8.- ECUACIONES EN DIFERENCIAS DE ORDEN SUPERIOR

Consideraremos solamente ecuaciones en diferencias finitas lineales de orden n, con coeficientes constantes, que son de la forma:

$$y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + ... + a_{n-1} y_{x+1} + a_n y_x = b(x)$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$.

Resolveremos primeramente la ecuación homogénea:

$$y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + ... + a_{n-1} y_{x+1} + a_n y_x = 0$$

de la que puede demostrarse que su conjunto de soluciones es un espacio vectorial de dimensión n.

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones linealmente independientes, la solución general será de la forma $C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$, siendo C_i contantes indeterminadas.

Puede comprobarse que una función de la forma λ^x es solución si $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-2}\lambda^2 + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$. Así pues, según sean las raíces del <u>polinomio característico</u> $t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_{n-2}t^2 + a_{n-1}t + a_n$, pueden presentarse los siguientes casos:

- λ_1 y λ_2 son dos raíces reales simples y distintas: entonces las funciones λ_1^x y λ_2^x son soluciones linealmente independientes.
- λ es raíz real múltiple de grado r: entonces las r funciones λ^x , $x\lambda^x$, $x^2\lambda^x$,…, $x^{r-1}\lambda^x$ son soluciones linealmente independientes.
- r_θ (en forma polar) es solución compleja simple: entonces $r^x\cos\theta x$ y $r^x\text{sen}\theta x$ son soluciones linealmente independientes.
- r_θ (en forma polar) es solución compleja múltiple de grado s: entonces $r^x\cos\theta x$, $r^x\text{sen}\theta x$, $xr^x\cos\theta x$, $xr^x\text{sen}\theta x$, …, $x^{s-1}r^x\cos\theta x$, $x^{s-1}r^x\text{sen}\theta x$ son soluciones linealmente independientes.

Si $\mathbf{y_x^h}$ es la solución general de la ecuación homogénea e $\mathbf{y_x^c}$ es una solución particular de la ecuación completa, entonces $\mathbf{y_x^h + y_x^c}$ es la solución general de la ecuación completa.

<u>Obtención de una solución particular de la ecuación completa</u>.-

Forma de b(x)	Raíces del polinomio característico	Forma solución particular donde $k = \max\{m,n\}$
$P_n(x)$	1 No es raíz	$P_n^*(x)$
	1 Si es raíz con multiplicidad s	$x^s P_n^*(x)$
$a^x P_n(x)$	a No es raíz	$a^x P_n^*(x)$
	a Si es raíz con multiplicidad s	$x^s a^x P_n^*(x)$
$a^x(P_n(x)\text{sen}\beta x + Q_m(x)\cos\beta x)$	Si el número complejo en forma polar a_β no es raíz	$a^x(P_k^*(x)\text{sen}\beta x + Q_k^*(x)\cos\beta x)$
	Si el número complejo en forma polar a_β es raíz con multiplicidad s	$x^s a^x(P_k^*(x)\text{sen}\beta x + Q_k^*(x)\cos\beta x)$

($P_k^*(x)$ y $Q_k^*(x)$ son polinomios a coeficientes indeterminados, de grado k)

Si b(x) es combinación lineal de algunos de los tipos anteriores, la solución particular a ensayar será una combinación lineal de los tipos de solución particular que les corresponda.

EJERCICIOS PROPUESTOS EN EXÁMENES

1.- La demanda en el mercado de un bien sigue una relación de la forma:

$$D_{t+2} = \frac{3}{2}D_{t+1} - \frac{1}{2}D_t$$

Estudiar bajo qué condiciones iniciales la demanda: D_t se estabiliza a largo plazo.

Solución.-

El polinomio característico $t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$, tiene las raíces 1 y $\frac{1}{2}$, luego $D_t = C_1 + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^t$. Si $t \to \infty$ entonces $D_t \to C_1$, es decir, la demanda se estabiliza a largo plazo, sean cuales sean las condiciones iniciales.

2.- Resolver la ecuación en diferencias: $y_{x+2} - 2y_x = x^3 + x^2 - 3$

Solución.-

El polinomio característico de la ecuación homogénea $t^2 - 2$, tiene las raíces $\pm\sqrt{2}$, luego la solución general de la ecuación homogénea es $y_x = C_1\sqrt{2}^x + C_2\left(-\sqrt{2}\right)^x$.

Como solución particular de la ecuación completa ensayamos $y_x = Ax^3+Bx^2+Cx+D$. Deberá ser $A(x+2)^3 + B(x+2)^2 + C(x+2) + D - 2Ax^3 - 2Bx^2 - 2Cx - 2D = x^3 + x^2 - 3$.

Desarrollando e identificando coeficientes se obtiene el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} -A = 1 \\ 6A - B = 1 \\ 12A + 4B - C = 0 \\ 8A + 4B + 2C - D = -3 \end{array}\right\}$$

cuya solución es: A = –1, B = –7, C = –40 y D = –113.

Luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$y_x = C_1\sqrt{2}^x + C_2\left(-\sqrt{2}\right)^x - x^3 - 7x^2 - 40x - 113$

3.- Obtener la solución general de la ecuación en diferencias:

$$y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 4^x$$

Solución.-

El polinomio característico de la ecuación homogénea $t^2 - 3t + 2$, tiene las raíces 1 y 2, luego la solución general de la ecuación homogénea es $y_x = C_1 + C_2 \cdot 2^x$.

Como solución particular de la ecuación completa ensayamos $y_x = A4^x$. Deberá ser $A \cdot 4^{x+2} - 3A4^{x+1} + 2A4^x = 4^x$ de donde se obtiene que $A = \frac{1}{6}$. Luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$$y_x = C_1 + C_2 2^x + \frac{1}{6}4^x$$

4. Obtener la solución general de la ecuación en diferencias:

$$y_{x+3}+5y_{x+2}+8y_{x+1}+4y_x=1+(-2)^x$$

Solución.-

El polinomio característico de la ecuación homogénea $t^3 + 5t^2 + 8t + 4$, tiene las raíces -1 y -2 (doble), luego la solución general de la ecuación homogénea es $y_x = C_1(-1)^x + C_2(-2)^x + C_3x(-2)^x$.

Como solución particular de la ecuación completa ensayamos $y_x = Ax^2(-2)^x + B$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que debe ser $A = -\frac{1}{8}$ y $B = \frac{1}{18}$. Luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$$y_x = C_1(-1)^x + C_2(-2)^x + C_3x(-2)^x - \frac{1}{8}x^2(-2)^x + \frac{1}{18}$$

5.- Obtener la solución general de la ecuación en diferencias:

$$y_{x+3}-4y_{x+2}+y_{x+1}+6y_x=5.5^x$$

Solución.-

El polinomio característico de la ecuación homogénea $t^3 - 4t^2 + t + 6$, tiene las raíces -1, 2 y 3, luego la solución general de la ecuación homogénea es $y_x = C_1(-1)^x + C_22^x + C_33^x$.

Como solución particular de la ecuación completa ensayamos $y_x = A5^x$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que debe ser $A = \frac{5}{36}$. Luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$y_x = C_1(-1)^x + C_22^x + C_33^x + \frac{5}{36}5^x$

6.- Resolver la siguiente ecuación: $y_{x+2}-3y_{x+1}+2y_x=1+x$

Solución.-

El polinomio característico de la ecuación homogénea $t^2 – 3t + 2$, tiene las raíces 1 y 2, luego la solución general de la ecuación homogénea es $y_x = C_1+C_2\cdot 2^x$.

Como solución particular de la ecuación completa ensayamos $y_x = Ax+Bx^2$ de donde obtenemos que $A = -\frac{3}{2}$ y $B = -\frac{1}{2}$. Luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$y_x = C_1+C_22^x + -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2$

7.- Resolver la siguiente ecuación: $y_{x+2}-3y_{x+1}+2y_x=10$

Solución.-

El polinomio característico de la ecuación homogénea $t^2 – 3t + 2$, tiene las raíces 1 y 2, luego la solución general de la ecuación homogénea es $y_x = C_1+C_2\cdot 2^x$.

Como solución particular de la ecuación completa ensayamos $y_x = Ax$ de donde obtenemos que $A = –10$. Luego la solución general de la ecuación propuesta es:

$$y_x = C_1+C_22^x – 10x$$

8.- Obtener la solución general de la ecuación en diferencias:

$$y_{x+2}+y_{x+1}-2y_x=2\cdot 3^x(x+1)$$

Solución.-

El polinomio característico $t^2 + t - 2$ tiene las raíces 1 y −2. Luego la solución general de la ecuación incompleta es $y_x = C_1 + C_2(-2)^x$.

Como solución particular de la ecuación completa ensayaremos $3^x(ax + b)$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $a = \frac{1}{5}$ y $b = -\frac{11}{50}$. Luego la solución general de la ecuación es $y_x = C_1 + C_2(-2)^x + 3^x\left(\frac{1}{5}x - \frac{11}{50}\right)$

9.- Resolver la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$y_{x+2} - 4y_{x+1} + 4y_x = 3\cdot 5^x$$

Solución.-

La ecuación característica $t^2 - 4t + 4 = 0$ posee la solución $t = 2$, doble, luego la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1 2^x + C_2 x 2^x$. Una solución particular de la ecuación completa es de la forma $A5^x$. Sustituyendo en la ecuación y despejando A queda que $A = \frac{1}{3}$. Luego la solución general de la ecuación propuesta es $y = C_1 2^x + C_2 x 2^x + \frac{1}{3}5^x$.

10 .- Resolver la ecuación en diferencias:

$$y_{x+3} + 3y_{x+2} + 3y_{x+1} + y_x = 6^x.$$

Solución.-

La ecuación característica: $t^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0 \leftrightarrow (t+1)^3 = 0 \leftrightarrow t = -1$ (triple), luego la solución general de la ecuación homogénea es:

$$y_x = C_1(-1)^x + C_2 x(-1)^x + C_3 x^2(-1)^x$$

Si una solución particular de la ecuación completa es de la forma $y_x = A6^x$, se tendrá:

$$A6^{x+3} + 3A6^{x+2} + 3A6^{x+1} + A6^x = 6^x \leftrightarrow 343A = 1 \leftrightarrow A = \frac{1}{343}$$

Luego la solución general de la ecuación propuesta:

$$y_x = C_1(-1)^x + C_2 x(-1)^x + C_3 x^2(-1)^x + \frac{1}{343}6^x$$

11.- Resolver la ecuación en diferencias:

$$y_{x+3} + 5y_{x+2} + 8y_{x+1} + 4y_x = (-1)^x$$

Solución.-

El polinomio característico $t^3 + 5t^2 + 8t + 4$, tiene las raíces −1 y −2 (doble), luego la solución general de la ecuación homogénea es $y = C_1(-1)^x + C_2(-2)^x + C_3 x(-2)^x$.

Una solución particular de la ecuación completa será de la forma $y = Ax(-1)^x$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $A = -1$.

Luego la solución general de la ecuación dada es:

$$y = C_1(-1)^x + C_2(-2)^x + C_3 x(-2)^x - x(-1)^x$$