

- 1.- Una de la torres más altas del mundo, en Dubai, tiene un ascensor cuyo recorrido vertical es de 400 metros. El ascensor tiene una masa de 1000 kg.

(a) ¿Depende el trabajo realizado por la gravedad sobre el ascensor de los detalles del movimiento, esto es, de la velocidad o aceleración del mismo? ¿Por qué?

¿Cuánto trabajo hace la gravedad sobre el ascensor durante su desplazamiento desde la posición más alta a la más baja?

(b) Suponiendo que el ascensor baja a velocidad constante, ¿cuál es el trabajo que hace la tensión del cable del ascensor?

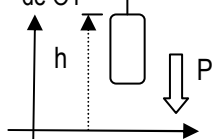
(c) ¿Cuál es la potencia mínima del motor que se necesita instalar para que el ascensor suba a 20 m/s?

(Nota: suponga que el ascensor no tiene contrapeso para ayudar en la subida, por lo que el motor "tira" de toda la masa del ascensor).

La fuerza de gravedad es conservativa. Esto significa que el trabajo realizado para mover una masa de un sitio a otro no va a depender del camino elegido, sino solo de las coordenadas de los mismos. La gravedad siempre va a intentar trasladar los cuerpos hacia su centro; para ello realiza un trabajo, el trabajo del campo, que es independiente del trabajo realizado por otras fuerzas (en este caso de la tensión, mecanismos, etc...) que van a procurar que el movimiento se realiza en condiciones específicas de velocidad, tiempo y aceleración.

$$W_{\text{peso}} = P \cdot h \cdot \cos 180 = -P \cdot h \rightarrow W_{\text{peso}} = -1000 \cdot 9,8 \cdot 400 \text{ (J)} = -392000 \text{ J}$$

El signo menos viene del sistema de referencia. El peso va en la dirección negativa de OY y la altura se dirige en el sentido positivo de OY



El cable que sujeta el ascensor realiza un trabajo que se opone al campo. Es decir, alguien o algo ha de gastar energía que impida que el ascensor caiga libremente. El valor de este trabajo, si se baja con velocidad constante (aceleración cero) vale:

$$P - T = m \cdot a = 0 \rightarrow T = P \rightarrow W_T = T \cdot h \cdot \cos 0 = P \cdot h \rightarrow W_T = +392000 \text{ J}$$

Esta es la energía total a consumir por el trabajo de la tensión. El signo + significa que se gasta y la gana el campo. El signo - es lo que haría espontáneamente el ascensor si se soltara el cable. Sería negativo.

$$\dot{P} = \frac{W_T}{t} = T \cdot \frac{h}{t} = T \cdot v \rightarrow \dot{P} = 1000 \cdot 9,8 \cdot 20 \text{ (W)} = 196000 \text{ W}$$

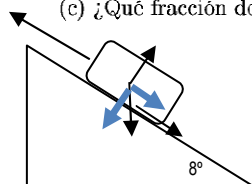
- 1.- Un caballo tira de un trineo cuesta arriba, en una calle cubierta de nieve que sube una pendiente que forma un ángulo de 8° con la horizontal. El trineo tiene una masa de 300 kg y el coeficiente de fricción cinético entre el trineo y la nieve es de 0,12.

Se supone que la tracción del trineo es paralela a la superficie de la calle, y que el caballo produce una potencia de 1 hp (esta potencia, claro está, es un *caballo de vapor*, que son 756 W).

(a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad máxima con la que el caballo puede tirar del trineo cuesta arriba?

(b) ¿Cuál es la fracción de la potencia del caballo que se gasta contra la gravedad?

(c) ¿Qué fracción de la potencia del caballo se gasta contra la fricción?



Asciende a velocidad constante, consumiendo una potencia de 756 W. Planteamos la ecuación de Newton con todas las fuerzas involucradas:

$$F - P_x - fr = m \cdot a \rightarrow F - P_x - fr = 0 \rightarrow F = P_x + fr$$

Condición que ha de cumplir F para que el carrito suba a velocidad constante

F es la fuerza que ejerce el caballo. La componente x del peso y el rozamiento tienen los siguientes valores:

$$P_x = P \cdot \sin \alpha; fr = \mu \cdot N = \mu \cdot P \cos \alpha \rightarrow F = P \cdot \sin \alpha + \mu \cdot P \cos \alpha \rightarrow F = (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)P$$

Por lo que, a partir de la definición de potencia podemos obtener el módulo de la velocidad:

$$\dot{P} = F \cdot v = (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)P \cdot v \rightarrow v = \frac{\dot{P}}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)P} \rightarrow v = \frac{756}{(\sin 8^\circ + 0,12 \cos 8^\circ) \cdot 2940} = a \text{ determinar } \frac{m}{s}$$

De la expresión de F vemos que es la suma de dos términos: el primero que es función exclusiva del peso y el segundo en el que aparece el efecto del coeficiente de rozamiento. Por tanto, la fracción de potencia que se emplea exclusivamente en superar el peso es el primer término:

$$\dot{P} = F \cdot v = \dot{P}_{\text{peso}} + \dot{P}_{\text{rozamiento}} = P \sin \alpha \cdot v + \mu \cdot P \cos \alpha \cdot v \rightarrow$$

$$\dot{P}_{\text{peso}} = \frac{P \sin \alpha \cdot v}{P \sin \alpha \cdot v + \mu \cdot P \cos \alpha \cdot v} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + \mu \cos \alpha} = a \text{ determinar}$$

Y contra la fricción la restante hasta 1:

$$\dot{P}_{\text{rozamiento}} = a \text{ determinar}$$

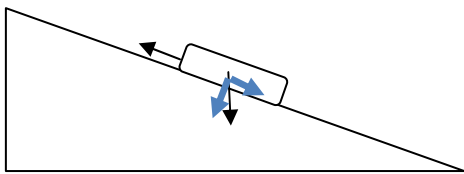
- 1. — Un tren de mercancías sube a velocidad constante $v = 50 \text{ km/h}$ por una vía que tiene una pendiente 1:10 (esto es, sube 1 m por cada 10 m que se desplaza). Repentinamente, un operario desacopla el último vagón del resto del tren.

(a) ¿Cuál es la aceleración que sufre el vagón inmediatamente después de soltarse? ¿Cuál es la aceleración del vagón en el momento en que llega a su altura máxima y se detiene? ¿Qué tipo de movimiento tiene el vagón después de esa detención?

(b) ¿Cuánto avanzará el vagón antes de llegar a su altura máxima y detenerse?

(c) Suponga que el vagón vuelve a pasar por el lugar en que se desacopló del resto del tren. ¿Qué velocidad llevaría en ese momento?

Nota: suponga que entre vagón y vía no hay fricción alguna.



Al subir con velocidad constante lo hace sin aceleración. Es decir:

$$F - P_x = 0 \rightarrow F = P_x = P \sin \alpha$$

Al cortar la tensión, la única fuerza que mueve al vagón es la componente x de su peso. No hay rozamiento en el ejercicio:

$$-P_x = m \cdot a \rightarrow a = -\frac{P \sin \alpha}{m} = -g \sin \alpha$$

La aceleración es en todo momento la que acabamos de obtener. Va disminuyendo su velocidad hasta que se detiene en un punto determinado de la cuesta, tras lo cual iniciará el descenso acelerado también, pero con la aceleración anterior pero de sentido contrario

Es fácil de obtener el espacio recorrido empleando la expresión de un MRUA (Movimiento Rectilíneo Uniformemente Acelerado) que relaciona las velocidades y los desplazamientos realizados:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2ad \rightarrow 0 - v_i^2 = 2ad \rightarrow d = \frac{-v_i^2}{2a}$$

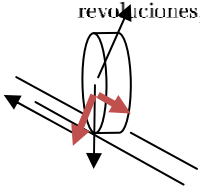
Volverá a tener exactamente la misma velocidad que tenía cuando perdió la conexión con el tensor: 50 km/h.

- 2. Un cilindro sólido, de masa $m = 5 \text{ kg}$ y radio $R = 20 \text{ cm}$, rueda sin deslizar por un plano inclinado un ángulo $\alpha = 30^\circ$. El momento de inercia del cilindro, respecto a un eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular a las bases, es $I = mR^2/2$. Suponiendo un valor para $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, se pide:

(a) Calcular la fuerza de rozamiento entre el cilindro y el plano inclinado.

(b) Calcular el valor mínimo que ha de tener el coeficiente de rozamiento para que no se produzca el deslizamiento del cilindro.

(c) Si el cilindro parte del reposo, calcular la velocidad angular del cilindro después de que haya efectuado tres revoluciones, y el tiempo que tarda en efectuarlas.



Planteamos las dos ecuaciones de la dinámica: traslación y rotación:

$$P_x - fr = m \cdot a$$

$$fr \cdot R = I \cdot \frac{a}{R} = \frac{mR^2}{2} \frac{a}{R} \rightarrow fr = \frac{ma}{2}$$

Operando con las dos ecuaciones, el objetivo es obtener a y fr

$$P_x - \frac{ma}{2} = m \cdot a \rightarrow P_x = \frac{3}{2}m \cdot a \rightarrow a = \frac{2P_x}{3m} = \frac{2}{3}g \sin \alpha \rightarrow fr = \frac{mg}{3} \sin \alpha; a = \frac{2g}{3} \sin \alpha$$

Y el valor mínimo para impedir el deslizamiento y garantizar la rodadura es que el coeficiente valga:

$$\mu = \frac{fr}{N} = \frac{\frac{mg}{3} \sin \alpha}{mg \cos \alpha} = \frac{1}{3}$$

Las ecuaciones cinéticas de los ángulos son las mismas que las tratadas para posiciones en un eje. Por tanto:

$$\omega_f^2 - \omega_i^2 = 2\varepsilon \alpha$$

Con ε la aceleración angular del disco y α el ángulo abatido desde el inicio del giro. Comprueba la similitud con la expresión empleada en el problema anterior. Si ha efectuado tres vueltas, el ángulo recorrido es 6π , y la aceleración angular es la obtenida en los apartados anteriores:

$$\varepsilon = \frac{a}{R} = \frac{2g}{3R} \operatorname{sen} \alpha$$

Por lo que sustituyendo en la ecuación del movimiento:

$$w_f^2 = 2 \cdot \left(\frac{2g}{3R} \operatorname{sen} \alpha \right) \cdot 6\pi \rightarrow \omega_f = \sqrt{8\pi \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{R}}$$

• 1.-

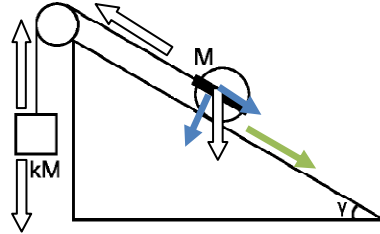
Un cilindro de masa M y radio R , está unido, a través de una cuerda inextensible y sin peso, que pasa por una polea de masa despreciable, con un cuerpo de masa kM (k es una constante positiva). El cilindro puede rodar (sin deslizar) por un plano inclinado que forma un ángulo γ con la horizontal. Si el sistema parte del reposo, calcular:

- La aceleración con la que se mueve el sistema.
- La tensión de la cuerda.

c) La velocidad del centro de gravedad del cilindro cuando el cuerpo de masa kM ha ascendido una distancia x . Dar las respuestas en función de las variables M , k , γ y x , y únicamente al final sustituir los datos numéricos del problema.

Datos: $M = 20 \text{ kg}$, $k = 1/4$, $\gamma = 45^\circ$ y $x = 1 \text{ m}$. Momento de inercia del cilindro $I = MR^2/2$.

Suponemos un rozamiento dado por un coeficiente de valor conocido μ .



Cilindro:

$$T - P_x - fr = M \cdot a$$

Cuerpo vertical:

$$kMg - T = kM \cdot a$$

Rotación del cilindro:

$$fr \cdot R = \frac{MR^2}{2} \frac{a}{R} \rightarrow fr = \frac{Ma}{2}$$

La fuerza de rozamiento es la única que hace girar al cilindro. Hay que tener en cuenta que tanto la Tensión como el peso y sus componentes están aplicadas en el centro del cilindro, por lo que no pueden hacerla girar. Solo el rozamiento que se aplica a una distancia de un radio

Sumando las dos primeras ecuaciones:

$$kMg - P_x - fr = (1 + k)M \cdot a \rightarrow kMg - Mg \operatorname{sen} \gamma - \frac{Ma}{2} = (1 + k)M \cdot a$$

$$kMg - Mg \operatorname{sen} \gamma = \frac{Ma}{2} + Ma + kMa = \left(\frac{3}{2} + k \right) Ma$$

$$g(k - \operatorname{sen} \gamma) = \left(\frac{3}{2} + k \right) a \rightarrow a = \frac{g(k - \operatorname{sen} \gamma)}{\frac{3}{2} + k}$$

Y la tensión se obtiene sustituyendo este resultado en alguna de las dos ecuaciones de Newton:

$$T = M \cdot a + P_x + fr = M \cdot a + Mg \operatorname{sen} \gamma + \frac{Ma}{2} = M \frac{g(k - \operatorname{sen} \gamma)}{\frac{3}{2} + k} + Mg \operatorname{sen} \gamma + \frac{M}{2} \frac{g(k - \operatorname{sen} \gamma)}{\frac{3}{2} + k} \rightarrow$$

$$T = \frac{3}{2} Mg \frac{k - \operatorname{sen} \gamma}{\frac{3}{2} + k} + Mg \operatorname{sen} \gamma$$

Emplearemos la misma expresión cinemática que en los problemas anteriores sabiendo que parte del reposo:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2ax \rightarrow v_f^2 = 2ax = 2 \frac{g(k - \operatorname{sen} \gamma)}{\frac{3}{2} + k} x \rightarrow v_f = \sqrt{2 \frac{g(k - \operatorname{sen} \gamma)}{\frac{3}{2} + k} x}$$

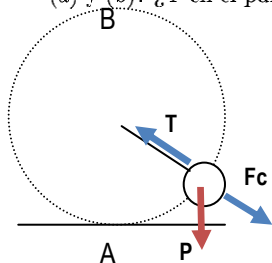
• 2.- Se fija una esfera de acero, de masa M , a uno de los extremos de un cable de acero, inextensible y de longitud R . Se hace girar la esfera en un plano vertical, sujetando el alambre por el otro extremo, de tal manera que la energía total de la esfera es constante a lo largo de su trayectoria (que es, evidentemente, una circunferencia de radio R).

(a) ¿Cuál el módulo de la mínima velocidad lineal de la esfera en el punto más bajo de la trayectoria necesaria para que el cable no se destense cuando la esfera pase por el punto más alto de la misma?

(b) Si ponemos el origen de la energía potencial en el punto más bajo de la trayectoria, ¿cuál el módulo de la velocidad lineal de la esfera en el punto más alto cuando la energía total de la esfera es $10MgR$?

(c) ¿Cuál el valor de la tensión de la cuerda en el punto más bajo de la trayectoria para los dos casos anteriores,

(a) y (b)? ¿Y en el punto más alto de la trayectoria de la esfera?



En este supuesto actúan el peso, la tensión y la fuerza centrífuga. No obstante, abordaremos su resolución por el teorema de conservación de la energía mecánica que afirma lo siguientes:

La suma de las energías cinéticas y potencial de una masa se mantiene constante en cualquier punto de su trayectoria.

Calcularemos las energías cinéticas y potencial en el punto más bajo y más alto del círculo de radio R

$$E_A = \frac{1}{2} M v_A^2 + Mg0 \text{ (origen de energía potencial)}$$

$$E_B = \frac{1}{2} M v_B^2 + Mg2R$$

Iguamos ambas cantidades despejando la velocidad en el punto A:

$$\frac{1}{2} M v_A^2 = \frac{1}{2} M v_B^2 + Mg2R \rightarrow v_A^2 = v_B^2 + 4gR \rightarrow v_A = \sqrt{v_B^2 + 4gR}$$

Si la **energía total** de la esfera es $10MgR$ significa que este valor es la cantidad de energía que tendrá en cualquier punto de la órbita circular que describe. Por lo tanto, aplicando de nuevo el principio de conservación de la energía total (o mecánica) nos dará:

$$E_B = \frac{1}{2} M v_B^2 + Mg2R$$

$$E_{Total} = 10MgR$$

$$\frac{1}{2} M v_B^2 + Mg2R = 10MgR \rightarrow v_B^2 = 16gR \rightarrow v_B = 4\sqrt{gR}$$

El apartado c me pide el cálculo de la tensión. Para ello he de reconocer y dibujar las fuerzas que intervienen en el movimiento circular de la esfera. Como hemos dicho son tres:

- ✓ El peso P
- ✓ La tensión del cable de acero T
- ✓ La fuerza centrífuga F_c que tiende a sacar de su trayectoria circular a la esfera con un valor de: $F_c = M \frac{v^2}{R}$

En el punto más bajo de la trayectoria, A, y en el más alto de la misma, B, el dibujo de las fuerzas serían los siguientes:

	En el punto más bajo, la tensión ha de aguantar el empuje del peso y la centrífuga $T = P + F_c \rightarrow T = Mg + M \frac{v_A^2}{R}$ Con v_A la obtenida en el apartado anterior		En el punto más alto, el peso y la tensión suman sus efectos en contra de la fuerza centrífuga $T + P = F_c \rightarrow T = M \frac{v_B^2}{R} - Mg$ Con v_B la obtenida en el apartado anterior
--	--	--	--

En el punto más bajo de la trayectoria, para la energía total de $10MgR$, solo cambia el valor de la velocidad en este punto porque la expresión de la tensión es la misma:

$$E_A = \frac{1}{2} M v_A^2 + 0 \text{ (origen de energía potencial)}$$

$$E_{Total} = 10MgR$$

$$\frac{1}{2} M v_A^2 = 10MgR \rightarrow v_A^2 = 20gR \rightarrow v_A = \sqrt{20gR} \rightarrow T = P + F_c \rightarrow T = Mg + M \frac{20gR}{R} = 21Mg$$

• 3.— Un automóvil de masa M está equipado con unos neumáticos que presentan un coeficiente de fricción estática con el pavimento μ_e y un coeficiente de fricción cinético con el mismo igual a μ_c .

(a) Supongamos el automóvil en una calle horizontal. ¿Cuál es la aceleración que sufre el automóvil cuando se realiza una frenada brusca que bloquea las ruedas?

(b) En el caso de que el automóvil sea conducido por un conductor más habil (o que le ayude un sistema antibloqueo de frenos, ABS), ¿cuál es la aceleración que sufre el automóvil cuando se frena sin bloquear las ruedas?

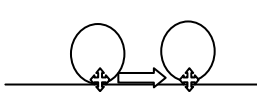
(c) En algunas ciudades (San Francisco, por ejemplo), cuando se estaciona en una calle empinada, es obligatorio dejar los automóviles estacionados con las ruedas delanteras giradas y apoyadas en el borde de la acera. Se quiere estudiar el motivo de esa regulación. ¿Cuál es la pendiente más empinada en la que puede permanecer el automóvil estacionado, con el freno de mano activado?

Datos numéricos: Evalúe las expresiones que ha obtenido, con $M = 1000 \text{ kg}$, $\mu_e = 0,9$, $\mu_c = 0,8$.

Nota importante: haga números sólo **después** de encontrar las expresiones algebraicas de la magnitudes que se piden.

Cuando un cuerpo permanece en reposo, el coeficiente de rozamiento es el estático porque aún no se ha puesto en movimiento el cuerpo por acción de fuerzas externas. Una vez en movimiento, el coeficiente pasa a ser el dinámico que es ligeramente inferior al estático (*"en movimiento cuesta menos mover los objetos que si lo intentamos cuando están parados"*)

En el caso de un bloqueo de ruedas, actúa el dinámico ya que la rueda siempre mantiene el mismo punto de contacto con el suelo, y este punto se desplaza por lo que está en movimiento respecto al suelo.

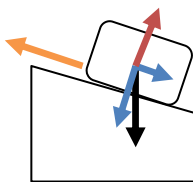


$$\mu_c < \mu_e;$$

La aceleración sufrida en la frenada será:

$$-fr = M \cdot a \rightarrow a = \frac{-fr}{M} = \frac{-\mu_c N}{M} = \frac{-\mu_c Mg}{M} = -\mu_c g$$

Si se lleva **ABS**, significa que la rueda no desliza (patina) y en cada instante hay un punto diferente de contacto con el suelo. Punto sobre el que actúa el coeficiente estático:



$$-fr = M \cdot a \rightarrow a = \frac{-fr}{M} = \frac{-\mu_e N}{M} = \frac{-\mu_e Mg}{M} = -\mu_e g$$

Un coche en pendiente, parado, mantiene el siguiente equilibrio de fuerzas:

$$P_x - fr = m \cdot a = 0(\text{reposo})$$

$$\text{Por tanto, } P_x = fr = \mu_e N = \mu_e mg \cos \alpha$$

Con lo que siempre estará parado en la cuesta si se cumple la siguiente relación:

$$mg \sin \alpha = \mu_e mg \cos \alpha \rightarrow \mu_e = \tan \alpha$$

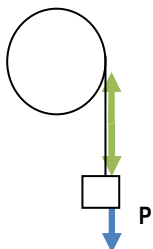
• 2.— Un cilindro sólido de masa 5 kg puede girar alrededor de un eje horizontal fijo que pasa por el centro de sus bases y perpendicularmente a las mismas. El radio del cilindro es $R = 10 \text{ cm}$. Externamente el cilindro lleva arrollada una cuerda inextensible de la que cuelga un cuerpo de 50 g . Suponiendo que la cuerda no desliza sobre el cilindro, calcular:

a) La aceleración angular del cilindro

b) La aceleración lineal de la cuerda.

c) La longitud de cuerda desenrollada en 5 segundos.

Dato: El momento de inercia del cilindro es $I = MR^2/2$, respecto a ese eje de giro.



Aplicamos la ecuación de Newton para la rotación solamente. Advertir que el cilindro no se traslada. Solo gira.

$$P \cdot R = I \cdot \alpha = \frac{MR^2}{2} \alpha \rightarrow mgR = \frac{MR^2}{2} \alpha$$

Despejando la aceleración angular:

$$\alpha = 2 \frac{mg}{MR} \rightarrow a = \alpha \cdot R = 2g \frac{m}{M}$$

Aplicando la expresión cinética cinemática de un MRUA

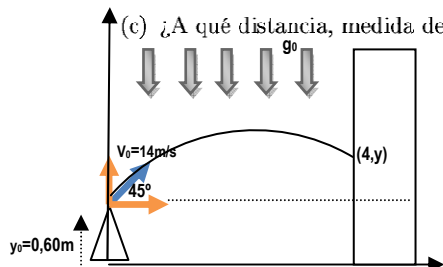
$$y = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow y = \frac{1}{2} 2g \frac{m}{M} t^2 = 2g \frac{m}{M} t^2$$

1. Un jugador de pelota, estando situado a 4 m de la pared delantera del frontón, golpea con su mano la pelota. Esta sale de su mano, a una altura de 60 cm por encima del suelo, con una velocidad inicial de 14 m/s y formando un ángulo de 45° con la horizontal. Cuando la pelota choca contra la pared retrocede de forma que se invierte la componente horizontal de su velocidad mientras que su componente vertical no varía. Ignórense los efectos del rozamiento con el aire.

(a) ¿A qué altura la pelota golpeó la pared?

(b) ¿Cuánto tiempo tardó la pelota en caer al suelo después de chocar con la pared?

(c) ¿A qué distancia, medida desde la posición donde el jugador lanza la pelota, caerá la pelota al suelo?



Los problemas de cinemática siempre han de abordarse del mismo modo. Primero identificar si es acelerado o no. En este caso es evidente que es una **caída libre** en parábola en la que actúa en todo momento la acción de la gravedad terrestre ($g_0=9,8 \text{ m/s}^2$). En segundo lugar cuál es la ecuación de movimiento que define el movimiento identificado. En este caso un MRUA:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$$

En tercer lugar, hay que darles valor a los términos de la expresión de la posición para personalizarla al ejercicio en cuestión. En este caso, saber cuánto valen la posición inicial (r_0), la velocidad inicial (v_0) y la aceleración (a). Los tres **son vectores de dos componentes**.

- ✓ En los movimientos en el aire de objetos impulsados inicialmente pero luego dejados a la acción terrestre, la única aceleración es la de la gravedad. **Siempre va dirigida al centro terrestre y vectorialmente tiene el sentido negativo del eje vertical**
- ✓ La velocidad inicial la especifica el problema. Tiene dos componentes.
- ✓ La posición inicial depende de nuestro sistema de referencia. En el dibujo, la posición inicial solo tiene altura:

$$\vec{r}_0 = 0,60 \cdot \vec{j} \text{ (m)}$$

$$\vec{v}_0 = 14 \cdot \cos 45^\circ \cdot \vec{i} + 14 \sin 45^\circ \cdot \vec{j} = 7\sqrt{2} \vec{i} + 7\sqrt{2} \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{a} = -9,8 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

Sustituimos estos valores en la primera expresión, igualando por un lado las componentes i u por otro las componentes j:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \rightarrow (x, y) = 0,60 \cdot \vec{j} + ((7\sqrt{2} \vec{i} + 7\sqrt{2} \vec{j}) \cdot t + \frac{1}{2} (-9,8 \vec{j}) \cdot t^2$$

Ecuación del movimiento de este balón. Vemos que es un vector de dos componentes, por lo que separaremos la componente **x** (i) de la componente **y** (j):

$$x = 7\sqrt{2} \cdot t$$

$$y = 0,60 + 7\sqrt{2} \cdot t - 4,9 \cdot t^2$$

Ahora estamos en condiciones de contestar a la primera pregunta. La pared está a **4 m**; esto significa que la coordenada **x** del impacto es 4 m. Pues bien, en las ecuaciones particularizamos la **x a 4**; obtendremos el instante en que impacta, y finalmente en la expresión de **y** averiguaremos la **altura a la que choca**:

$$4 = 7\sqrt{2} \cdot t \rightarrow t = 0,404 \text{ s} \rightarrow y = 0,60 + 7\sqrt{2} \cdot 0,404 - 4,9 \cdot 0,404^2 = 4,76 \text{ m}$$

b) Para abordar esta cuestión, el enunciado nos tiene que proporciona los tres valores iniciales de la posición, velocidad y aceleración para reescribir las ecuaciones del movimiento tras el impacto de la pelota en la pared. El problema apunta que la velocidad inicial en este caso **solo cambia el signo de la componente horizontal**. No obstante, la velocidad inicial en este segundo itinerario de la pelota será la que tenga en el momento del impacto. La componente horizontal no cambia, es siempre la misma, pero la componente vertical la obtenemos de la expresión de la velocidad en el instante del impacto (0,404 s):

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \rightarrow (v_x, v_y) = 7\sqrt{2} \vec{i} + 7\sqrt{2} \vec{j} - 9,8 \vec{j} \cdot t \rightarrow v_x = 7\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}} ; v_y = 7\sqrt{2} - 9,8 \cdot t = 7\sqrt{2} - 9,8 \cdot 0,404 = 5,94 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\vec{r}_0 = 4 \cdot \vec{i} + 4,76 \cdot \vec{j} \text{ (m) Posición en el impacto}$$

$$\vec{v}_0 = -14 \cdot \cos 45^\circ \cdot \vec{i} + 5,94 \cdot \vec{j} = -7\sqrt{2} \vec{i} + 5,94 \vec{j} \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ Solo cambia el signo de la componente horizontal}$$

$$\vec{a} = -9,8 \vec{j} \text{ m/s}^2 \text{ Siempre es el mismo valor, dirección y sentido}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \rightarrow (x, y) = 4 \cdot \vec{i} + 4,76 \cdot \vec{j} + ((-7\sqrt{2} \vec{i} + 5,94 \vec{j}) \cdot t + \frac{1}{2} (-9,8 \vec{j}) \cdot t^2$$

$$x = 4 - 7\sqrt{2} \cdot t$$

$$y = 4,76 + 5,94 \cdot t - 4,9 \cdot t^2$$

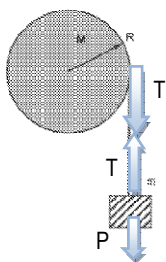
Cuando la bola contacta con el suelo, se hace cero la altura y ; haciendo cero este valor obtendremos el tiempo que está volando, y una vez calculado sustituimos este valor de tiempo en la x para determinar su contacto con el suelo.

$$0 = 4,76 + 5,94 \cdot t - 4,9 \cdot t^2 \rightarrow t = \frac{-5,94 \pm \sqrt{(5,94)^2 - 4 \cdot (-4,9) \cdot 4,76}}{2(-4,9)} = 2,52 \text{ s}$$

$$x = 4 - 7\sqrt{2} \cdot 2,52 = -19,96 \text{ m}$$

El resultado negativo significa que el balón pasa de largo sobre la vertical del deportista y cae al otro lado, en el lado del eje X negativo.

- 3.— Un rodillo cilíndrico sólido de masa $M = 10\text{kg}$ y radio $R = 1\text{m}$ gira sin rozamiento alrededor de su eje central. Alrededor de la pared lateral del cilindro se enrolla una cuerda atada a una masa de $m = 30\text{kg}$ como se indica en la figura.



Suponga que cuando la masa desciende la cuerda se desenrolla, pero no se desliza sobre el cilindro. Se pide calcular:

- (a) la aceleración de la masa m .
- (b) el momento debido a la tensión de la cuerda y la aceleración angular del rodillo.

(Nota: El momento de inercia de un cilindro alrededor de su eje central de rotación es $MR^2/2$)

El cilindro solo gira. No hay traslación por lo que solo emplearemos la ecuación de la dinámica de rotación. Con α la aceleración angular del cilindro e I el momento de inercia del cilindro respecto al eje de giro de la figura. Solo el peso P realiza momento de giro. Por tanto:

$$M = I \cdot \alpha \rightarrow T \cdot R = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \rightarrow a = \frac{2T}{M}$$

La masa vertical se desplaza, no gira, por lo que la ecuación de la dinámica a utilizar es la de traslación:

$$P - T = m \cdot a \rightarrow T = P - m \cdot a = mg - m \cdot \frac{2T}{M}$$

Despejamos la tensión:

$$T \cdot \left(1 + 2\frac{m}{M}\right) = mg \rightarrow T = \frac{m}{\left(1 + 2\frac{m}{M}\right)} \cdot g$$

$$a = \frac{2}{M} \frac{m}{\left(1 + 2\frac{m}{M}\right)} \cdot g$$

Y el momento de la tensión sobre la polea:

$$M = T \cdot R = \frac{m}{\left(1 + 2\frac{m}{M}\right)} \cdot g \cdot R$$

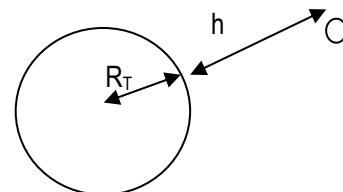
• 3.— Consideremos que la Tierra es una esfera de radio R_T . Un vehículo espacial de 100 kg de masa se encuentra en una órbita circular alrededor de la Tierra a una altura, medida desde la superficie terrestre, $h = 2R_T$.

(a) Calcular el periodo de la órbita del vehículo espacial alrededor de la Tierra.

(b) Expresar el momento angular L del vehículo espacial en función de su energía cinética E_c y calcular su valor numérico.

(c) Si se supone que el vehículo espacial se lanzó verticalmente hacia arriba desde la superficie de la Tierra, calcular, despreciando la resistencia del aire, la velocidad de lanzamiento para que el vehículo llegara exactamente hasta su altura orbital.

(Datos numéricos: $g = 9,81 \text{ m/s}^2$; $R_T = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$)



El periodo es el tiempo empleado en dar una vuelta. La velocidad lineal de un satélite (velocidad orbital) es uniforme, por lo que el periodo se obtiene de la definición de velocidad para un movimiento uniforme:

$$T = \frac{2\pi R}{v}$$

Con v la velocidad orbital de un satélite, expresión que puede deducirse de la evidencia que el satélite no colapsa hacia la Tierra ni sale disparado hacia el infinito. Este dato exige que las dos únicas fuerzas que actúan sobre el satélite han de ser iguales (en módulo) y actuar en sentidos contrarios: La gravedad y la centrífuga:

$$F_g = F_c \rightarrow G \frac{M \cdot m}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

Con r la distancia del centro de la Tierra al centro del satélite.

Con este último resultado, sustituyéndolo en el periodo obtenemos la relación que conecta el periodo con la distancia r (Es la expresión de la tercera ley de Kepler):

$$T = \frac{2\pi r}{\sqrt{G \frac{M}{r}}} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

Sin embargo, en el problema **no nos dan el dato de la masa terrestre, sino el valor de la aceleración g en su superficie**. Es fácil eliminar la dependencia de la masa si nos dan g a partir de la definición de ésta última haciendo el siguiente cambio. A una distancia r del centro, el valor de g es:

$$g = \frac{GM}{r^2} \rightarrow GM = gr^2$$

Cambio que es muy común, En nuestro caso, si el dato es en la superficie terrestre:

$$GM = g_0 R^2$$

Sustituyendo este valor en la expresión del periodo:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g_0 R^2} (R + h)^3, \text{ con } (r = R + h)$$

Datos son todos conocidos.

El momento angular del satélite es el resultado del siguiente producto vectorial:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m \vec{v}$$

Como la posición y la velocidad orbital son perpendiculares entre sí, el ángulo es 90° y el módulo de L (que se conserva) vale:

$$L = r \cdot m \cdot v = rm \sqrt{G \frac{M}{r}}$$

Hemos de ponerlo en función de su energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \left(\sqrt{G \frac{M}{r}} \right)^2 = \frac{1}{2}mG \frac{M}{r}$$

Elevamos al cuadrado L para que no nos moleste la raíz cuadrada y multiplicando y dividiendo por 2:

$$L^2 = r^2 m^2 G \frac{M}{r} = 2 \cdot r^2 m \frac{1}{2} mG \frac{M}{r} \rightarrow L^2 = 2 \cdot r^2 m \cdot E_c$$

$$L = r \sqrt{2mE_c} = (R + h) \cdot \sqrt{2mE_c}$$

Todas las cantidades puedes obtenerlas de los datos

Si se lanzó desde la superficie terrestre y alcanza la órbita deseada han de cumplirse dos condiciones:

- Siempre se conserva la energía total (cinética + potencial) en el despegue y en la órbita alcanzada
- Si llega a la órbita y **no se pasa** es porque deja de tener velocidad (energía cinética cero)

$$E_{\text{Mecánica}}(\text{superficie}) = E_{\text{Mecánica}}(\text{Órbita})$$

$$-G \frac{M \cdot m}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = -G \frac{M \cdot m}{R + h} + 0$$

La incógnita es v (velocidad de despegue). Todo lo demás son datos conocidos en el problema. Además observa que la masa del satélite se **elimina** de la ecuación.

$$\frac{1}{2}v^2 = -G \frac{M}{R + h} + G \frac{M}{R} = GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h} \right) \rightarrow v = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R + h} \right)}$$

• **2.**— Consideremos el *saltonauta* que hace unos meses batió el récord de salto desde globo (desde una altura $h \simeq 40$ km). Supongamos que el globo estaba en equilibrio antes del salto, de manera que si el *saltonauta* no se hubiera lanzado al vacío el globo permanecería quieto y no subiría más.

(a) Calcular la gravedad a esa altura (llame R al radio de la Tierra) y compárela con la gravedad en la superficie terrestre. Supongamos que en esa zona de la estratosfera la atmósfera está tan rarificada que no hay apenas aire que perturbe el movimiento de caída libre. ¿Qué velocidad (módulo y dirección) tendrá el *saltonauta* cuando haya recorrido 1 km?

(b) ¿Cuál será la aceleración del globo hacia arriba cuando el *saltonauta* se deje caer hacia la Tierra?

(c) ¿Cuál es la posición del centro de masas del sistema “*saltonauta* / globo” en el instante en el que el *saltonauta* ha recorrido 1 km?

Nota: justifique debidamente cualquier aproximación que utilice. Recuerde que el radio R de la Tierra es de aproximadamente 6400 km

La intensidad del campo gravitatorio varía con la altura. En las proximidades de la superficie se aproxima a $9,8 \text{ m/s}^2$ pero a la altura del ejercicio, 40 km, el valor será menor sin duda:

$$g(h) = G \frac{M}{(R + h)^2}; g_0 = G \frac{M}{R^2} \rightarrow \frac{g(h)}{g_0} = \frac{R^2}{(R + h)^2} \rightarrow \frac{g(h)}{g_0} = \frac{1}{\left(\frac{R + h}{R} \right)^2} = \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R} \right)^2} \rightarrow g(h) = \frac{g_0}{\left(1 + \frac{h}{R} \right)^2}$$

A 40 km de altura, la g ha variado la siguiente cantidad:

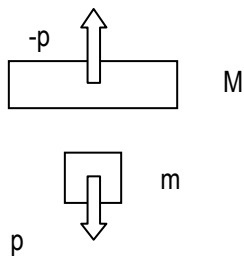
$$g(40\text{km}) = \frac{9,8}{\left(1 + \frac{40}{6400} \right)^2} \simeq \frac{9,8}{1,00625^2} \simeq 9,678 \frac{\text{N}}{\text{kg}} \text{ Es el } 98,76 \% \text{ del valor en la superficie}$$

Es una caída libre con aceleración constante si suponemos que en 1 km de caída no ha variado sustancialmente la g . Por lo que mantendremos la g a 40 km en ese kilómetro de caída:

$$v^2 - v_0^2 = 2dg \rightarrow v = \sqrt{2dg(40)} = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 9,678} = 432,81 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Velocidad vertical en el sentido negativo del eje OY.

Cuando salta, la 3ª ley de la dinámica asegura que a toda acción (empuje, fuerza, impulso, peso del saltador al saltar) se le opone una reacción (fuerza del mismo módulo, valor y sentido opuesto que se aplica al segundo cuerpo):



De la figura comentamos lo siguiente: El saltador (de masa m) tiene un peso p que al saltar le transmite una fuerza de reacción al globo de valor $-p$ aplicada sobre ella (de masa M). Por tanto:

$$-p = M \cdot a \rightarrow a = -\frac{m}{M}g(40km)$$

El sentido negativo se refiere a que es el contrario al del saltador. La posición del centro de masas puede obtenerse a partir de su definición:

$$y_{CM} = \frac{my_{saltador} + My_{globo}}{m + M}$$

La posición del saltador tras 1 km de caída es de 39 km, por tanto podemos calcular cuánto tiempo ha tardado en recorrer este kilómetro:

$$y_{saltador} = 39 \text{ km}$$

$$1000 = 4,839t^2 \rightarrow t = 14,38 \text{ s}$$

La posición del globo transcurridos 14,38 s será:

$$y_{globo} = 40000 + \frac{9,678}{2}14,28^2 = 40986,76 \text{ m}$$

Sustituyendo estos valores de alturas en la expresión del centro de masas:

$$y_{CM} = \frac{m \cdot 39000 + M \cdot 40986,76}{m + M} = \frac{39000 \frac{m}{M} + 40986,76}{1 + \frac{m}{M}}$$

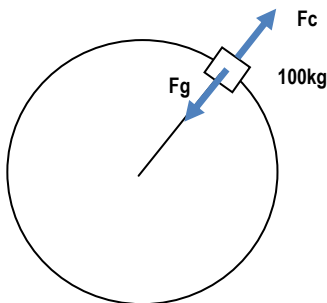
• 1 – Un satélite de 100 kg está en órbita ecuatorial circular alrededor de la Tierra, girando en su mismo sentido, a una altura de 1000 km sobre la superficie de la Tierra.

a) ¿Qué velocidad lleva el satélite?

a) ¿Cuánto tarda en pasar por el mismo punto de la vertical de la Tierra (teniendo en cuenta que la Tierra tiene un movimiento de rotación)?

c) ¿Cuál es la energía total que tiene el satélite en su órbita?

Datos: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$; radio de la Tierra, $R_T = 6370 \text{ km}$; masa de la Tierra, $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$.



Si un satélite mantiene su órbita significa que las dos fuerzas que intervienen, la gravitacional y la centrífuga, **coinciden en módulo**.

$$F_c = F_g \rightarrow m \frac{v^2}{R_T + h} = G \frac{M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} \rightarrow v = \sqrt{G \frac{M_T}{R_T + h}}$$

Que es expresión teórica de la velocidad orbital.

$$v = \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,98 \cdot 10^{24}}{6,37 \cdot 10^6 + 10^6}} = 7355,27 \frac{m}{s} \equiv 7,36 \frac{km}{s}$$

El tiempo que tarda en dar una revolución es el **periodo**:

$$T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v} = \frac{2\pi(6,37 \cdot 10^6 + 10^6)}{7355,27} = 6295,77 \text{ s} \equiv 1 \text{ h y } 45 \text{ minutos}$$

La energía total es la energía mecánica del satélite. Se obtiene sumando las energías cinética y potencial a la altura de 1000 km:

$$E_{mecánica} = E_{Cinética} + E_{Potencial} = \frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_T m}{(R_T + h)} = \frac{1}{2}100 \cdot 7355,27^2 - 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{5,98 \cdot 10^{24} \cdot 100}{6,37 \cdot 10^6 + 10^6} \text{ J}$$

PROBLEMAS. Si ha seguido la evaluación continua sólo debe resolver dos de los problemas.

• 1.- Alrededor de un planeta sólido, cuya densidad es constante igual a ρ y su radio igual a R , orbita un pequeño satélite artificial de masa m a una altura $h = R$ sobre la superficie del planeta. Calcular :

(a) La velocidad a la que orbita el satélite.

(b) El planeta carece de atmósfera por lo que no existe rozamiento con ella. El satélite posee un mecanismo de frenado instantáneo que detiene totalmente su movimiento en la órbita, por lo que caerá verticalmente, para acabar estrellándose contra la superficie del planeta, ¿con qué velocidad impactará contra la superficie del planeta? ¿Cuál es el cociente entre esta velocidad y la del satélite en su órbita?

(c) Desde la superficie del planeta se dispara hacia arriba un proyectil con una velocidad cuyo módulo es la misma que la del satélite en su órbita, ¿a qué altura llegará?

Nota: (todas las respuestas han de darse en función del radio del planeta R , su densidad ρ y la constante de gravitación universal G)

No nos dan la masa del planeta, por lo que no la podemos emplear como dato. Ni tan siquiera es la Tierra. Partimos de la expresión de la velocidad orbital obtenida en el problema anterior:

$$v_o = \sqrt{G \frac{M}{R+h}} = \sqrt{G \frac{M}{R+R}} = \sqrt{G \frac{M}{2R}}$$

Teniendo en cuenta la expresión de la densidad:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}\frac{M}{\pi R^3} \rightarrow M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

Sustituimos este valor de la masa en la velocidad:

$$v_o = \sqrt{G \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{2R}} = \sqrt{\frac{2}{3}\pi G \rho R^2} = R \sqrt{\frac{2}{3}\pi G \rho}$$

Situado a una altura de R , e impulsado solo por la fuerza gravitacional atractiva, deberemos de calcular el valor de g :

$$g = \frac{GM}{(R+h)^2} = \frac{GM}{(R+R)^2} = \frac{GM}{(2R)^2} = \frac{GM}{4R^2}$$

En función de la densidad:

$$g = \frac{GM}{4R^2} = \frac{G \frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{4R^2} = \frac{1}{3}\pi G R \rho$$

La velocidad con la que impacta es:

$$v^2 = 2gh \rightarrow v^2 = 2 \cdot \frac{1}{3}\pi G R \rho \cdot R \rightarrow v = R \sqrt{\frac{2}{3}\pi G \rho}$$

El cociente entre la velocidad orbital y la de caída es el siguiente

$$\frac{v_o}{v} = \frac{R \sqrt{\frac{2}{3}\pi G \rho}}{R \sqrt{\frac{2}{3}\pi G \rho}} = 1$$

Coinciden ambas.

El último apartado lo obtendremos aplicando el Principio de conservación de la energía total (mecánica) entre los dos puntos: el despegue desde la superficie con la velocidad calculada; el punto que alcanza en el que hemos de determinar su altura (hemos de suponer que al llegar a esa cota, el satélite se ha detenido)

$$E_{superficie} = E_h$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{Mm}{R} = -G \frac{Mm}{R+h}$$

Sustituimos el valor de la velocidad y el de la masa del planeta en función de la densidad:

$$\frac{1}{2}m \left(R \sqrt{\frac{2}{3}\pi G \rho} \right)^2 - G \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho m}{R} = -G \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho m}{R+h}$$

Operamos, eliminando la masa del satélite, G , la densidad, ρ , la expresión se simplifica mucho:

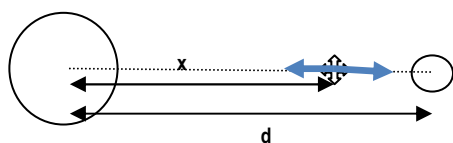
$$R+h = \frac{4}{3}R \rightarrow h = \frac{R}{3}$$

PROBLEMAS. Si ha seguido la evaluación continua solo debe resolver dos de los problemas.

• 1.— Consideremos el planeta Tierra, de masa M_T y radio R_T . A su alrededor orbita en órbita circular la Luna, de masa M_L y radio R_L . La distancia entre ambos cuerpos, desde el centro de la Tierra hasta el centro de la Luna, es d . Cierta misión espacial consiste en ubicar un satélite de telecomunicaciones entre ambos cuerpos celestes, a una distancia tal que no sienta ninguna fuerza gravitatoria.

- (a) Obtenga la distancia r desde el centro de la Tierra a la que tiene que colocarse el satélite.
- (b) Despreciando cualquier tipo de pérdida por rozamiento, ¿con qué velocidad debe lanzarse el satélite de comunicaciones para llegar al punto r con velocidad nula?

Nota. Considere los siguientes valores numéricos: $M_T = 5,97 \times 10^{24}$ kg, $R_T = 6,37 \times 10^6$ m, $M_L = 7,35 \times 10^{22}$ kg, $R_L = 1,74 \times 10^6$ m, $d = 3,84 \times 10^8$ m, $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N m² kg⁻².



En ese lugar entre la Tierra y la Luna, la fuerza con la que la Tierra atrae al satélite ha de coincidir con la fuerza de la Luna, es decir, han de coincidir en sus módulos aunque los sentidos sean opuestos:

El problema nos pide determinar x , en donde d es una distancia conocida:

$$G \frac{M_T \cdot m}{x^2} = G \frac{M_L \cdot m}{(d-x)^2} \rightarrow d-x = x \cdot \sqrt{\frac{M_L}{M_T}} \rightarrow x = \frac{d}{\left(1 + \sqrt{\frac{M_L}{M_T}}\right)} \rightarrow x = \frac{3,86 \cdot 10^8}{\left(1 + \sqrt{\frac{7,35 \cdot 10^{22}}{5,97 \cdot 10^{24}}}\right)} = 3,47 \cdot 10^8 \text{ m}$$

Como en el problema anterior, aplicamos el principio de conservación de la energía entre la superficie de la Tierra y el punto a donde tiene que llegar, a una altura que es $x-R_T$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G \frac{M_T m}{R_T} - G \frac{M_L m}{d-R_T} = -G \frac{M_T m}{x-R_T} - G \frac{M_L m}{d-x}$$

En el primer término aparece la energía cinética en el despegue **más** la energía potencial inicial suma de la contribución de la Tierra y de la Luna, de ahí que aparezcan dos términos para la energía potencial.

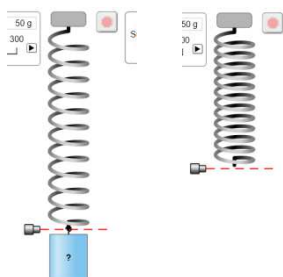
En el segundo miembro aparece la energía potencial total en el punto de equilibrio debida a la Tierra (primer término) y debida a la Luna (segundo término)

Hay que despejar la velocidad, eliminando la masa del satélite:

$$v = \sqrt{2 \left(-G \frac{M_T}{x-R_T} - G \frac{M_L}{d-x} + G \frac{M_T}{R_T} + G \frac{M_L}{d-R_T} \right)} = \sqrt{2G \left(-\frac{M_T}{x-R_T} - \frac{M_L}{d-x} + \frac{M_T}{R_T} + \frac{M_L}{d-R_T} \right)}$$

• 1.— Se tiene un muelle colgado verticalmente del techo y cuya constante elástica es $k = 80 \text{ N/m}$. Se cuelga del extremo libre del muelle un objeto de masa $m = 5 \text{ kg}$, de forma que el muelle se estira lentamente hasta que el sistema llega a su posición de equilibrio.

- (a) Calcular cuánto se ha estirado el muelle en la nueva posición de equilibrio con el objeto colgado.
- (b) Si ahora se desplaza la masa 1 cm por debajo de su posición de equilibrio y además se le imprime una velocidad inicial hacia abajo de 2 cm/s , calcular la energía total del movimiento armónico del sistema, la amplitud del movimiento y la velocidad máxima que alcanza la masa.



Cuando colgamos una masa y dejamos que el sistema se equilibre, la fuerza de recuperación del muelle iguala al peso de la masa y la consecuencia es un alargamiento respecto a su longitud natural (longitud sin masa)

En el nuevo equilibrio, se cumple la igualdad entre los módulos de ambas fuerzas:

$$P = F_H \rightarrow mg = k \cdot \Delta y \rightarrow \Delta y = \frac{mg}{k} \rightarrow \Delta y = \frac{5 \cdot 9,8}{80} \text{ m} = 0,6125 \text{ m}$$

El apartado b) lo haremos aplicando el teorema de conservación de la energía mecánica. Inicialmente, es decir, cuando estiramos 1 cm y le impulsamos en sentido hacia abajo con una velocidad inicial, la energía total adquirida por la masa es la siguiente:

$$E_{M(i)} = \frac{1}{2} k(A_0)^2 \rightarrow E_{M(i)} = 0,004 \text{ J}; \quad \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} k \Delta y'^2 \rightarrow \Delta y' = \sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow \Delta y' = 0,25 \text{ m}$$

$E_{M(i)}$ es la energía total involucrada en la oscilación de esta masa antes de impulsarla con la velocidad de 2 cm/s . Cuando la impulsamos, la energía cinética que aportamos se transforma en potencial elástica, lo que nos permite calcular lo que se estira. Además, en el primer tramo de descenso, llegará un punto en el que se anula la velocidad; llegado aquí, y aplicando la conservación de la energía mecánica, calcularemos lo que se ha estirado con el impulso y así determinamos la amplitud de todo el movimiento sumando esta cantidad al cm desplazado inicialmente.

Por tanto, la amplitud del movimiento será:

$$A = 0,01 \text{ m} + 0,25 \text{ m} = 0,26 \text{ m}$$

Y la energía mecánica nueva:

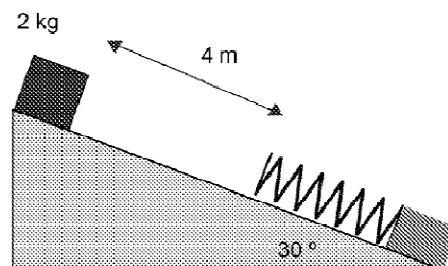
$$E_M = \frac{1}{2} k(A)^2 = 2,704 \text{ J}$$

La velocidad máxima la alcanzará al pasar por el punto de equilibrio:

$$2,704 \text{ J} = \frac{1}{2} m v_{eq}^2 \rightarrow v_{eq} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,704}{5}} = 1,04 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

• 3.— Un bloque de masa 2 kg se deja deslizar desde el reposo por un plano inclinado, a una distancia de 4 m de un muelle sin masa cuya constante de fuerza es $k = 100 \text{ N/m}$. El muelle está alineado con el plano inclinado 30° como se muestra en la figura.

- (a) Si no hay fricción entre el plano y el bloque encuentre cuál es la máxima compresión del muelle.
- (b) Si ahora se supone que hay fricción entre el bloque y el plano y el coeficiente de rozamiento cinético vale 0.2, encuentre la máxima compresión del muelle.



Estos ejercicios suelen abordarse por conservación de la energía mecánica en caso de no haber fricción, y si la hubiera, teniendo en cuenta que el trabajo de las fuerzas no conservativas producen una disminución de la energía mecánica del sistema. En el caso a) no hay fricción, por lo que se conserva la energía mecánica total de la masa:

Podemos distinguir dos momentos relevantes en el descenso:

- 1) En la parte alta de la rampa; parte del reposo y solo hay energía potencial gravitatoria
- 2) El punto de máxima compresión. En este punto, toda la energía potencial gravitatoria se ha transformado en energía potencial elástica; tener en cuenta que en este punto también se ha parado.

La energía mecánica desde el punto donde se deja caer:

$$E_{M(i)} = mgh = mg(4 + \Delta x)\tan 30$$

En el punto de máxima compresión

$$E_{M(f)} = \frac{1}{2}k\Delta x^2$$

Ambas energías han de coincidir:

$$mg(4 + \Delta x)\tan 30 = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \rightarrow 8\frac{mg}{k} + mg\frac{2\sqrt{3}}{3k}\Delta x = \Delta x^2 \rightarrow \Delta x^2 - mg\frac{2\sqrt{3}}{3k}\Delta x - 8\frac{mg}{k} = 0 \rightarrow \Delta x^2 - 2 \cdot 9,8 \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 100}\Delta x - 8 \frac{2 \cdot 9,8}{100} = 0$$

$$\rightarrow \Delta x^2 - 2 \cdot 9,8 \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 100}\Delta x - 8 \frac{2 \cdot 9,8}{100} = 0 \rightarrow \Delta x^2 - 0,2263\Delta x - 1,568 = 0$$

Con solución:

$$\Delta x = \frac{0,2263 \pm \sqrt{(-0,2263)^2 + 4 \cdot 1 \cdot 1,568}}{2} = 1,37 \text{ m}$$

b) Cuando hay fricción, parte de la energía potencial con la que partía se ha disipado en el trayecto de los primeros 4 metros y del desplazamiento $-x$ durante la compresión. Es lo que vamos a determinar. De hecho con el resultado obtenido, podemos saber la energía mecánica con la que partía al inicio de la rampa:

$$E_{M(i)} = mgh = mg(4 + \Delta x)\tan 30 \rightarrow E_{M(i)} = 2 \cdot 9,8 \cdot (4 + 1,37)\tan 30 = 60,767 \text{ J}$$

La fuerza de rozamiento que actúa en el descenso es:

$$fr = \mu \cdot mg \cdot \sin 30 \rightarrow fr = 0,2 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} = 1,96 \text{ N}$$

Y su trabajo (será negativo porque la fuerza se opone al desplazamiento 180°):

$$W_{fr} = fr \cdot d \rightarrow W_{fr} = -1,96 \cdot (4 + \Delta x)$$

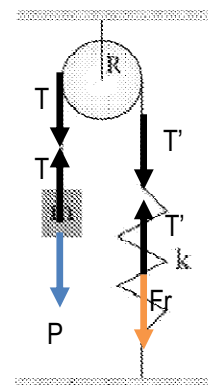
Es decir, la masa llega al muelle con una energía total resultante de:

$$E_{M(f)} = E_{M(i)} + W_{fr} \rightarrow E_{M(f)} = 60,767 - 1,96 \cdot (4 + \Delta x) = 52,927 - 1,96 \cdot \Delta x$$

Por lo que se comprimirá menos que en el primer apartado:

$$52,927 - 1,96 \cdot \Delta x = \frac{1}{2}k\Delta x^2 \rightarrow 0 = 50\Delta x^2 + 0,0392\Delta x - 1,0585 \rightarrow \Delta x = \frac{-0,0392 \pm \sqrt{0,0392^2 + 4 \cdot 50 \cdot 1,0585}}{2 \cdot 50} = 0,145 \text{ m}$$

• 1.— Se tiene el sistema que se muestra en la figura, en el que un bloque de masa m está unido, mediante una cuerda sin masa e inextensible, a un muelle de constante elástica k a través de una polea, que puede considerarse como un disco macizo uniforme de radio R y masa M (momento de inercia respecto a un eje perpendicular que pasa por su centro, $I = MR^2/2$). La polea está fijada al techo y el muelle al suelo. Se supone, además, que la cuerda no desliza sobre la polea.



- (a) En primer lugar, se deja descender suavemente el bloque hasta que el sistema se encuentra en equilibrio. Encontrar la expresión que nos da cuánto se ha estirado el muelle, x_e .
- (b) A partir de la situación de equilibrio mencionada en el apartado anterior, se desplaza hacia abajo el bloque una distancia A y después se suelta, de forma que se inicia un movimiento oscilatorio. ¿Cuál es la aceleración del bloque en ese momento?

(c) Calcular el periodo del movimiento oscilatorio anterior.

(Datos numéricos: $m = 1$ kg, $k = 200$ N/m, $M = 1$ kg, $A = 3$ cm, $g = 9,8$ m/s²).

a) En el equilibrio y en reposo encontramos el siguiente balance de fuerzas expresado gráficamente en el diagrama del dibujo:

- 1) Un peso que es equilibrado por la tensión de la cuerda, que se transmite por la cuerda inextensible.
- 2) Una fuerza de recuperación del muelle que iguala a la tensión de la cuerda

$$P - T = m \cdot a \rightarrow (a = 0) \text{ y } P = T$$

$$(\alpha = 0) \rightarrow T = F_r \rightarrow T = \frac{1}{2} k \Delta y^2 \rightarrow \Delta y = \sqrt{\frac{2T}{K}} = \sqrt{\frac{2mg}{K}}$$

b) A partir de un desplazamiento A , el sistema inicia la primera oscilación: (**Ecuación de la masa**)

$$(1) P - T = m \cdot a \rightarrow T = P - m \cdot a$$

Las tensiones a ambos lados de la polea no son iguales al considerar la rotación de la polea; esto significa que el disco de la polea girará por el momento generado por la diferencia de ambas tensiones (**Ecuación de la polea**):

$$(2) (T - T') \cdot R = I \cdot \alpha \rightarrow (T - T') \cdot R = \frac{MR^2}{2} \cdot \frac{a}{R} \rightarrow T - T' = \frac{1}{2} Ma$$

El desplazamiento A inicial nos proporciona el valor de la fuerza con la que el muelle quiere recuperarse (**Ecuación del muelle**):

$$(3) T' - F_r = m \cdot a \rightarrow T' - k \cdot A = 0 \rightarrow T' = k \cdot A; \text{ se anula al no tener masa el muelle}$$

Calculamos la aceleración lineal del sistema, sustituyendo el valor de las dos tensiones en la expresión (2):

$$P - m \cdot a - k \cdot A = \frac{1}{2} Ma \rightarrow P - k \cdot A = \frac{1}{2} Ma + ma \rightarrow 2(P - k \cdot A) = Ma + 2ma \rightarrow a = \frac{2(mg - k \cdot A)}{M + 2m}$$

c.. El periodo de oscilación del muelle podemos obtenerlo fácilmente a partir del teorema de conservación de la energía mecánica. Cuando alargamos una distancia A , el mecanismo acumula energía potencial elástica en el muelle que, una vez libre irá transmitiéndose como energía cinética de traslación de la masa y energía cinética de rotación de la polea de manera que se cumplirá:

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Teniendo en cuenta que, al ser una cuerda inextensible se verifica siempre: $v = \omega \cdot R$

$$\frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} m (\omega \cdot R)^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 \rightarrow k A^2 = (m R^2 + I) \omega^2 \rightarrow \omega = A \sqrt{\frac{k}{m R^2 + I}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{A} \sqrt{\frac{m R^2 + I}{k}} = \frac{2\pi R}{A} \sqrt{\frac{2m + M}{2k}}$$