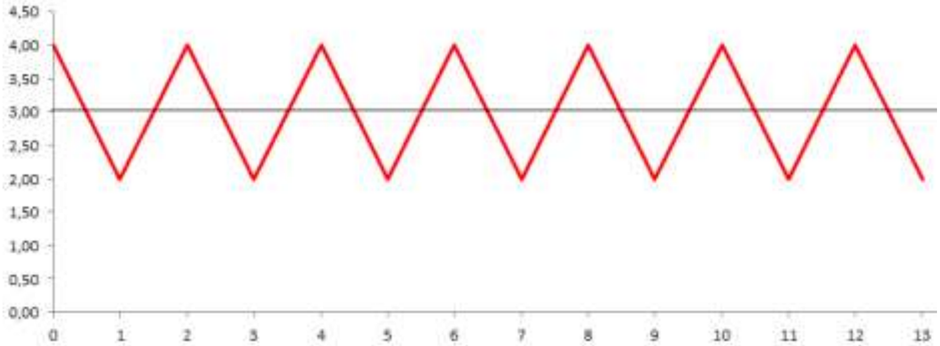
Las trayectorias temporales divergen de la posición de equilibrio de forma oscilante. Por ejemplo las trayectorias temporales de la solución de $y_{x+1} = -\dfrac{6}{5}y_x + 11$, siendo $y_0 = 6$. Resolviéndola obtenemos que $y_x = 5 + \left(-\dfrac{6}{5}\right)^x$.

x	y_x
0	6,00
1	3,80
2	6,44
3	3,27
4	7,07
5	2,51
6	7,99
7	1,42
8	9,30
9	-0,16
10	11,19
11	-2,43
12	13,92
13	-5,70



<u>Caso de a = –1</u>:

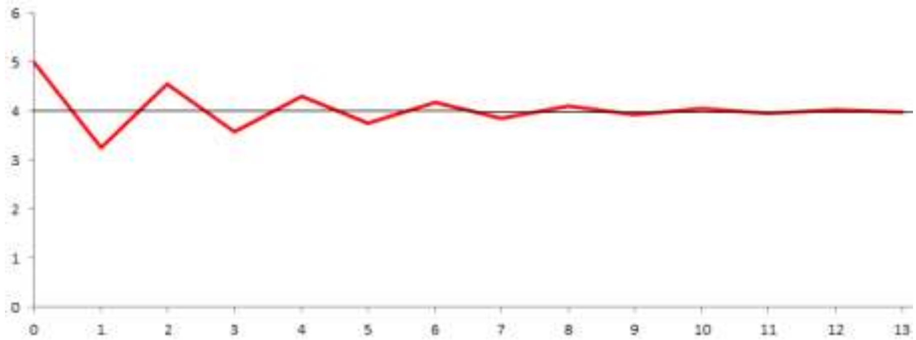
Las trayectorias temporales oscilan en torno a la posición de equilibrio. Por ejemplo las trayectorias temporales de la solución de $y_{x+1} = -y_x + 6$, siendo $y_0 = 4$. Resolviéndola obtenemos que $y_x = 3 + (-1)^x$.



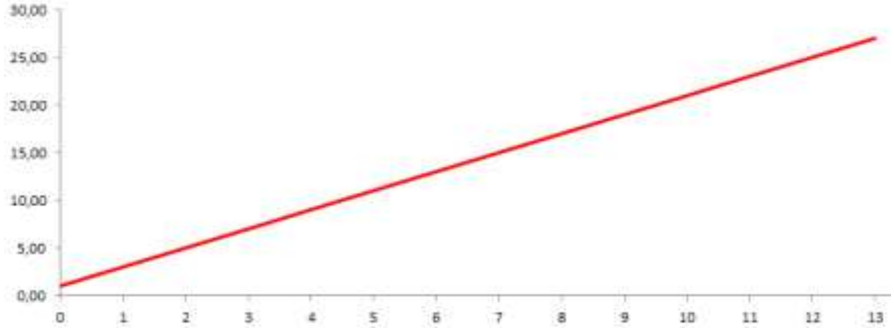
<u>Caso de –1 < a < +1</u>: entonces $\lim\limits_{x\to\infty} y_x = \dfrac{b}{1-a}$, es decir tiende a la solución de equilibrio.

Por ejemplo veamos las trayectorias temporales de la solución de $y_{x+1} = -\dfrac{3}{4} y_x + 7$, siendo $y_0 = 5$. Resolviéndola obtenemos que $y_x = 4 + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^x$. Las trayectorias temporales convergen a 4 que es la solución de equilibrio.

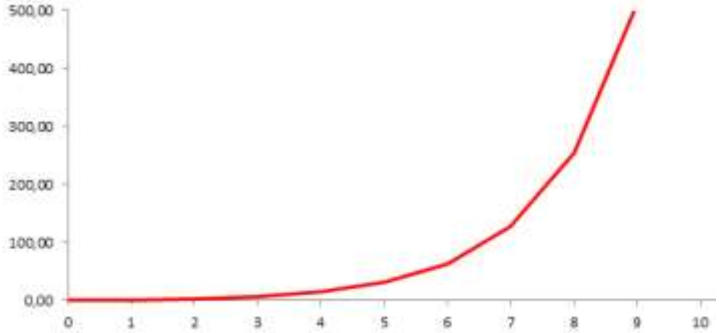
x	y_x
0	5,00
1	3,25
2	4,56
3	3,58
4	4,32
5	3,76
6	4,18
7	3,87
8	4,10
9	3,92
10	4,06
11	3,96
12	4,03
13	3,98



Caso de $a = 1$: puesto que la solución es $y_x = y_0 + bx$, la trayectoria es una recta de pendiente b. Por ejemplo, si la ecuación es $y_{x+1} = y_x + 2$, con $y_0 = 1$, la solución es $y_x = 1 + 2x$, y la trayectoria temporal:



Caso de $a > 1$: se obtiene una trayectoria divergente de tipo exponencial. Por ejemplo, si $y_{x+1} = 2y_x + 1$, siendo $y_0 = 0$, se tiene la solución $y_x = -1 + 2^x$:



Modelo de la telaraña.-

P_t y P_{t-1} son los precios de un producto en el periodo t y en el periodo anterior, respectivamente. Entonces podemos escribir las funciones de la demanda y la oferta, respectivamente:

$$D_t = a - bP_t$$
$$O_t = -c + dP_{t-1}$$

donde a, b, c y d son constantes positivas.

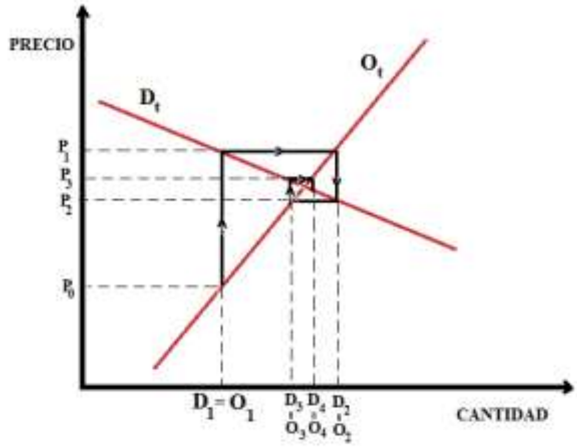
La condición de equilibrio es que en cada periodo t se cumpla que $D_t = O_t$. Vamos a averiguar cuál será la evolución del precio para que el sistema se encuentre en equilibrio en cada periodo. Se tendrá que:

$$a - bP_t = -c + dP_{t-1} \leftrightarrow P_t = -\frac{d}{b}P_{t-1} + \frac{a+c}{b} \leftrightarrow P_{t+1} = -\frac{d}{b}P_t + \frac{a+c}{b}$$

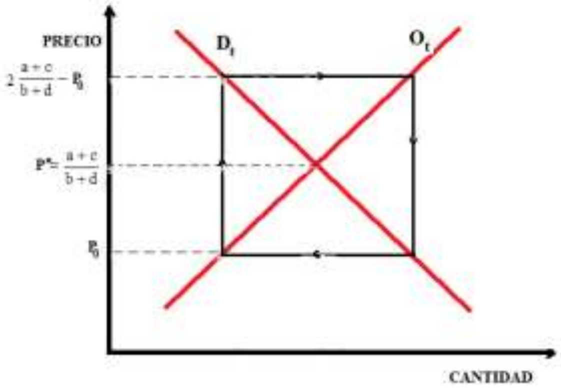
Tenemos pues una ecuación en diferencias cuya solución será:

$$P_t = \frac{a+c}{b+d} + \left(P_0 - \frac{a+c}{b+d}\right)\left(-\frac{d}{b}\right)^x$$

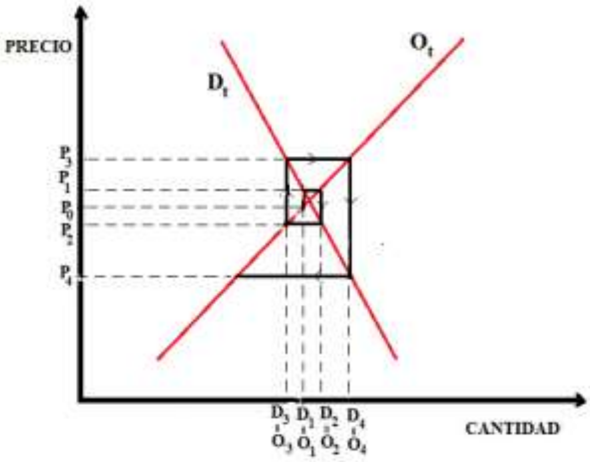
Si $-1 < -\frac{d}{b}$, el precio tiende a estabilizarse con el tiempo hacia el precio de equilibrio $P^* = \frac{a+c}{b+d}$. Representamos la oferta y la demanda con los precios de equilibrio en cada periodo:



Si $-1 = -\dfrac{d}{b}$, entonces P_t oscila entre P_0, cuando t es par y $2P^* - P_0$ cuando t es impar.



Si $-\dfrac{d}{b} < -1$, entonces $P_t \to \pm\infty$, lo que provoca inestabilidad en el mercado a largo plazo.



e-mail: **imozas@elx.uned.es**
https://www.innova.uned.es/webpages/Ilde/Web/index.htm

EJERCICIOS DE EXÁMENES

1. Con los datos que se indican para el modelo de la telaraña, obténgase la trayectoria temporal del precio:

$$D_x = 4 - 2P_x, \quad S_x = -5 + 3P_{x-1}, \quad P_0 = 3.$$

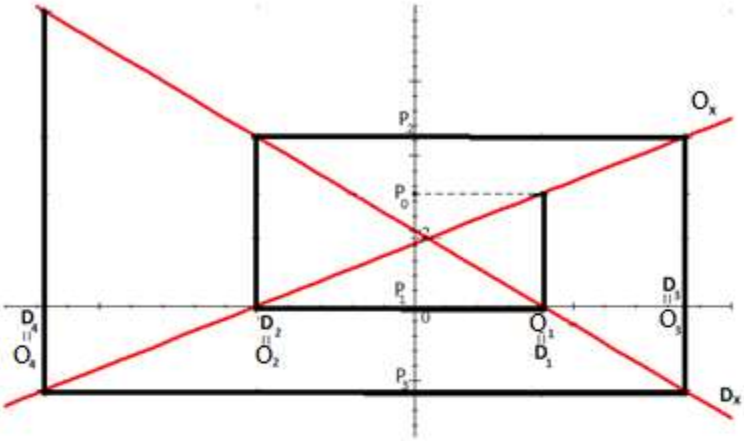
Solución.-

Igualamos la oferta a la demanda: $4 - 2P_x = -5 + 3P_{x-1} \leftrightarrow P_x = -\frac{3}{2}P_{x-1} + \frac{9}{2}$, que podemos escribir $P_{x+1} = -\frac{3}{2}P_x + \frac{9}{2}$.

La solución es $P_x = \frac{9}{5} + \left(3 - \frac{9}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{5} + \frac{6}{5}\left(-\frac{3}{2}\right)^x$.

Puesto que $-\frac{3}{2} < -1$, la trayectoria de precios es explosiva y provoca inestabilidad a largo plazo.

x	P_x	$D_x = O_x$
0	3	
1	0	4
2	4,5	–5
3	–2,25	8,5
4	7,875	–11,75



2. La función de demanda de un cierto producto agrícola viene dada por la ecuación: $x_t = 500 - 3p_t$, y la de oferta por: $x_t = 200 + 4p_{t-1}$. Se pide:

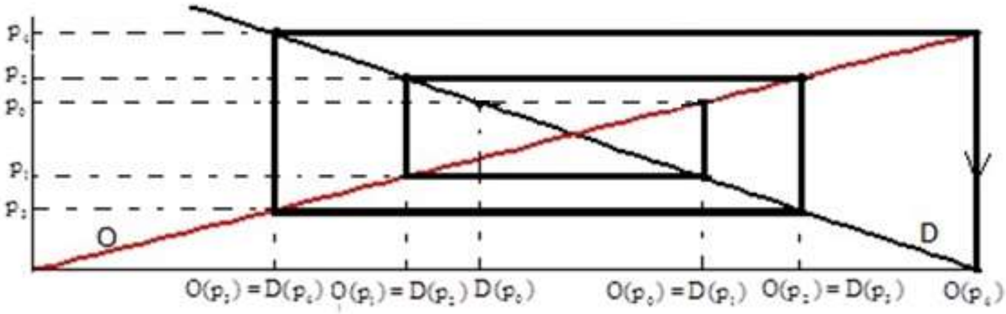
a) La determinación del punto de equilibrio
b) La trayectoria temporal del precio
c) La tendencia del precio a largo plazo

Solución.-

a) La condición de equilibrio: $500 - 3p_t = 200 + 4p_{t-1} \leftrightarrow p_t = -\frac{4}{3}p_{t-1} + 100$, o también $p_{t+1} = -\frac{4}{3}p_t + 100$. La solución de equilibrio $p^* = p_{t+1} = p_t = \frac{300}{7}$

b) La resolución de la ecuación en diferencias anterior proporciona:

$$p_t = \left(p_0 - \frac{300}{7}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)^t + \frac{300}{7}$$



c) Como $-\frac{4}{3} < -1 \Rightarrow$ $p_t \to \pm\infty$ cuando $t \to \infty$, es decir, la trayectoria es explosiva.

3. Determinar la evolución temporal del precio de un bien determinado en un modelo donde la oferta y la demanda, expresadas en millones de unidades, vienen dadas por las siguientes ecuaciones:

$$D_t = 3 - 5P_t$$
$$O_t = -2 + 4P_{t-1}$$

Y el precio de mercado, en cada periodo de tiempo, es el resultado de equilibrar la oferta y la demanda. Considérese $p_0 = 0{,}60€/ud$.

Solución.-

Resolvemos la ecuación en diferencias proporcionada por la condición de equilibrio:

$3 - 5P_t = -2 + 4P_{t-1} \leftrightarrow P_t = -\frac{4}{5}P_{t-1} + 1 \leftrightarrow P_{t+1} = -\frac{4}{5}P_t + 1$ que, teniendo en cuenta el valor de P_0, tiene por solución $P_t = \frac{0{,}4}{9}\left(-\frac{4}{5}\right)^t + \frac{5}{9}$. Puesto que $-1 < -\frac{4}{5} < 0$ se tendrá que, cuando $t \to \infty$, P_t tiende a $\frac{5}{9}$ que es el precio de equilibrio.