Tema 6. Contrastes paramétricos (II)

Dr. David Castilla Espino

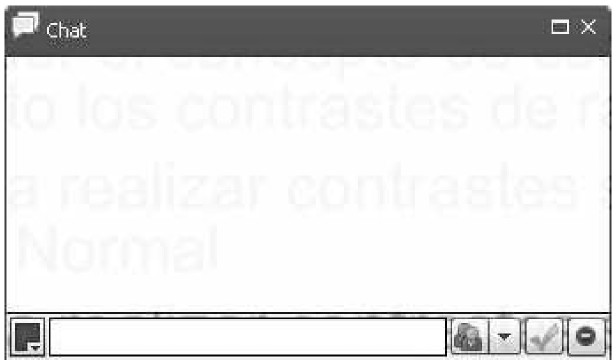
CA UNED de Huelva, "Profesor Dr. José Carlos Vílchez Martín"

Introducción

- Bienvenida
- **Objetivos** pedagógicos:
  - Repasar contrastes
    - sobre la media de una población Normal
    - sobre la varianza de una población Normal
    - sobre la proporción
  - Aprender a realizar contrastes…
    - sobre la diferencia de medias de poblaciones normales
    - sobre la ratio de varianzas de una población Normal
    - sobre la diferencia de proporciones de poblaciones de Bernouilli grandes.

Introducción

- Comunicación:
  - Online: Chat de webconferencia 10/01/2012.



  - Offline: Foro del grupo de tutoría 5.
- Referencias:
  - Casas, J.M. & P. Gutiérrez (2011): Estadística II: Inferencia Estadística. Editorial Universitaria Ramón Areces, Madrid. 231-299.
  - Novales (1997), Ruiz Maya & Martín Pliego (1999),...

Introducción

- En la sesión anterior…
  - se introdujeron los contrastes paramétricos en el marco de la inferencia estadística como procedimiento para corroborar el cumplimiento de hipótesis estadísticas sobre los parámetros de distribuciones conocidas en contraposición con los contrastes no paramétricos.
  - se introdujeron los contrastes de significación como aquellos que se basan a los efectos de aceptar o rechazar la H_0 en la discrepancia entre el valor del parámetro formulado bajo la hipótesis nula y el valor que le correspondería según la información que proporciona la muestra.
  - Se desarrollaron los contrastes de razón de verosimilitud como aquellos contrastes de significación que miden la discrepancia por medio de la comparación de funciones de verosimilitud.
  - Se ejemplificaron algunos problemas de resolución de contrastes de hipótesis paramétricos sobre la media, la varianza y la proporción.

Contrastes sobre la media

Una determinada empresa agrícola, con criterios muy rígidos en cuanto a la productividad y eficacia de sus empleados, contrata un nuevo operario cuya función es la comprobación del peso de las mercancias embaladas. La empresa prepara cajas de 150 grs. y considera que el operario ha superado el período de prueba si el peso medio de un lote de 15 cajas, elegido aleatoriamente, es igual o inferior a los 150 grs. Los datos del lote nos proporciona la siguiente información:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 2268{,}51 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3431322{,}85$$

Con un nivel de significación del 10%, realice un contraste para comprobar si el nuevo empleado superará el período de prueba (ET-II-SR-10-11).

Contrastes sobre la media

SOLUCIÓN:

1- Formulación de hipótesis

H_0: $\mu \leq 150$

H_1: $\mu > 150$

2- Elegir y calcular el estadístico de prueba

$$t_{\exp} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \frac{151{,}234 - 150}{469{,}669/\sqrt{15}} = 0{,}0102$$

3- Determinación de la región crítica

$$P\left(t_{14} > t_{\alpha}\right) = 0{,}1 \Rightarrow t_{0,1} = 1{,}345 \Rightarrow t_{\exp} > 1{,}345.$$

4- Decisión: $t_{exp} < t_{0,1}$ ➔ Acepto la H_0, luego el empleado ha superado el período de prueba.

Contrastes sobre la varianza

En una determinada empresa se está haciendo un análisis de la productividad del Departamento Comercial. Se sabe que las ventas de sus agentes se distribuyen según una Normal de la que se desconoce la media. Tras arduos debates, el Comité de Dirección ha decidido renovar el contrato de trabajo a sus comerciales eventuales únicamente si la varianza de sus ventas es menor que 0,02 unidades monetarias al cuadrado. Se selecciona una muestra de 30 de estos vendedores, resultando que en esta muestra es s^2= 0,03. Contraste la hipótesis de renovación de contrato de un agente con un nivel de significación de 0,05 (ET-II-F1-09-10).

Contrastes sobre la varianza

SOLUCIÓN:

1- Formulación de hipótesis

H_0: $\sigma^2 \geq 0{,}02$

H_1: $\sigma^2 < 0{,}02$

2- Elegir y calcular el estadístico de prueba

$$\chi^2_{\exp} = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0} = \frac{(30-1)0{,}03}{0{,}02} = 43{,}5$$

3- Determinación de la región crítica

$$P\left(\chi^2_{\exp} < \chi^2_{\alpha}\right) = 0{,}05 \Rightarrow \chi^2_{0,05} = 17{,}708 \Rightarrow \chi^2_{\exp} < 17{,}708.$$

4- Decisión: $X^2_{exp} > X^2_{0,05}$ ➔ Acepto la H_0, luego no se renovará a los comerciales eventuales.

Contrastes sobre la proporción

El Director Comercial de una determinada empresa X asegura haber realizado un magnifico trabajo en el lanzamiento del nuevo producto “Neo”, competidor del clásico de otra compañía Y. En una reunión del Comité de Dirección insiste en el éxito de este lanzamiento hasta el extremo de renunciar a su “bonus” anual si no obtiene un 70% del mercado de la empresa Y. Se realiza un muestreo aleatorio simple con 800 compradores y resulta que 496 se manifiestan a favor de “Neo”. Con un nivel de significación del 10% contraste la hipótesis de que el citado Director deba renunciar al “bonus” (ET-II-F2-09-10).

Contrastes sobre la proporción

SOLUCIÓN:

1- Formulación de hipótesis

H_0: $p \geq 0{,}7$

H_1: $p < 0{,}7$

2- Elegir y calcular el estadístico de prueba

$$Z_{\exp} = \frac{p - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0{,}62 - 0{,}7}{\sqrt{\dfrac{0{,}7(1-0{,}7)}{800}}} = -4{,}938$$

3- Determinación de la región crítica

$$P(Z_{\exp} < -Z_{\alpha}) = 0{,}1 \Rightarrow Z_{0,1} = 1{,}285 \Rightarrow RC : Z_{\exp} < -1{,}285.$$

4- Decisión: $Z_{exp} < Z_{0,1}$ ➔ Rechazo la H_0, luego el director debe renunciar al bonus.

Contrastes sobre la diferencia de medias y varianzas

Un grupo de empresas quiere comprobar si aumentaría la productividad mediante un plan de primas. La dirección del grupo decide usar el plan de primas en 16 plantas elegidas al azar y comparar los resultados con las 13 plantas que operan sobre la base del salario normal obteniéndose los siguientes resultados en relación con las unidades producidas:

- Empresas con primas: media = 45 y s = 7.
- Empresas con salario normal: media = 43 y s = 6

Suponiendo que el número de unidades producidas por día sigue una distribución normal contraste si el plan de primas ha incrementado la productividad media en más de 5 unidades con un nivel de significación de 0.1.

Contrastes sobre la diferencia de medias y varianzas

SOLUCIÓN:

Dado que las varianzas son desconocidas será necesario contrastar en un primer lugar si éstas son iguales:

1- Formulación de hipótesis

H_0: $\sigma^2_{primas} = \sigma^2_{normal}$

H_1: $\sigma^2_{primas} \neq \sigma^2_{normal}$

2- Elegir y calcular el estadístico de prueba

$$F_{\exp} = \frac{s^2_{primas}}{s^2_{normal}} = \frac{49}{36} = 1{,}361$$

3- Determinación de la región crítica

$$P\left(F_{15,12} < F_{1-\alpha/2}\right) = 0{,}95 \Rightarrow F_{15,12;0,95} = 2{,}617 \Rightarrow F_{\exp} > 2{,}617.$$

$$P\left(F_{15,12} < F_{\alpha/2}\right) = 0{,}05 \Rightarrow F_{15,12;0,05} = 0{,}000 \Rightarrow F_{\exp} < 0{,}000.$$

Contrastes sobre la diferencia de medias y varianzas

4- Decisión: F_{exp} no está en la RC ➔ Acepto la H_0, luego las varianzas son iguales.

A continuación habrá que contrastar la diferencia de medias para comprobar si se ha incrementado la productividad:

1- Formulación de hipótesis

H_0: $\mu_{primas} - \mu_{normal} \leq 5$

H_1: $\mu_{primas} - \mu_{normal} > 5$

2- Elegir y calcular el estadístico de prueba

$$t_{\exp} = \frac{\bar{x}_{primas} - \bar{x}_{normal} - d_0}{s'\sqrt{\frac{1}{n_{primas}} + \frac{1}{n_{normal}}}} = \frac{45 - 43 - 5}{6{,}574\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{13}}} = -1{,}222$$

$$s'^2 = \frac{(n_{primas} - 1)s^2_{primas} + (n_{normal} - 1)s^2_{normal}}{n_{primas} + n_{normal} - 2} = \frac{15 \cdot 49 + 12 \cdot 36}{16 + 13 - 2} = 43{,}222$$

Contrastes sobre la diferencia de medias y varianzas

3- Determinación de la región crítica

$$P\left(t_{16+13-2} > t_{\alpha}\right) = 0{,}1 \Rightarrow t_{27;0{,}1} = 1{,}333 \Rightarrow t_{\exp} > 1{,}333.$$

4- Decisión: $t_{exp}<t_{0,1}$ ➔ Acepto la H_0, luego no se ha incrementado la productividad media en más de 5 unidades.

Contrastes sobre la diferencia de proporciones

El número de The Wall Street Journal del 23 de mayo de 1988 publicó que el porcentaje de accidentes fatales de automóviles era diferente para autos grandes y pequeños. Para los primeros, se trataba del 21%; para los segundos del 26%. Si los resultados se basaron en muestras de 150 para cada grupo, ¿Concluiría usted que los automóviles grandes son más seguros con un nivel de significación de 0,1?

Contrastes sobre la diferencia de proporciones

SOLUCIÓN:

1- Formulación de hipótesis

H_0: $p_{grandes} \geq p_{pequeños}$

H_1: $p_{grandes} < p_{pequeños}$

2- Elegir y calcular el estadístico de prueba

$$Z_{\exp} = \frac{\hat{p}_{grandes} - \hat{p}_{pequeños}}{\sqrt{\frac{n_{grandes} + n_{pequeños}}{n_{grandes} n_{pequeños}} \hat{p}\hat{q}}} = \frac{0{,}21 - 0{,}26}{\sqrt{\frac{150+150}{22500} 0{,}235 \cdot 0{,}765}} = -1{,}021$$

$$\hat{p} = \frac{n_{grandes}\hat{p}_{grandes} + n_{pequeños}\hat{p}_{pequeños}}{n_{grandes} + n_{pequeños}} = \frac{150 \cdot 0{,}21 + 150 \cdot 0{,}26}{300} = 0{,}235$$

Contrastes sobre la diferencia de proporciones

3- Determinación de la región crítica

$$P\left(Z < -Z_{\alpha}\right) = 0{,}1 \Rightarrow Z_{0,1} = 1{,}285 \Rightarrow RC : Z_{\exp} < -1{,}285.$$

4- Decisión: $Z_{exp} > Z_{0,1}$ ➔ Acepto la H_0, luego no podemos afirmar que los coches grandes son más seguros que los pequeños.

Sumario

- Se han ejemplificado algunos problemas de resolución de contrastes de hipótesis paramétricos sobre la media, la varianza y la proporción.
- Se han ejemplificado algunos problemas de resolución de contrastes de hipótesis paramétricos sobre igualdad de medias, varianzas y proporciónes.