Tema3
Estática

UNED
Juan Neftalí Morillo García

Axiomas

1. Un cuerpo, o un punto material, permanece en equilibrio cuando no actúan fuerzas sobre él.
2. Cuando sobre un cuerpo, o un punto material, actúan únicamente dos fuerzas de igual módulo y recta de acción pero de sentidos opuestos, aquél permanece en equilibrio. (sometido a un sistema de fuerzas equivalente a cero, está en equilibrio).
3. Si sobre un cuerpo, o un punto material, actúan dos fuerzas concurrentes, el equilibrio no se altera si se sustituyen por una única fuerza cuya dirección y sentido coincida con los de la diagonal del paralelogramo construido sobre aquellas dos corno lados y tornada a partir del origen común. Es decir, la resultante, de dos fuerzas aplicadas a un punto material es igual a la suma vectorial de dichas fuerzas. (Regla del paralelogramo de fuerzas.)
4. Toda acción de un punto o sistema de puntos materiales sobre otro da lugar a una reacción de éste de igual módulo pero de sentido opuesto. En el caso de l**a tercera ley las fuerzas no forman un sistema en equilibrio** ya que están aplicadas en **puntos** o sistemas **diferentes**.
5. El estado de equilibrio de un cuerpo no se altera cuando se desplaza el punto de aplicación de la fuerza a otro punto situado sobre su línea de acción. (Principio de transmisibilidad.)

F. de ligadura y Equilibrio del punto libre

La fuerza con la que la ligadura actúa sobre el sistema restringiendo sus desplazamientos se llama reacción de ligadura y está siempre dirigida en el sentido opuesto a aquél en el que la ligadura impide el desplazamiento

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a} = 0 = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U$$

$$\left.\begin{aligned} \sum F_{xi} &= 0 \\ \sum F_{yi} &= 0 \\ \sum F_{zi} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Superficie sin rozamiento

Si la ecuación de la superficie en coordenadas cartesianas es

$$f(x, y, z) = 0$$

$$\vec{F} + \vec{R} = 0$$

$$\vec{R} = \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}} f$$

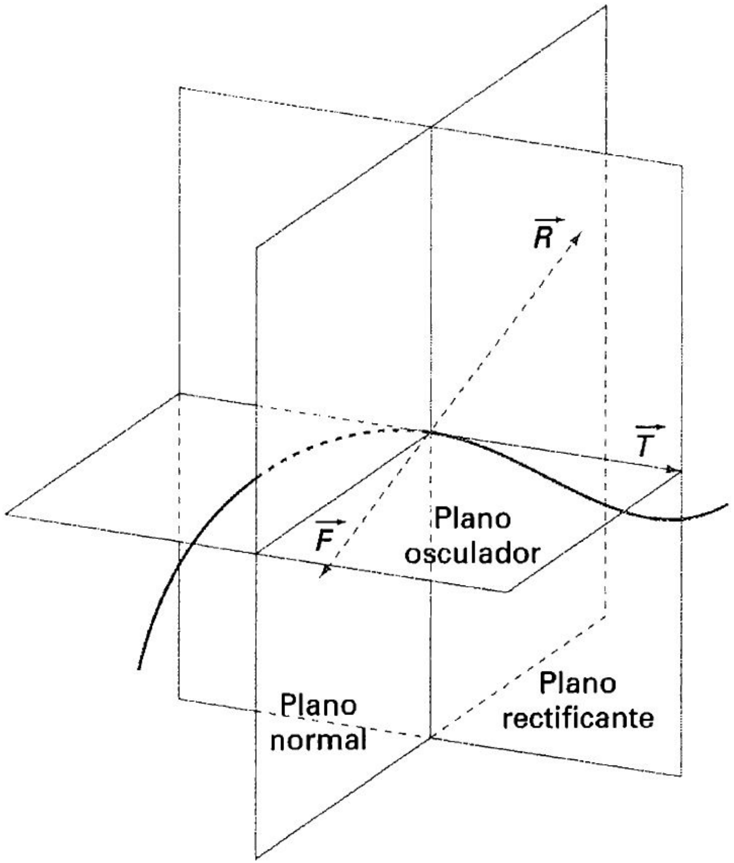
$$F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad \vec{F} + \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}} f = 0$$

$$F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Punto material libre en una línea

$$x = x(u)$$
$$y = y(u)$$
$$z = z(u)$$



Punto material libre en una línea

$$x = x(u)$$
$$y = y(u)$$
$$z = z(u)$$

$$\vec{T} = \dot{x}(u)\vec{i} + \dot{y}(u)\vec{j} + \dot{z}(u)\vec{k}$$

La condición necesaria y suficiente para que haya equilibrio

$$\vec{T} \cdot \vec{F} = 0$$

$$F_x(u)\dot{x}(u) + F_y(u)\dot{y}(u) + F_z(u)\dot{z}(u) = 0$$

$$U(u) = -\int f(u)du$$

coordenadas del punto de equilibrio

$$R_x = F_x(u_0),\ R_y = F_y(u_0),\ R_z = F_z(u_0)$$

$$\frac{dU}{du} = 0$$

Punto material libre en una línea

Curva dada como intersección de dos superficies

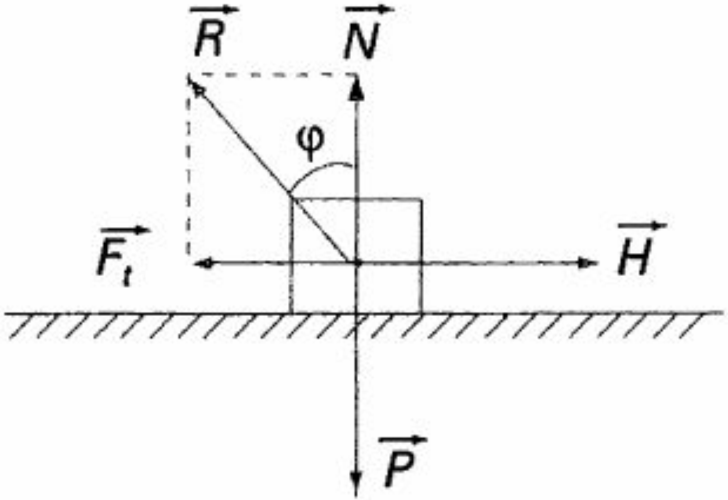
$$f(x, y, z) = 0$$
$$g(x, y, z) = 0$$

$$\vec{F} + \lambda\, \overrightarrow{\text{grad}}\, f + \mu\, \overrightarrow{\text{grad}}\, g = 0$$

$$\left.\begin{aligned} F_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \mu \frac{\partial g}{\partial x} &= 0 \\ F_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} + \mu \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 \\ F_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} + \mu \frac{\partial g}{\partial z} &= 0 \\ f(x, y, z) &= 0 \\ g(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} x_0, y_0, z_0, \lambda, \mu$$

Rozamiento

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_r$$



$$\nu \leq \mu$$

Estático:

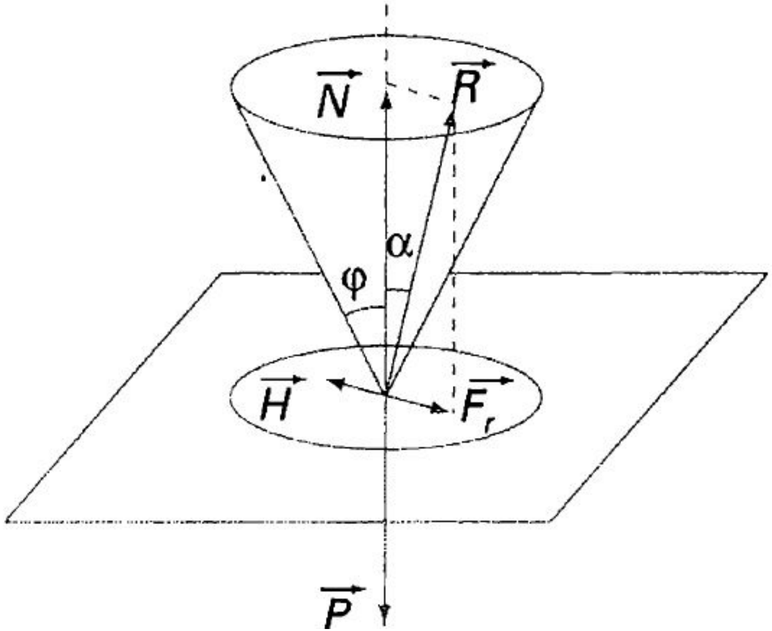
$$\frac{F_r}{N} \leq \operatorname{tg} \varphi = \mu$$

Dinámico:

$$F_r = \nu N$$

Rozamiento

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_r$$



$$\nu \leq \mu$$

<u>Estático:</u>

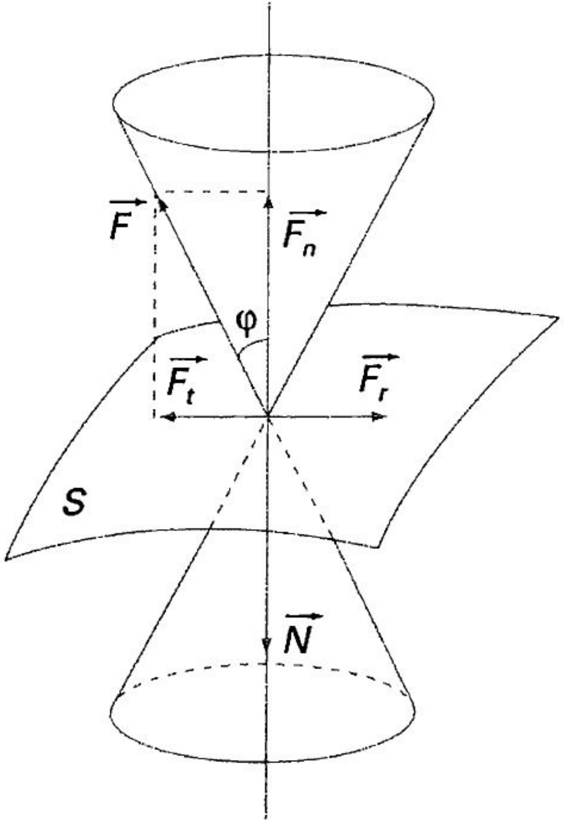
$$\frac{F_r}{N} \leq \operatorname{tg} \varphi = \mu$$

<u>Dinámico:</u>

$$F_r = \nu N$$

Equilibrio en Sup. con rozamiento

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F_r} = 0$$



Habrá equilibrio cuando la resultante de las fuerzas exteriores sea interior o a lo sumo esté contenida en el cono de rozamiento

$$F_r \leq \mu N \qquad F_t \leq \mu F_n$$

$$\mu \geq \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{F_t}{F_n} \quad \leq \mu$$

$$\mu = \mathrm{tg}\,\varphi \qquad \alpha \leq \varphi$$

Sólido Rígido

P_i

Un sistema de puntos materiales se define como un conjunto discreto o continuo de puntos materiales. Se dice que es un sólido o cuerpo rígido cuando las distancias entre los puntos del sistema permanecen invariables

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i = 0$$

ecuaciones cardinales de la Estática

Sólido Rígido

P_i

Un sistema de puntos materiales se define como un conjunto discreto o continuo de puntos materiales. Se dice que es un sólido o cuerpo rígido cuando las distancias entre los puntos del sistema permanecen invariables

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i = 0$$

ecuaciones cardinales de la Estática

$$\sum F_{xi} = 0; \quad \sum F_{yi} = 0; \quad \sum F_{zi} = 0$$

$$\sum M_{xi} = 0; \quad \sum M_{yi} = 0; \quad \sum M_{zi} = 0$$

6 grados de libertad

Sólido Rígido

P_i

Un sistema de puntos materiales se define como un conjunto discreto o continuo de puntos materiales. Se dice que es un sólido o cuerpo rígido cuando las distancias entre los puntos del sistema permanecen invariables

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i = 0$$

ecuaciones cardinales de la Estática

$$\sum F_{xi} = 0; \quad \sum F_{yi} = 0; \quad \sum F_{zi} = 0$$

$$\sum M_{xi} = 0; \quad \sum M_{yi} = 0; \quad \sum M_{zi} = 0$$

6 grados de libertad

hipostático *isostáticos* *hiperestáticos* de orden n

Sólido Rígido

P_i

Un sistema de puntos materiales se define como un conjunto discreto o continuo de puntos materiales. Se dice que es un sólido o cuerpo rígido cuando las distancias entre los puntos del sistema permanecen invariables

$$\boxed{\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{act } i} + \sum \vec{R}_{\text{lig } j} &= 0 \\ \sum \vec{M}_{\text{act } i} + \sum \vec{M}_{\text{lig } j} &= 0 \end{aligned}}$$

$$\sum F_{xi} = 0; \quad \sum F_{yi} = 0; \quad \sum F_{zi} = 0$$

$$\sum M_{xi} = 0; \quad \sum M_{yi} = 0; \quad \sum M_{zi} = 0$$

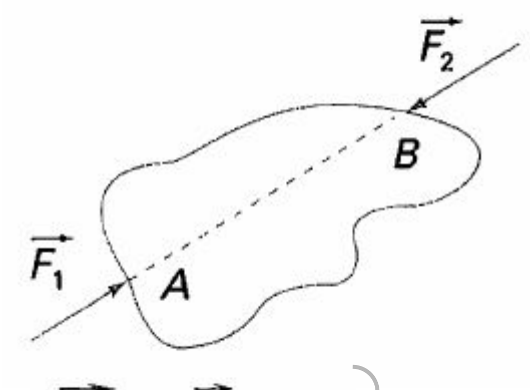
6 grados de libertad

ecuaciones cardinales de la Estática

hipostático *isostáticos* *hiperestáticos* de orden *n*

Sólido Rígido y fuerzas

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{BA} \times \vec{F}_1 = 0 \\ \vec{AB} \times \vec{F}_2 = 0 \end{array}\right\} \text{Son colineares además de paralelas}$$

Sólido Rígido y fuerzas

3 Fuerzas:

a) *Dos fuerzas son* concurrentes

En este caso la tercera fuerza también tendrá que ser concurrente con las otras dos fuerzas. En efecto, supuestas las dos primeras sumadas y hallada su resultante, para que exista equilibrio la tercera fuerza ha de ser igual y opuesta a la resultante, es decir, concurrente con las dos primeras.

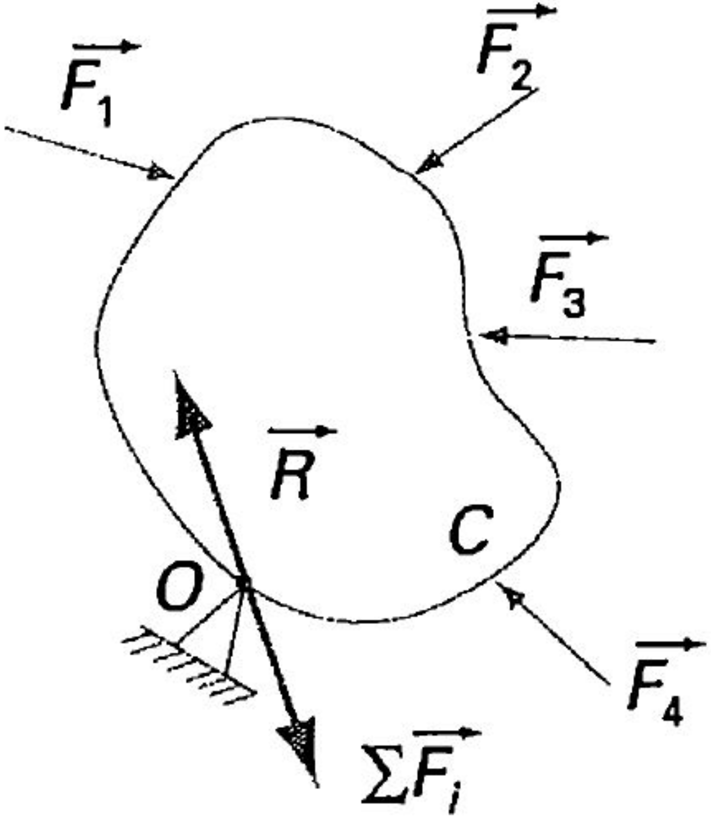
Sólido Rígido y fuerzas

3 Fuerzas:

b) *Las tres fuerzas son paralelas*

Las tres fuerzas deberán cumplir las condiciones de equilibrio, por lo que, de la nulidad de la resultante, se deduce que dos de ellas tendrán el mismo sentido y la tercera el contrario y su módulo será igual a la suma de las otras dos. De la condición de nulidad del momento resultante se deduce, además, que la tercera fuerza habrá de encontrarse entre las otras dos y que las distancias a las que se encuentra de los dos primeras fuerzas son inversamente proporcionales a los módulos de éstas.

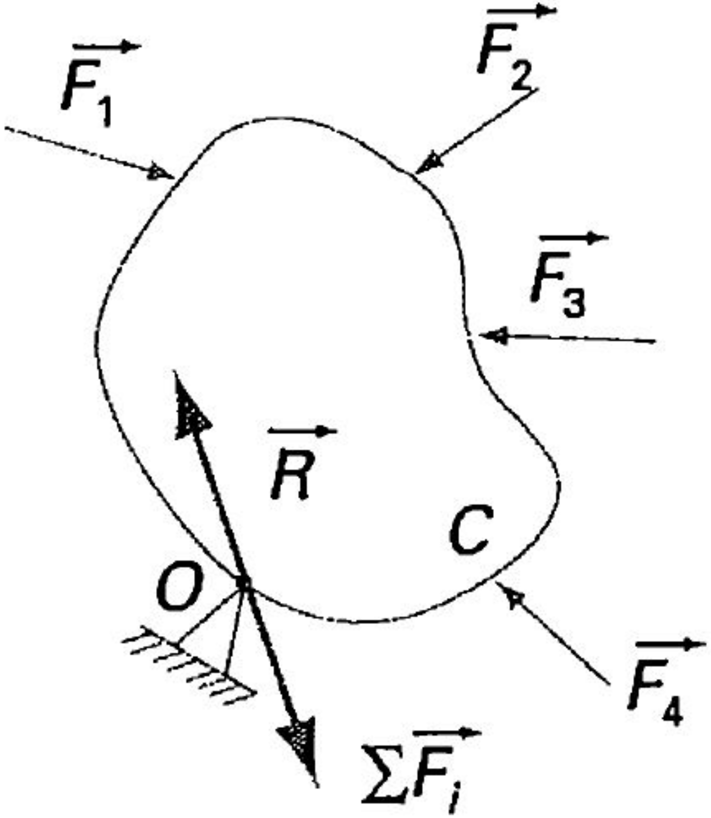
Sólido Rígido con 1 punto fijo



$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{R} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i + \vec{M}_{\mathrm{lig}} = 0$$

Sólido Rígido con 1 punto fijo

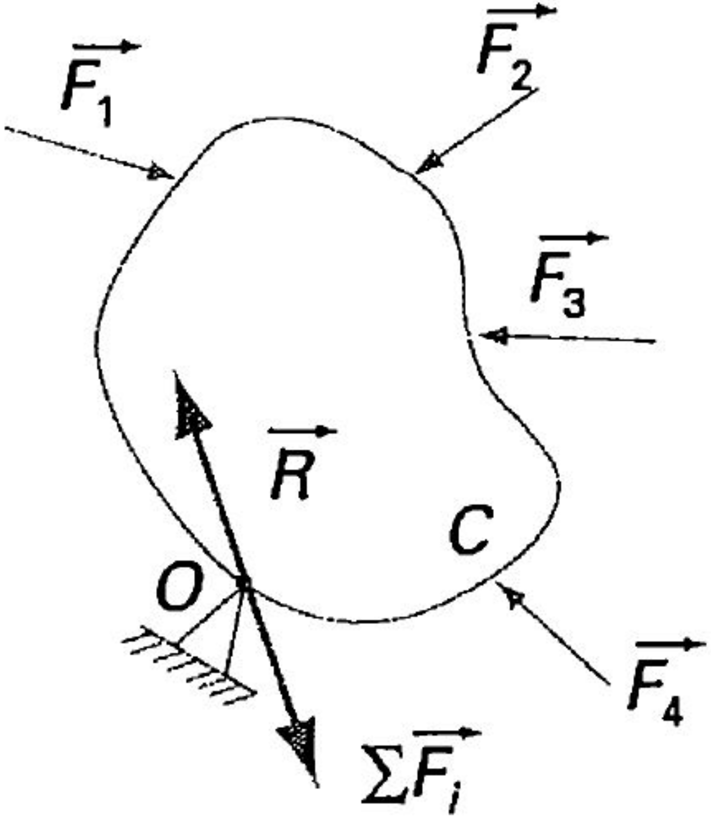


$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i + \vec{R} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

$\vec{M}_{\text{lig}} = 0,$ Origen en el punto de ligadura

Sólido Rígido con 1 punto fijo

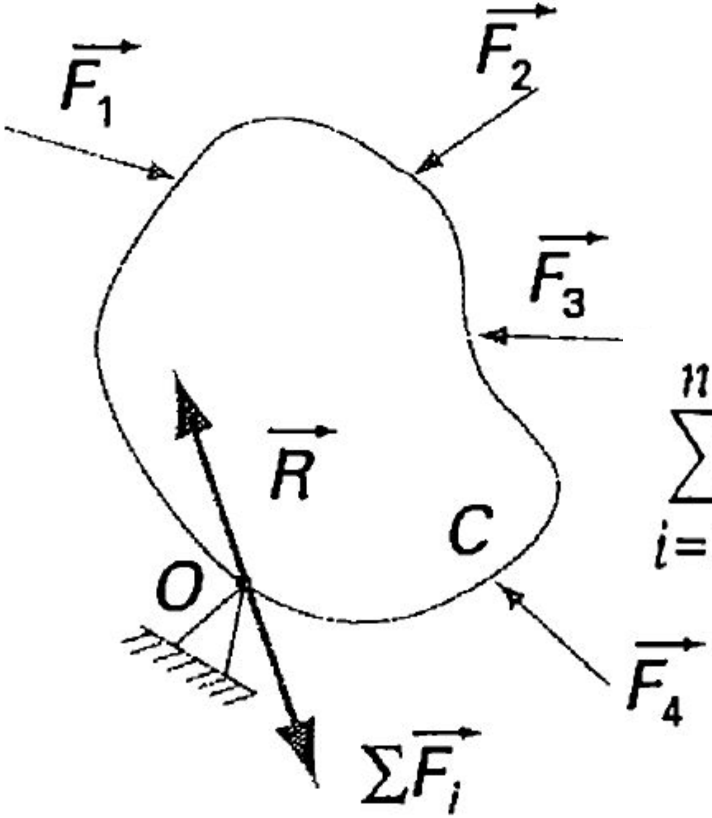


$$\vec{R} = -\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$$

$\vec{M}_{\text{lig}} = 0,$ Origen en el punto de ligadura

Sólido Rígido con 1 punto fijo

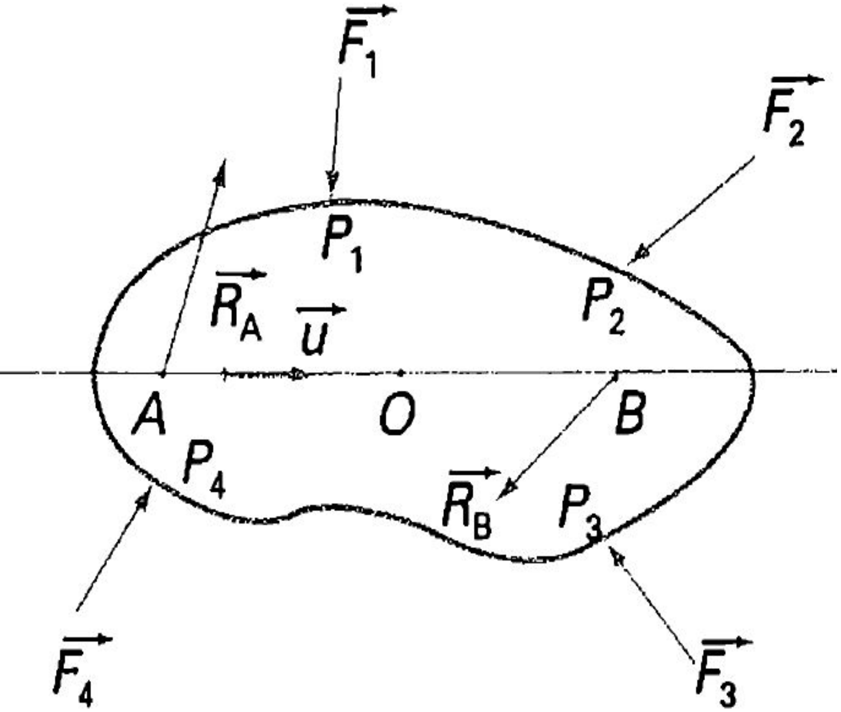


$$\vec{R} = -\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0; \; \sum_{i=1}^{n} M_{yi} = 0; \; \sum_{i=1}^{n} M_{zi} = 0$$

$\vec{M}_{\text{lig}} = 0,$ Origen en el punto de ligadura

Sólido Rígido con Recta Fija



Proyectamos las fuerzas de ligadura de dos puntos de la recta sobre la misma dado que una rotación con esta como eje es lo único posible

$$\sum_{i=1}^{n} (\overrightarrow{OP}_i \times \vec{F}_i) \cdot \vec{u} + (\overrightarrow{OA} \times \vec{R}_A) \cdot \vec{u} + (\overrightarrow{OB} \times \vec{R}_B) \cdot \vec{u} = 0$$

Sólido Rígido con Recta Fija

Supongamos ahora que la recta AB coincide con el eje OX de un sistema cartesiano fijo de referencia. Calculando los momentos respecto al punto A se tiene:

$$\sum_{i=1}^{n} M_{xi} = 0$$

Hiperestático

$$\sum_{i=1}^{n} M_{yi} + (\vec{R}_B \times \overrightarrow{BA}) \cdot \vec{j} = 0$$

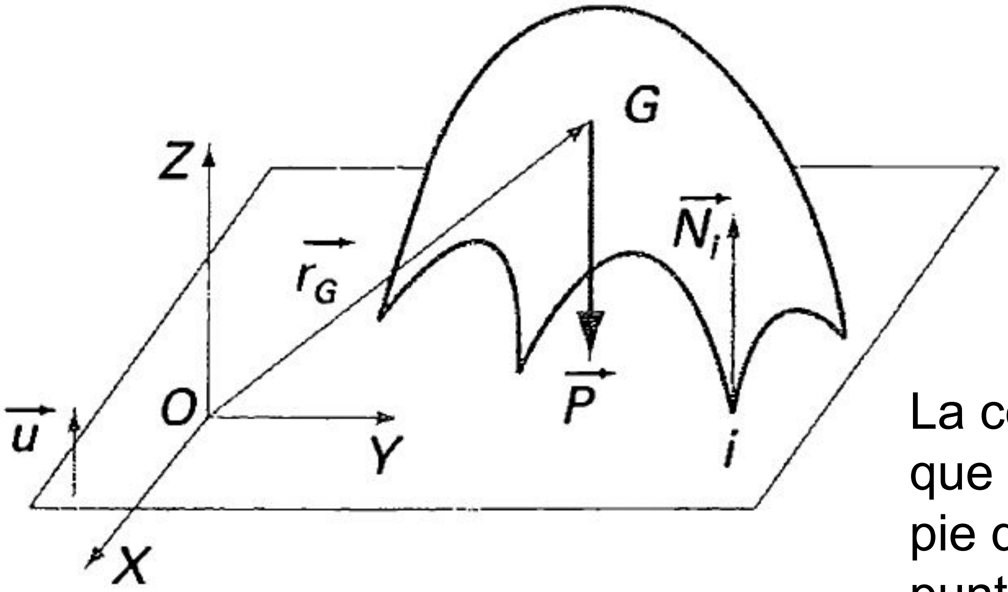
$$\sum_{i=1}^{n} M_{zi} + (\vec{R}_B \times \overrightarrow{BA}) \cdot \vec{k} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{xi} + R_{Ax} + R_{Bx} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{yi} + R_{Ay} + R_{By} = 0$$

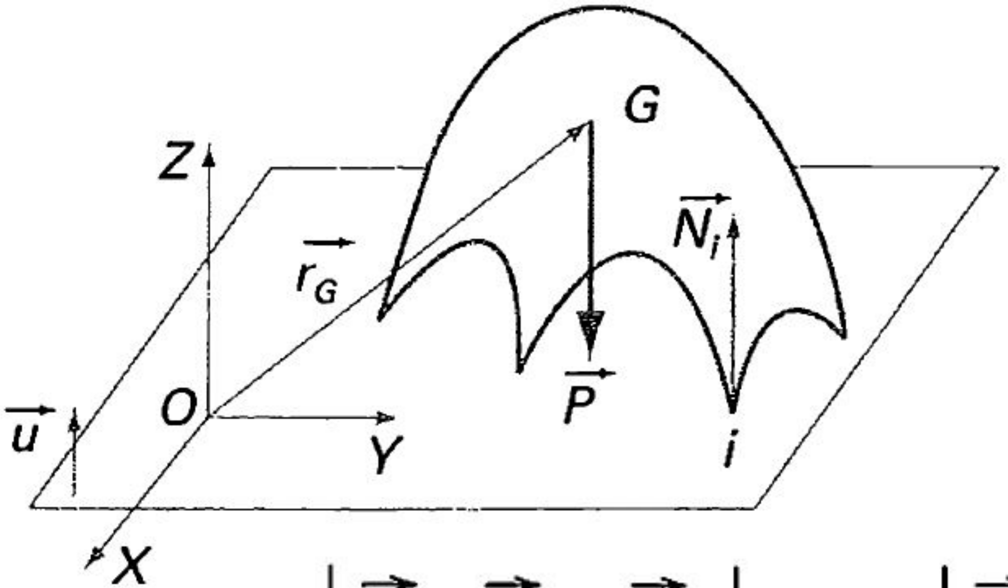
$$\sum_{i=1}^{n} F_{zi} + R_{Az} + R_{Bz} = 0$$

Sólido Rígido en Plano Horizontal sin Rozamiento



La condición necesaria y suficiente para que el cuerpo esté en equilibrio es que el pie de la perpendicular bajada desde el punto G al plano esté dentro del mínimo recinto convexo situado en el plano que contenga a todos los puntos de apoyo del cuerpo.

Sólido Rígido en Plano Horizontal sin Rozamiento

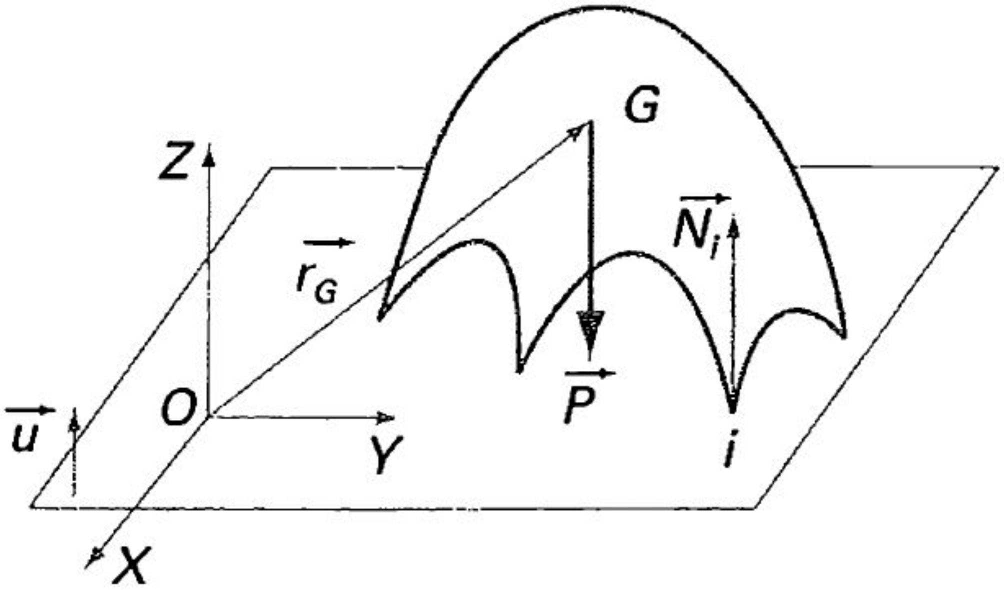


$$\vec{P} + \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i = 0$$

$$\vec{r}_G \times \vec{P} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{N}_i = 0$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_G & y_G & z_G \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} + \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_i & y_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{vmatrix} = 0$$

Sólido Rígido en Plano Horizontal sin Rozamiento

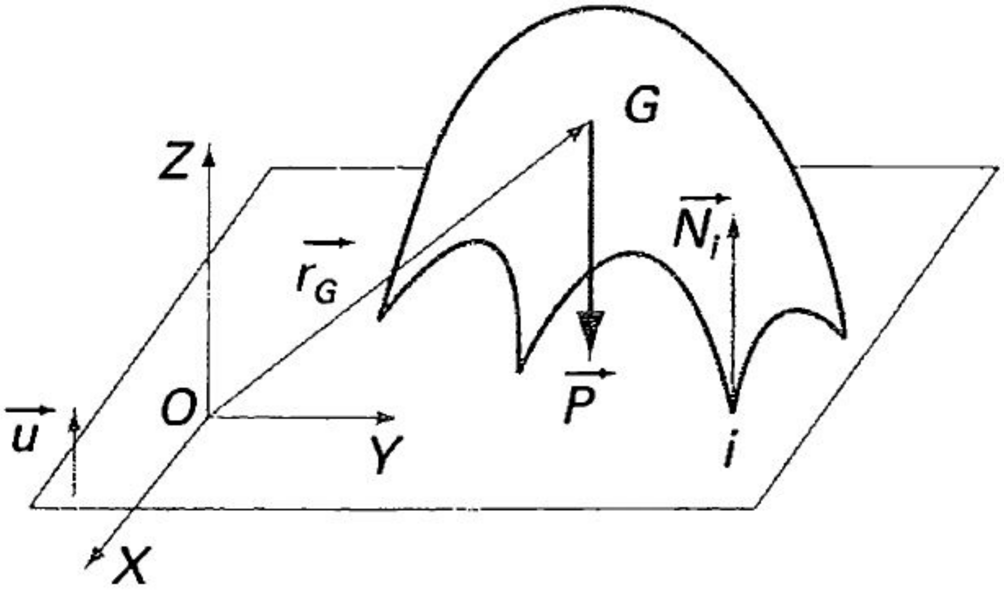


$$\vec{P} + \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i = 0$$

$$\vec{r}_G \times \vec{P} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{N}_i = 0$$

$$-P\, y_G \vec{i} + P\, x_G \vec{j} + \sum_{i=1}^{n} (N_i y_i \vec{i} - N_i x_i \vec{j}) = 0$$

Sólido Rígido en Plano Horizontal sin Rozamiento



$$\vec{P} + \sum_{i=1}^{n} \vec{N}_i = 0$$

$$\vec{r}_G \times \vec{P} + \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{N}_i = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} -P\, y_G + \sum_{i=1}^{n} N_i y_i = 0 \\ -P\, x_G + \sum_{i=1}^{n} N_i x_i = 0 \end{array}\right\}$$

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i}, \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} N_i}$$

Sólido Rígido apoyado en una superfície

$$d\vec{N} = p d\vec{S}$$

(En 1 Punto)

$$\vec{P} + \iint p d\vec{S} = 0$$

$$\vec{r}_G \times \vec{P} + \iint \vec{r} \times p d\vec{S} = 0$$

$$\vec{N} = \iint p d\vec{S}$$

(En 1 Superfície)

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$d\vec{S} = dS\vec{k}$$

Sólido Rígido apoyado en una superfície

$$d\vec{N} = pd\vec{S}$$

(En 1 Punto)

$$\vec{P} + \iint pd\vec{S} = 0$$

$$\vec{r}_G \times \vec{P} + \iint \vec{r} \times pd\vec{S} = 0$$

$$\vec{N} = \iint pd\vec{S}$$

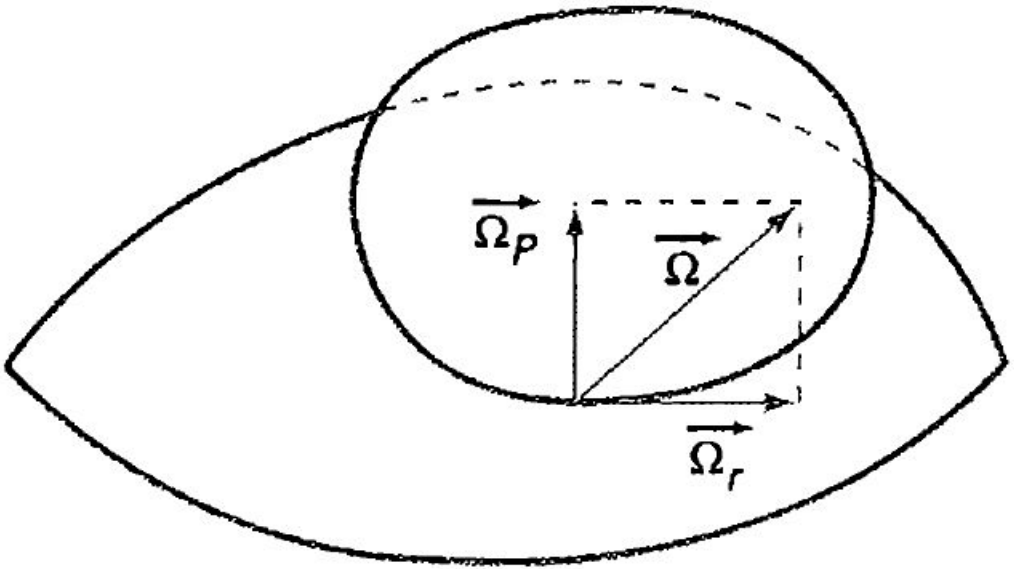
(En 1 Superfície)

$$-P\,y_G + \iint pydS = 0$$

$$P\,x_G - \iint pxdS = 0$$

$$-P + \iint pdS = 0$$

Rodadura y Pivotamiento



$$M_r = hF_n$$

$$M_p = kF_n$$

Máquinas

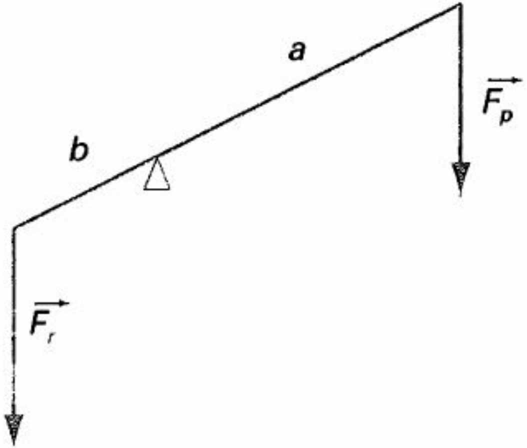
Para que un sistema de sólidos esté en equilibrio, deberá estar en equilibrio cada sólido individualmente considerado bajo la acción de todas las fuerzas que actúan sobre él: activas y de reacción.

Palancas, tornos, poleas, tornillos

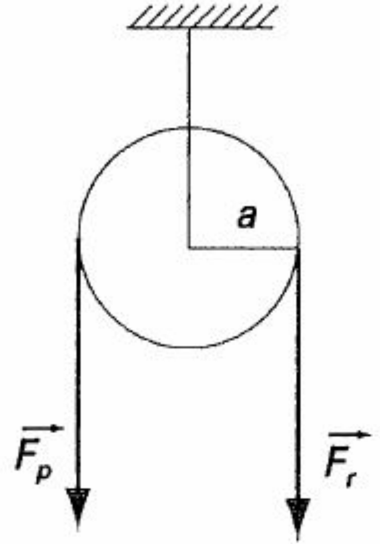
$$F_p a - F_r b = 0$$

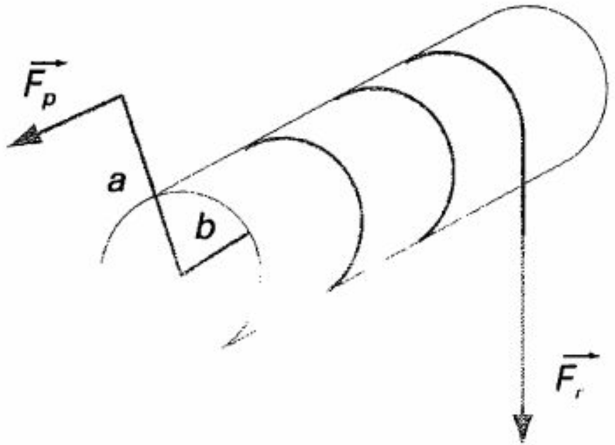
Máquinas

Palancas, tornos, poleas, tornillos



Palanca

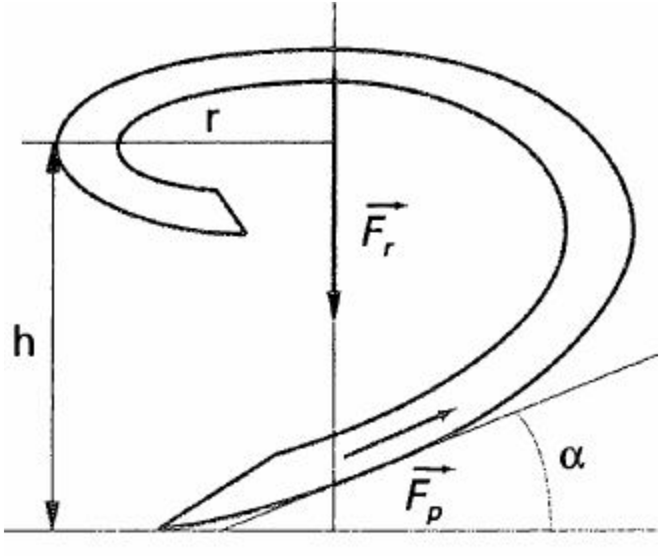




Torno

Máquinas

Palancas, tornos, poleas, tornillos



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi r}$$

$$F_p = F_r \operatorname{sen} \alpha$$

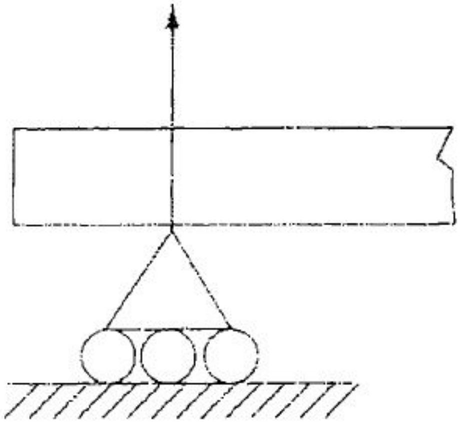
$$F_p = F_r \operatorname{tg} \alpha$$

$$\boxed{F_p = F_r \frac{h}{2\pi r}}$$

Máquinas

Vigas

El apoyo *móvil* (fig. 4.19) se caracteriza porque la reacción ha de ser normal al apoyo y no transmite ningún tipo de momento ya que puede girar libremente. Suele materializarse mediante rodillos cilíndricos sobre los que se apoya la viga.

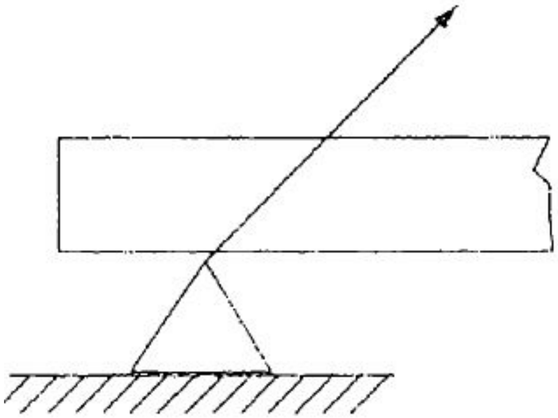


Apoyo móvil

Máquinas

Vigas

En el apoyo *fijo* la reacción puede tener cualquier dirección pero tampoco absorbe ningún momento. El extremo de la viga no puede desplazarse horizontalmente como sucedía en el caso anterior pero puede girar libremente.

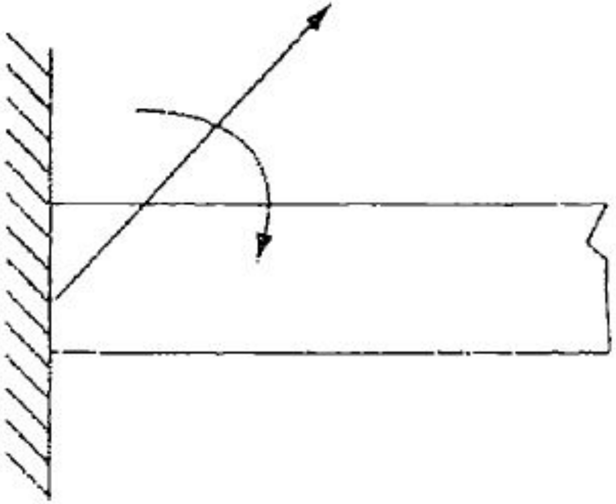


Apoyo fijo

Máquinas

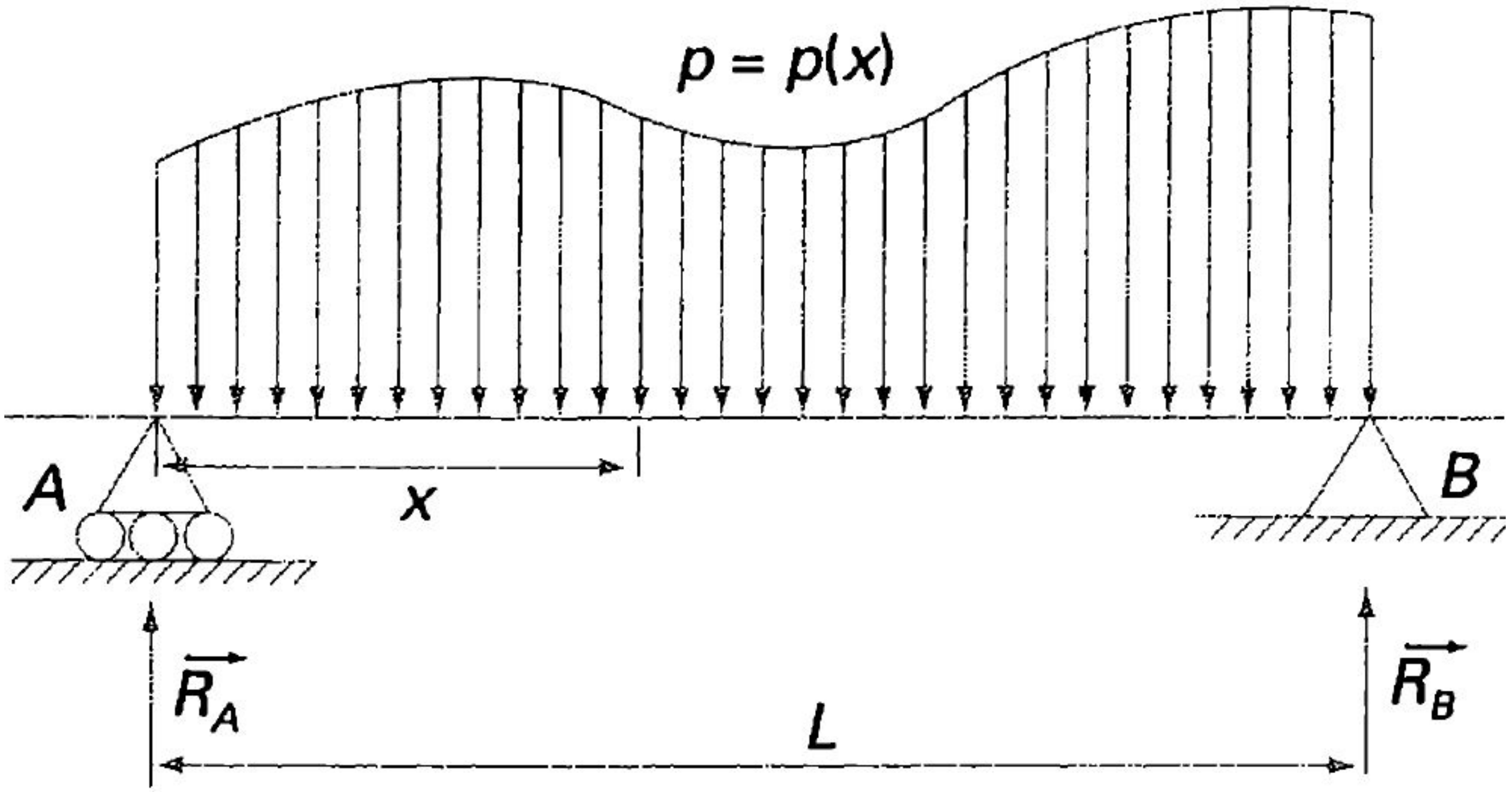
Vigas

Finalmente en un *empotramiento* la reacción puede tener cualquier dirección y además puede absorber momentos. El extremo de la viga no puede girar ni desplazarse.



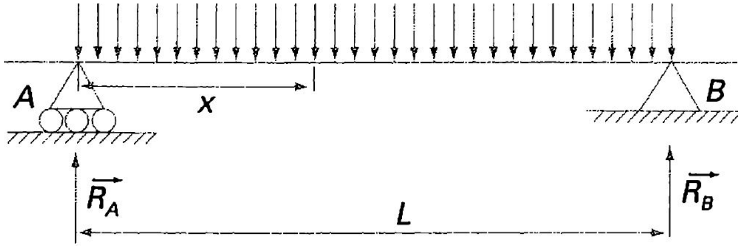
Empotramiento

Viga sobre fijo y móvil



Viga sobre fijo y móvil

Las ecuaciones generales de equilibrio, tomando momentos respecto al apoyo fijo, B, serán:



$$\sum_{i=1}^{n} H_i + R_{BH} = 0$$

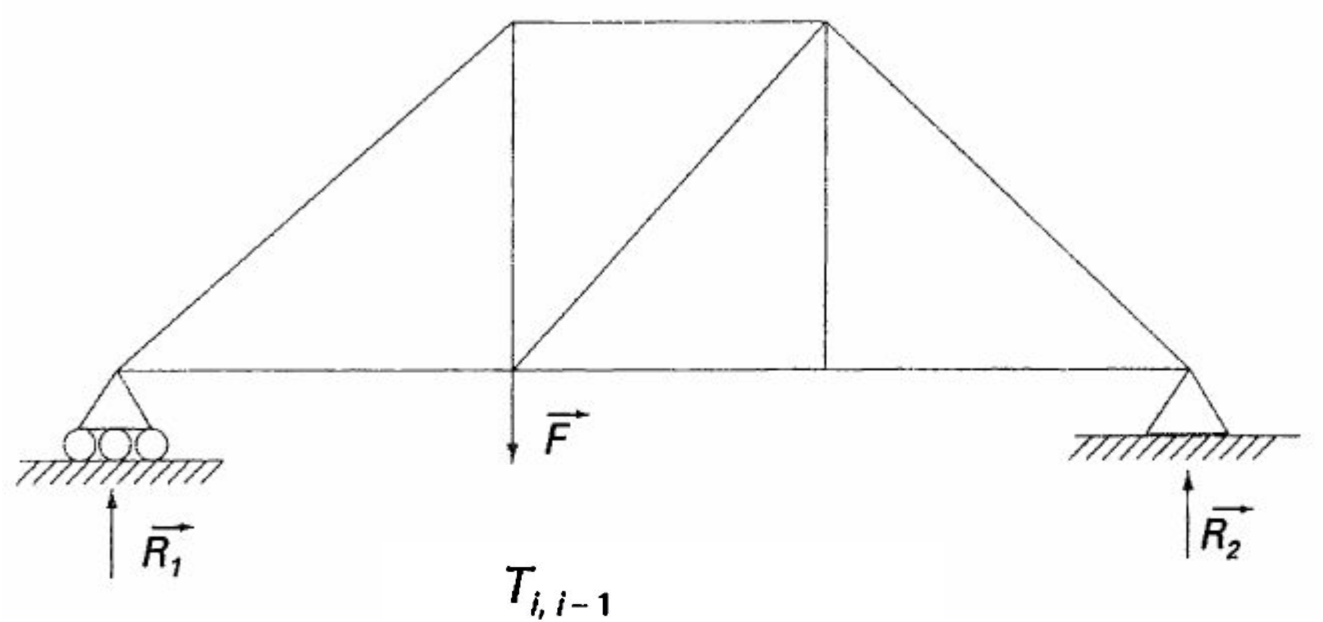
$$\sum_{i=1}^{n} V_i + R_{BV} + R_{AV} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} V_i x_i + R_{AV} L = 0$$

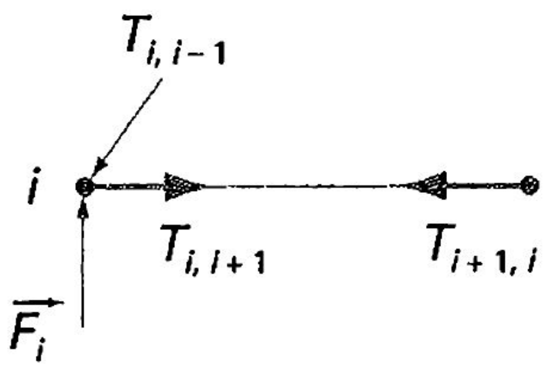
$$\int_0^L p(x)dx + R_A + R_B = 0$$

$$\int_0^L p(x)\, x\, dx - R_B L = 0$$

Entramados



Las fuerzas interiores que actúan sobre cada barra son siempre reducibles a fuerzas aplicadas en los nudos.



Entramados

1.° En cada nudo i deben equilibrarse las tensiones y la fuerza exterior (activa y vincular) aplicada, cumpliéndose que

$$\vec{T}_{i,\,i-1} + \vec{F}_i + \vec{T}_{i,\,i+1} = 0$$

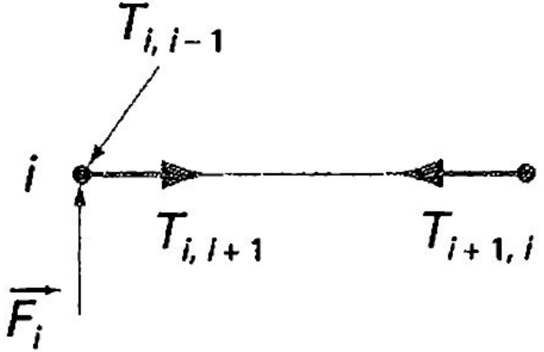
2.° Las tensiones que actúan sobre las barras, llevan la dirección de éstas, y verifican:

$$\vec{T}_{i,\,i+1} = -\vec{T}_{i+1,\,1}$$

3.° En los extremos del entramado se cumplirá:

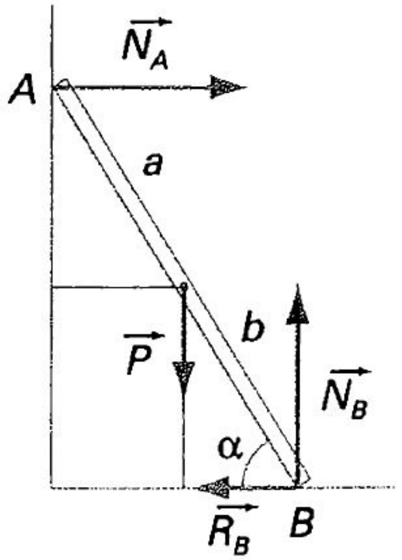
$$\vec{F}_0 + \vec{T}_{0,1} = 0$$

$$-\vec{T}_{n-1,\,n} + \vec{F}_n = 0$$

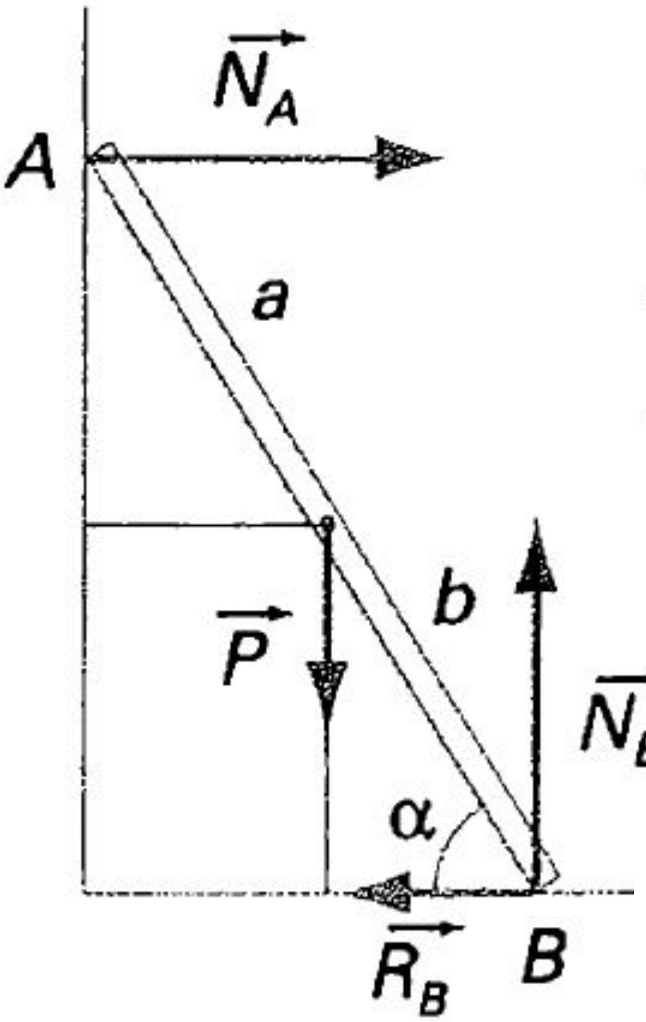


4.6 Una escalera no homogénea está apoyada en una pared vertical lisa y en un suelo horizontal rugoso de coeficiente de rozamiento μ. Su peso es P y su centro de gravedad se encuentra a una distancia a del extremo apoyado sobre la pared, y a una distancia b del extremo apoyado sobre el suelo. Determinar el menor ángulo para que la escalera permanezca en equilibrio.

4.6 Una escalera no homogénea está apoyada en una pared vertical lisa y en un suelo horizontal rugoso de coeficiente de rozamiento μ. Su peso es P y su centro de gravedad se encuentra a una distancia a del extremo apoyado sobre la pared, y a una distancia b del extremo apoyado sobre el suelo. Determinar el menor ángulo para que la escalera permanezca en equilibrio.



$$R_B \leq \mu N_B$$

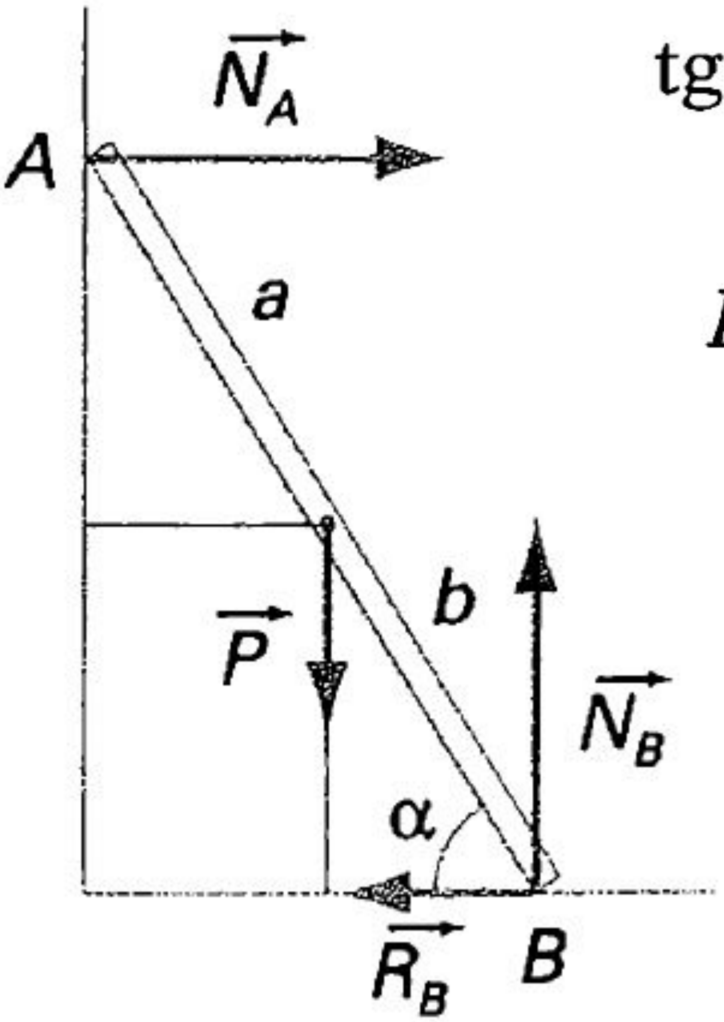


$$N_A - R_B = 0$$
$$N_B - P = 0$$
$$Pb\cos\alpha - N_A(a+b)\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$$

$$R_B \leq \mu N_B$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{Pb}{N_A(a+b)}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{N_B b}{R_B(a+b)} = \frac{b}{a+b}\,\frac{N_B}{R_B}$$



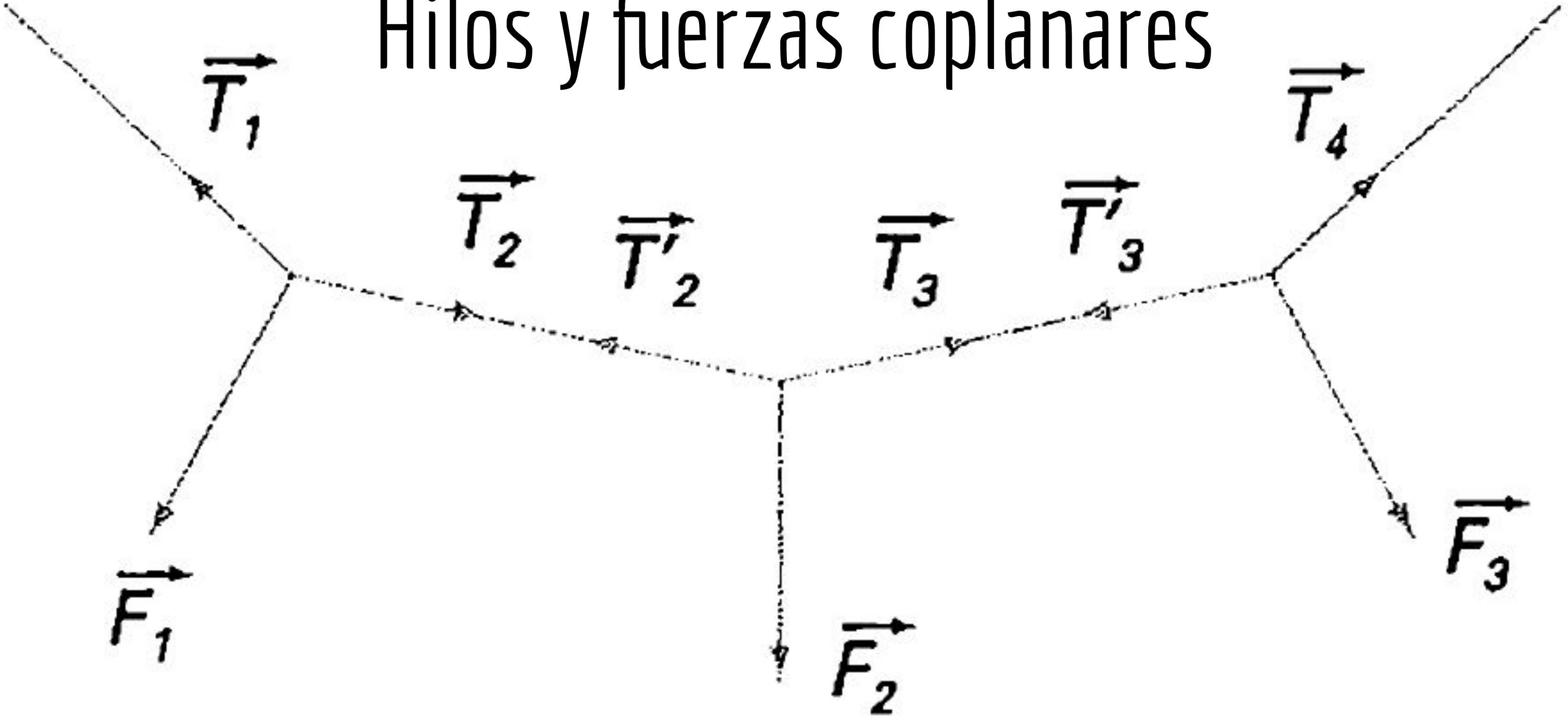
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{N_B b}{R_B(a+b)} = \frac{b}{a+b}\,\frac{N_B}{R_B}$$

$$R_B \le \mu N_B$$

$$\frac{N}{R_B} \ge \frac{1}{\mu}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \ge \frac{b}{a+b}\,\frac{1}{\mu}$$

Hilos y fuerzas coplanares



$$\vec{F}_1 + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = 0 \qquad \vec{F}_2 + \vec{T}_2' + \vec{T}_3 = 0$$

Hilos y fuerzas coplanares

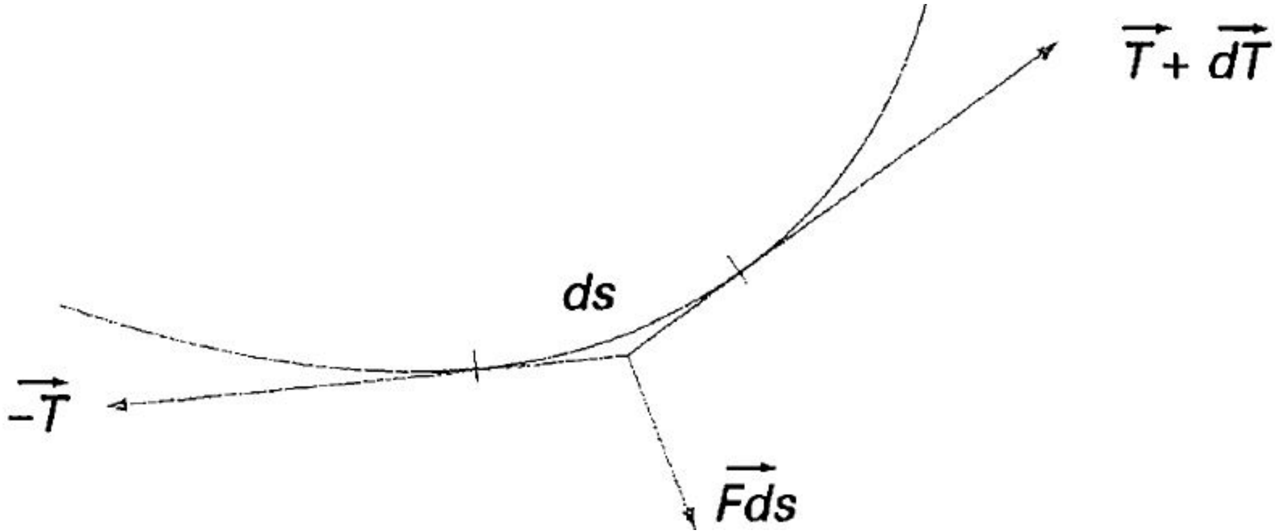
En efecto, considerando nuevamente la ecuación de equilibrio de un punto M (fig. 5.4):

$$\vec{F}_i + \vec{T}_{i-1} + \vec{T}_i = 0$$

Hilos y fuerzas continuas

En efecto, considerando nuevamente la ecuación de equilibrio de un punto M (fig. 5.4):

$$\vec{F}_i + \vec{T}_{i-1} + \vec{T}_i = 0$$

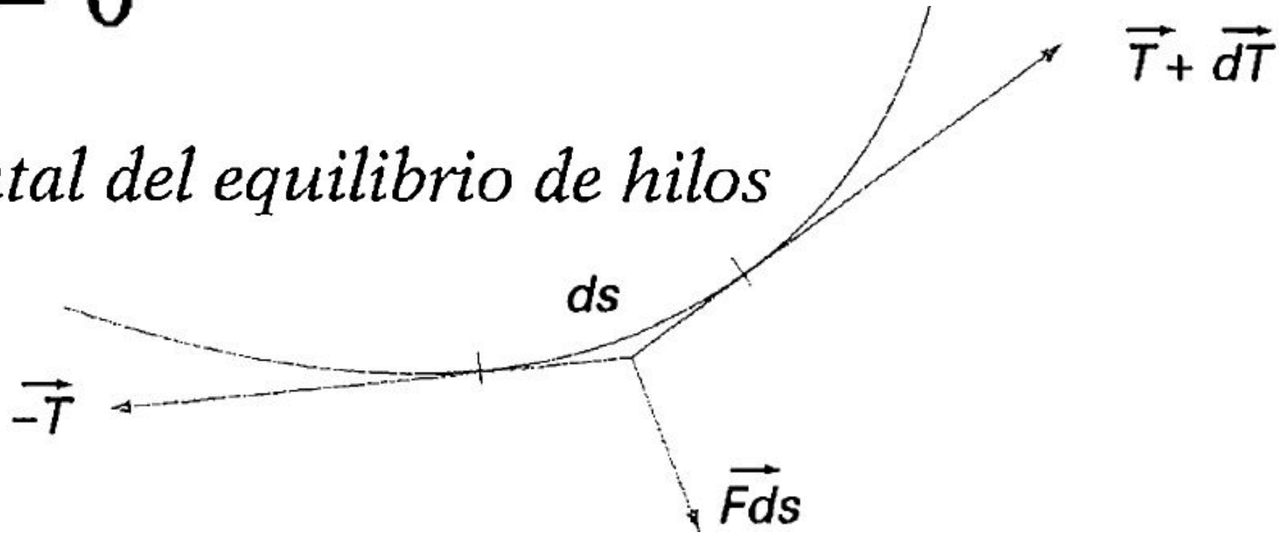


Hilos y fuerzas continuas

$$\vec{T} + d\vec{T} + \vec{F}ds - \vec{T} = 0$$

$$d\vec{T} + \vec{F}ds = 0$$

ecuación fundamental del equilibrio de hilos



Hilos y fuerzas continuas

$$d\vec{T} + \vec{F}\,ds = 0$$

$$\vec{T} = T\frac{dx}{ds}\vec{i} + T\frac{dy}{ds}\vec{j} + T\frac{dz}{ds}\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\left\{\begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + F_x ds &= 0 \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + F_y ds &= 0 \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + F_z ds &= 0 \end{aligned}\right.$$

Catenaria

$$d\vec{T} + \vec{F}\,ds = 0$$

Si suponemos que el peso actúa según la dirección del eje OZ, las componentes de éste según los ejes OX y OY serán nulas, y se tiene:

$$\left\{\begin{aligned} d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + F_x\,ds = 0 \\ d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + F_y\,ds = 0 \\ d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + F_z\,ds = 0 \end{aligned}\right.$$

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0; \qquad d\left(T\frac{dy}{ds}\right) = 0$$

$$T\frac{dx}{ds} = a; \qquad T\frac{dy}{ds} = b$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

$$b\,dx - a\,dy = 0$$

Catenaria

$$d\vec{T} + \vec{F}\,ds = 0$$

Elegiremos x e y. El eje OX sigue siendo el mismo y el eje OY coincide ahora con el anterior OZ.

$$b\,dx - a\,dy = 0$$

$$bx - ay = c$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a}$$

$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) = 0$$

$$T\frac{dx}{ds} = T_0$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + F_y\,ds = 0$$

$$d\left(T_0\frac{ds}{dx}\frac{dy}{ds}\right) + F_y\,ds = 0$$

$$T_0 d\left(\frac{dy}{dx}\right) + F_y\,ds = 0$$

Catenaria

$$d\vec{T} + \vec{F}ds = 0$$

Elegiremos x e y. El eje OX sigue siendo el mismo y el eje OY coincide ahora con el anterior OZ.

$$T_0 d\left(\frac{dy}{dx}\right) + F_y ds = 0$$

y sustituyendo ds por su expresión en cartesianas:

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

queda:

$$T_0 dy' - p\sqrt{1 + y'^2}\, dx = 0$$

$$\arg\operatorname{sh} y' = \frac{p}{T_0}x + C$$

Catenaria

$$d\vec{T} + \vec{F}\,ds = 0$$

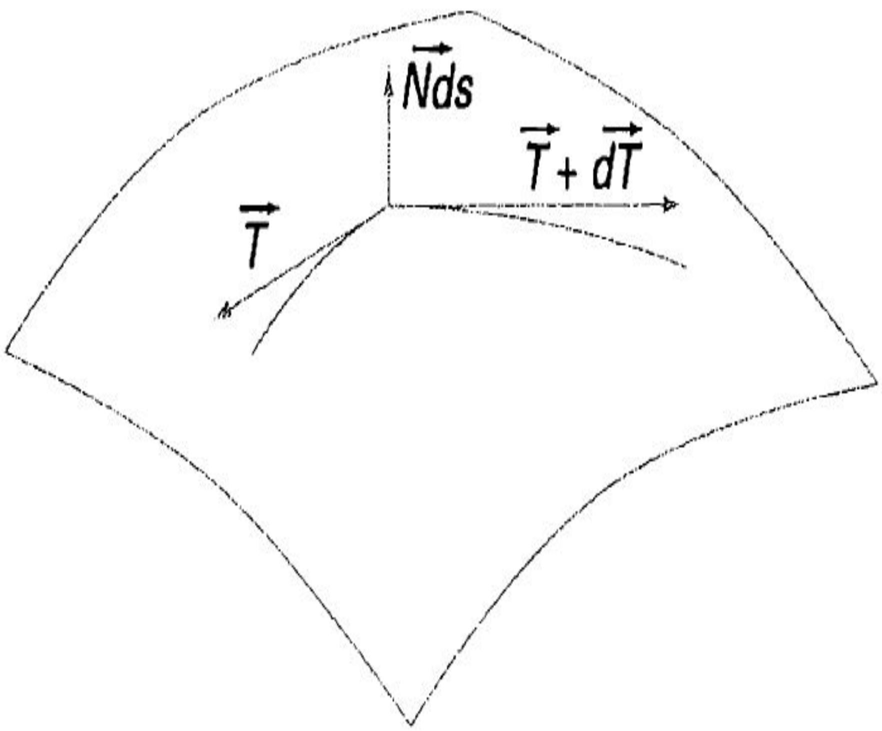
Elegiremos x e y. El eje OX sigue siendo el mismo y el eje OY coincide ahora con el anterior OZ.

$$\arg\operatorname{sh} y' = \frac{p}{T_0}x + C$$

$$y' = \operatorname{sh}\frac{p}{T_0}x$$

$$y = \frac{T_0}{p}\operatorname{ch}\frac{p}{T_0}x + D$$

Hilo en superficie sin rozamiento



$$d\vec{T} + (\vec{F} + \vec{N})\, ds = 0$$

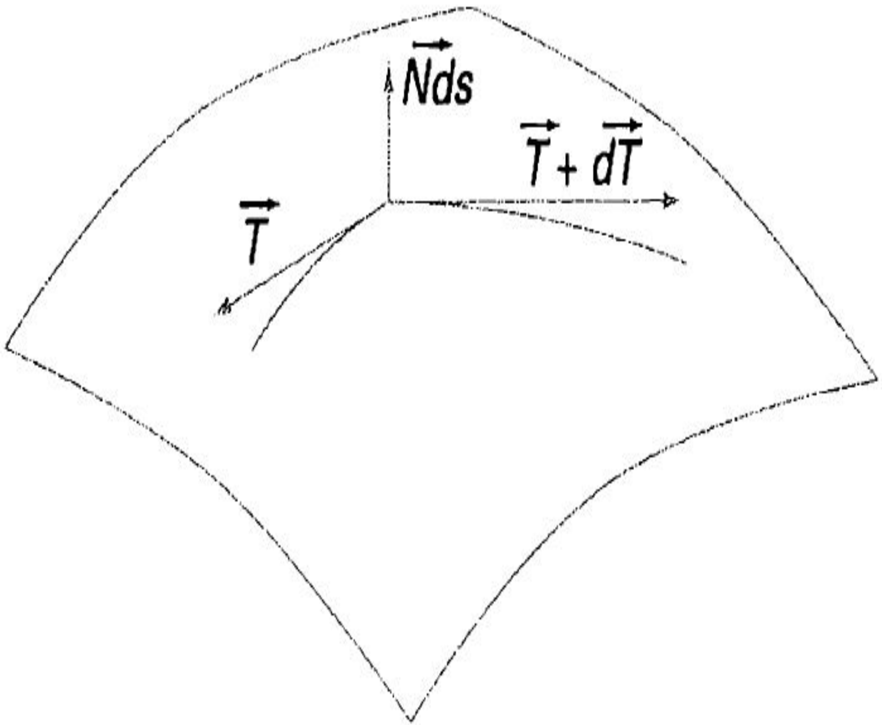
$$\vec{T} = T\frac{dx}{ds}\vec{i} + T\frac{dy}{ds}\vec{j} + T\frac{dz}{ds}\vec{k}$$

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$

$$\vec{N} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

Hilo en superficie sin rozamiento

$$f(x, y, z) = 0$$



$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1$$

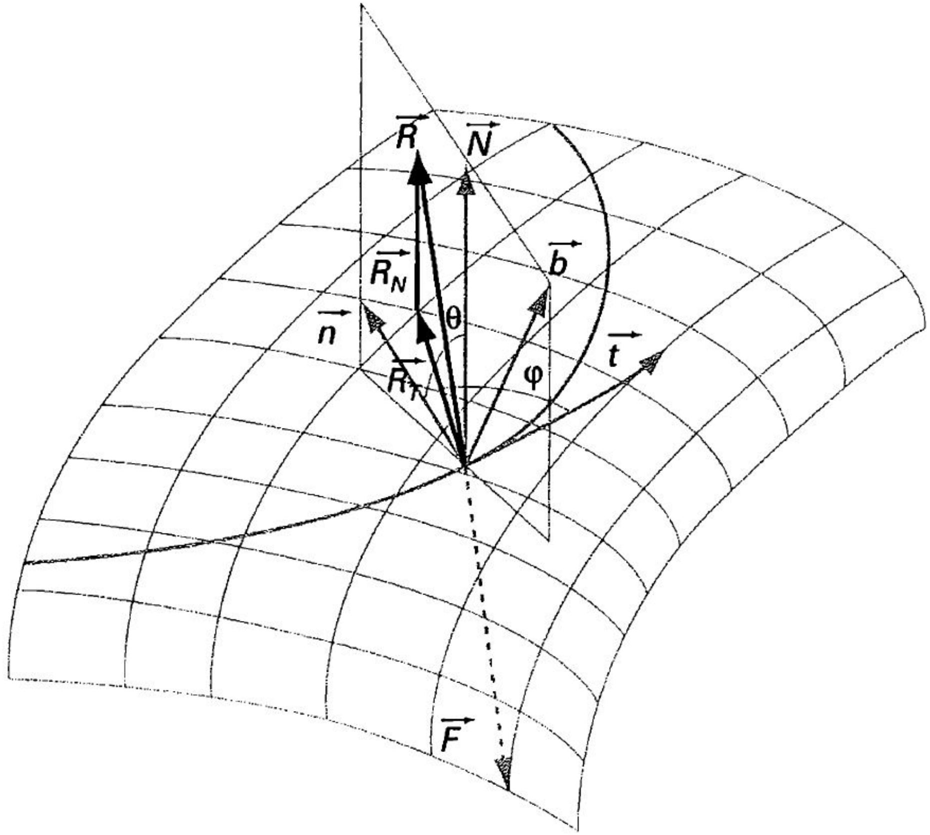
$$d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + F_x ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} ds = 0$$

$$d\left(T\frac{dy}{ds}\right) + F_y ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} ds = 0$$

$$d\left(T\frac{dz}{ds}\right) + F_z ds + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} ds = 0$$

Hilo en superficie con rozamiento

$$R_T \leq \mu R_N$$



θ es el ángulo formado por la normal principal a la curva y la normal a la superficie.

φ el ángulo que forma la componente tangente a la superficie con la tangente a la curva.

$$\frac{dT}{ds} + F_t + R_T \cos \varphi = 0$$

$$\frac{T}{\rho} + F_n + R_N \cos \theta + R_T \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta = 0$$

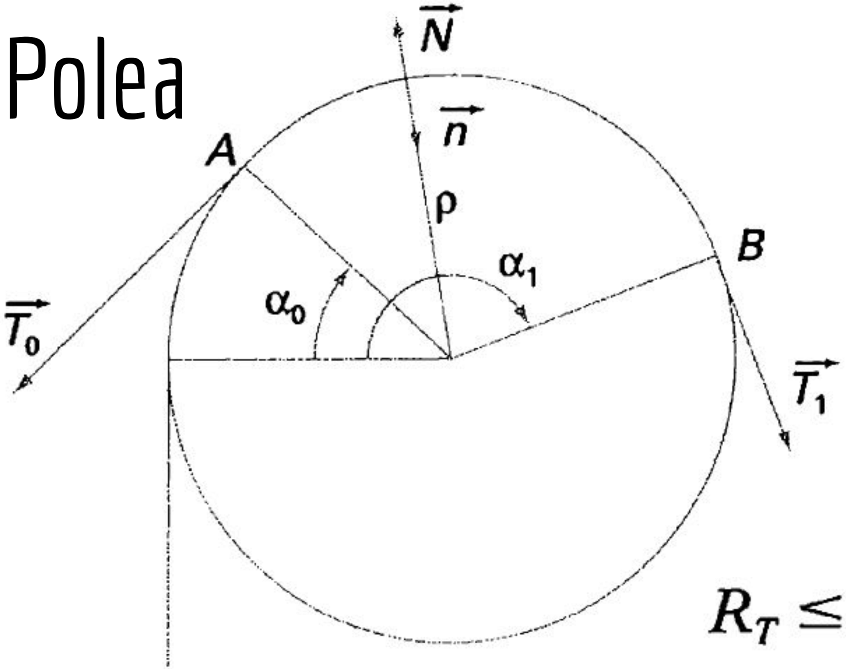
$$F_b + R_N \operatorname{sen} \theta + R_T \operatorname{sen} \varphi \cos \theta = 0$$

Polea

$$\theta = \pi \qquad \varphi = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dT}{ds} + F_t + R_T \cos\varphi = 0 \\ &\frac{T}{\rho} + F_n + R_N \cos\theta + R_T \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta = 0 \\ &F_b + R_N \operatorname{sen}\theta + R_T \operatorname{sen}\varphi \cos\theta = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\frac{dT}{ds} + R_T = 0 \\ &\frac{T}{\rho} - R_N = 0 \end{aligned}$$

Polea



$$R_T \le \mu R_N$$

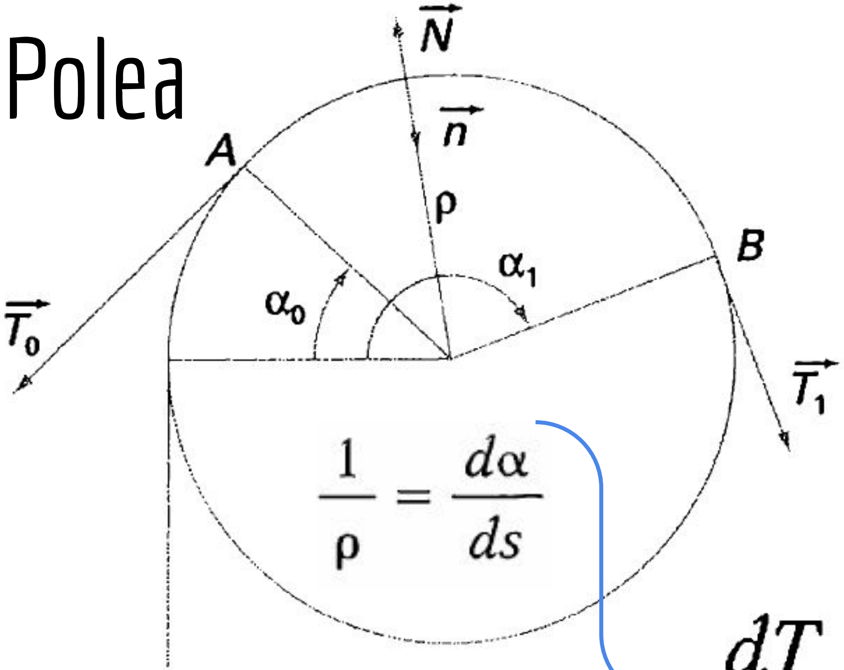
$$\boxed{\frac{dT}{ds} + R_T = 0 \qquad \left|\frac{dT}{ds}\right| \le \mu R_N}$$

$$\frac{T}{\rho} - R_N = 0 \qquad \frac{T}{\rho} - R_N = 0$$

$$\left|\frac{dT}{ds}\right| \le \mu \frac{T}{\rho}$$

$$\left|\frac{dT}{T}\right| \le \mu \frac{1}{\rho} ds$$

Polea



$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$$

$$\left| \frac{dT}{T} \right| \leq \mu \frac{1}{\rho} ds$$

$$\frac{dT}{T} = \mu d\alpha$$

$$\boxed{T_1 = T_0 e^{\mu(\alpha_1 - \alpha_0)}}$$