

9. SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS LINEALES DE PRIMER ORDEN.

Podemos escribirlo matricialmente de la forma: $Y_{x+1} = AY_x + G_x$, donde

$Y_x = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ está formada por las n funciones incógnitas, A es la matriz cuadrada real de los

coeficientes y $G_x = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$ es la matriz de los términos independientes. Si $G_x = \mathbf{0}$, el sistema

se llama homogéneo.

Resolución del sistema homogéneo $Y_{x+1} = AY_x$.

- Observemos que $Y_x = AY_{x-1} = A^2Y_{x-2} = \dots = A^xY_0$, luego si podemos obtener A^x , ya tenemos resuelto el sistema.

Ejemplo:

Calcular la solución particular del siguiente problema de valores iniciales:

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y_x \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución.-

La solución es $Y_x = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^x Y_0$. Se cumple que:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^2 &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 4 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2 \cdot 2 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3 &= \begin{pmatrix} 2^2 & 4 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 12 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 3 \cdot 2^2 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^4 &= \begin{pmatrix} 2^3 & 12 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 32 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^4 & 4 \cdot 2^3 \\ 0 & 2^4 \end{pmatrix}, \text{ y así sucesivamente} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^x &= \begin{pmatrix} 2^x & x \cdot 2^{x-1} \\ 0 & 2^x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Luego } Y_x = \begin{pmatrix} 2^x & x \cdot 2^{x-1} \\ 0 & 2^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+1)2^x \\ 2^{x+1} \end{pmatrix}$$

- Pero generalmente no es fácil el cálculo de A^x . Supondremos entonces que A es diagonalizable, es decir, existe una base de vectores propios $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$, con valores propios respectivos $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Se cumple entonces que $A = PJP^{-1}$, donde P es la matriz

formada por los vectores propios y $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ es la matriz diagonal de los valores

propios. Se tiene entonces que $A^x = (PJP^{-1})^x = (PJP^{-1})(PJP^{-1})\dots(PJP^{-1}) = PJ^xP^{-1}$. Luego la solución del sistema será $Y_x = PJ^xP^{-1}Y_0$. Si ponemos $P^{-1}Y_0 = C$, siendo C una matriz de constantes indeterminadas (mientras no se conozca Y_0), la solución será $Y_x = PJ^xC$.

Ejemplo:

Calcular la solución particular del siguiente problema de valores iniciales:

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} Y_x, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Solución.-

Los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ son 2 y 3. Los correspondientes vectores propios asociados son, respectivamente $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Luego la solución general es

$$Y_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}. \text{ Haciendo } x = 0, \text{ tenemos que } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ de donde se}$$

obtiene que $C_1 = -6$ y $C_2 = 2$, con lo que la solución particular es $Y_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \cdot 2^x \\ 2 \cdot 3^x \end{pmatrix}$

- Si la matriz A (que supondremos de orden 2) tiene dos valores propios complejos conjugados $r(\cos\theta \pm i\sin\theta)$ con vectores propios respectivos $\vec{a} \pm \vec{b}i$, se demuestra que la solución general del sistema es $Y_x = r^x \left[(C_1 \cos\theta x + C_2 \sin\theta x) \vec{a} + (C_2 \cos\theta x - C_1 \sin\theta x) \vec{b} \right]$

Ejemplo:

$$\text{Resolver el siguiente sistema: } Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} Y_x$$

Solución.-

Los valores propios de la matriz los obtenemos de la ecuación $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ que proporciona las soluciones $1 \pm i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right)$. El vector propio

asociado a $1 + i$ se obtiene del sistema $\begin{pmatrix} -1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuya solución es $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} i$

Luego los vectores propios son, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} i$ y la solución general:

$$Y_x = \sqrt{2}^x \left[\left(C_1 \cos \frac{\pi x}{4} + C_2 \sin \frac{\pi x}{4} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(C_2 \cos \frac{\pi x}{4} - C_1 \sin \frac{\pi x}{4} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Resolución del sistema no homogéneo $Y_{x+1} = AY_x + G_x$.

Si Y_x^h es la solución general del sistema homogéneo e Y_x^p es una solución particular del sistema completo, cuyos sumandos sean linealmente independientes con Y_x^h , entonces la solución general del sistema completo es $Y_x = Y_x^h + Y_x^p$.

Para buscar la solución particular lo haremos por el método de los coeficientes indeterminados y elegiremos una solución del mismo tipo que G_x , formada por sumandos linealmente independientes con Y_x^h .

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema: $Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Y_x + \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \end{pmatrix}$

Solución.-

Obtenemos los valores propios de $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ que son 4 y -3 y sus vectores propios que resultan ser $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ respectivamente. Una solución particular del sistema tendrá la forma $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Sustituyendo en el sistema se obtiene que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2a + 5b - 12 \\ b = 2a - b - 4 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a + 5b = 12 \\ 2a - 2b = 4 \end{cases}$, de donde $a = \frac{11}{3}$ y $b = \frac{5}{3}$. Luego la solución del sistema es:

$$Y_x = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & (-3)^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} 4^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} (-3)^x + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \end{pmatrix}$$

EJERCICIOS

1.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} Y_x.$$

Solución.-

El polinomio característico $\begin{vmatrix} t+1 & -1 & 0 \\ -1 & t-2 & -1 \\ 0 & -3 & t+1 \end{vmatrix} = t^3 - 7t - 6$ tiene las raíces $t_1 = -1$, $t_2 = -2$

y $t_3 = 3$. Los vectores propios asociados:

Para $t_1 = -1$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se obtiene $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Análogamente, se

obtienen:

Para $t_2 = -2 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y para $t_3 = 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general del sistema de ecuaciones en diferencias es:

$$Y_x = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(-1)^x \\ C_2(-2)^x \\ C_3 3^x \end{pmatrix}$$

2.- Resolver el sistema de ecuaciones en diferencias (los autovalores de la matriz son: 1, -2 y 3):

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} Y_x.$$

Solución.-

Calculamos los autovectores:

-para el autovalor 1: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

-para el autovalor -2: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

-para el autovalor 3: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Luego: } Y_x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2(-2)^x \\ C_3 3^x \end{pmatrix}$$

3.- Calcular la solución particular del siguiente problema de valores iniciales:

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} Y_x, \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Solución.-

Las raíces del polinomio característico $(t-2)(t-3)$, son 2 y 3.

Vector propio asociado al valor propio 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x_1 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vector propio asociado al valor propio 3:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow 5x_1 - x_2 = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solución general: } Y_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 2^x \\ C_2 3^x \end{pmatrix}.$$

Para $x = 0$: $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, de donde se obtiene que $C_1 = -3$ y $C_2 = 1$. Así pues

la solución particular pedida es $Y_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \cdot 2^x \\ 3^x \end{pmatrix}$.

4.- Resolver el siguiente sistema: $Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} Y_x + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Solución.-

Resolveremos primeramente la ecuación homogénea. Hallamos primero los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ obteniéndose 3 y -1. A continuación obtenemos los vectores propios que resultan ser $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ respectivamente. Luego la solución general de la

ecuación homogénea es: $Y_x = C_1 3^x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 (-1)^x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 3^x \\ C_2 (-1)^x \end{pmatrix}$.

Buscamos ahora un vector $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Obtenemos primeramente que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, luego $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general de la ecuación dada es:

$$Y_x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 3^x \\ C_2 (-1)^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -3 \end{pmatrix}$$

5.- La evolución temporal de los resultados contables de dos empresas están relacionados entre sí mediante el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y_x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que los resultados iniciales son nulos, determinar los resultados comparativos de cada una de ellas en los primeros cinco años de su actividad económica (expresados en millones de euros).

Solución.-

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y_0 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} Y_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

luego para x impar $Y_x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y para x par $Y_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Para los 5 primeros años:

	x=1	x=2	x=3	x=4	x=5
$y_1(x)$	1	0	1	0	1
$y_2(x)$	-1	0	-1	0	-1

6.- La evolución temporal de los resultados contables de dos empresas están relacionados entre sí mediante el siguiente sistema de ecuaciones en diferencias:

$$Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y_x + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que los resultados iniciales son nulos, determinar los resultados de cada una de ellas en el cuarto año de su actividad económica (expresados en millones de euros).

Solución.-

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y_0 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y_1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y_2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Y_4 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y_3 + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ Es decir } y_1(4) = 45 \text{ y } y_2(4) = 0.$$

7.- Resolver la el siguiente sistema: $Y_{x+1} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} Y_x + \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$

Solución.-

Los valores propios asociados a la matriz $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ resultan ser -2 y -5 y los correspondientes vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente.

Luego la solución general de la ecuación homogénea es $Y_x = C_1(-2)^x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2(-5)^x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Una solución particular de la completa es de la forma $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Sustituyendo en la ecuación se obtiene que $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general de la ecuación es:

$$Y_x = C_1(-2)^x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2(-5)^x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8.- Resolver la el siguiente sistema: $Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} Y_x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución.-

Los valores propios asociados a la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix}$ son $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ y los correspondientes vectores propios $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} i$, respectivamente. Luego la solución general del sistema homogéneo es

$$Y_x = C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^x \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \cos \frac{\pi x}{4} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \sin \frac{\pi x}{4} \right) + C_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cos \frac{\pi x}{4} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \sin \frac{\pi x}{4} \right)$$

Una solución particular de la ecuación completa es de la forma $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. Sustituyendo en la

ecuación se obtiene que $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Luego la solución general de la ecuación es:

$$Y_x = C_1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^x \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \cos \frac{\pi x}{4} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \sin \frac{\pi x}{4} \right) + C_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix} \cos \frac{\pi x}{4} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{10} \end{pmatrix} \sin \frac{\pi x}{4} \right) + \begin{pmatrix} 18 \\ -4 \end{pmatrix}$$

9.- Resolver el siguiente sistema: $Y_{x+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} Y_x$

Solución.-

Los valores propios de la matriz son $1 \pm i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right)$ y los correspondientes

vectores propios son, respectivamente, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} i$. Luego la solución general es

$$Y_x = C_1 \sqrt{2}^x \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \frac{\pi x}{4} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \frac{\pi x}{4} \right) + C_2 \sqrt{2}^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos \frac{\pi x}{4} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin \frac{\pi x}{4} \right)$$