Curso 2021-2022

Presentación

Mecánica I

Mecánica I

1er Curso de Grado en Ingeniería Mecánica

Próxima sesión

Feb 23

Hora de inicio
18:45 h.
Duración
80 min.

Tipo

P+A
en Pinto AVIP Aula A5

Mecánica (I.Eléctrica / I.Electrónica / Tecnología Industrial)

Información de la Asignatura

Próxima sesión

Feb 23

Hora de inicio
18:45 h.
Duración
80 min.

Tipo

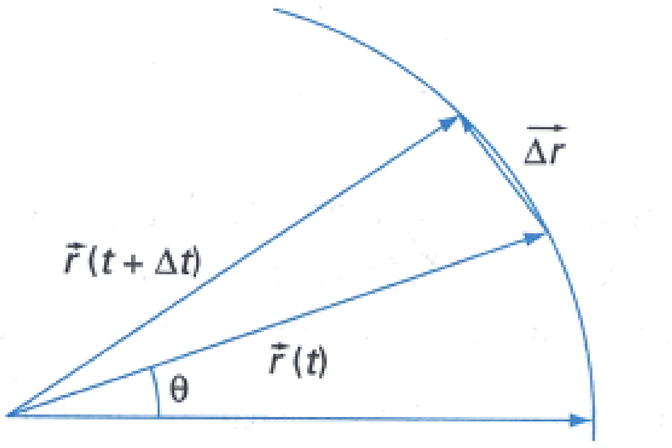
P+A
en Pinto AVIP Aula A5

D. Rodrigo Gómez Iglesias

rodgomez@madridsur.uned.es

Mecánica I
Dudas

1.7. Velocidad areolar



Sea $\vec{r}$ el vector de posición en el instante t y $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ el nuevo vector de posición en el instante $t+\Delta t$. El área barrida ΔS, por el vector de posición puede expresarse como el producto vectorial:

$$\Delta\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\Delta\vec{r})$$

y la velocidad areolar puede definirse del siguiente modo:

$$\overrightarrow{v_a} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\vec{r}\times\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v})$$

es decir: $\overrightarrow{v_a} = \frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{v})$

En el caso de movimiento en un plano la velocidad areolar será un vector perpendicular a dicho plano con el sentido correspondiente al producto vectorial y de módulo, en coordenadas polares planas:

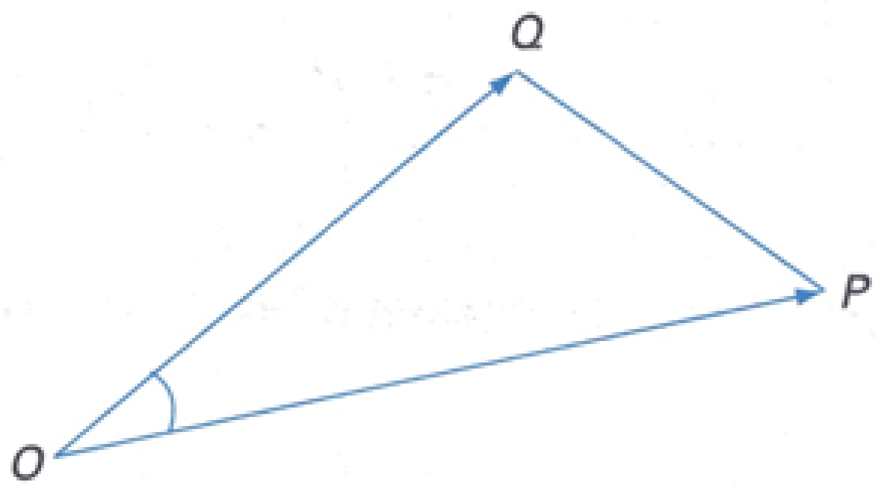
$$|\overrightarrow{v_a}| = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}$$

1.8. Cinemática de los sistemas indeformables

1.8.1. Sistemas indeformables

Un ***sistema indeformable*** es un conjunto de puntos para los que se verifica la propiedad de que dados dos cualesquiera de ellos, P Y Q, la distancia entre ambos se mantiene constante. Al moverse el sistema, las posiciones de los puntos P Y Q serán funciones del tiempo por lo que la condición anterior puede expresarse analíticamente en la forma:

$$\frac{d}{dt} nor\overrightarrow{PQ} = 0$$



Cuando la definición anterior se aplica a un sólido geométrico ideal decimos que se trata de un ***sólido rígido***. Si se tratase de un conjunto de puntos materiales hablaríamos de un ***cuerpo rígido***.

De la expresión anterior se desprende la ***constancia de los ángulos***. En efecto, sean O,P y Q, tres puntos cualesquiera de un sistema indeformable, se verifica: $\frac{d}{dt} nor\overrightarrow{PQ} = \frac{d}{dt} nor\overrightarrow{OP} = \frac{d}{dt} nor\overrightarrow{OQ} = 0$

$$\frac{d}{dt} nor\overrightarrow{PQ} = \frac{d}{dt} nor(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ}) = \frac{d}{dt} nor(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = 0$$

Y puesto que la norma de un vector es el producto escalar del vector por sí mismo resulta:

$$\frac{d}{dt} nor(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) = \frac{d}{dt}(nor\overrightarrow{OQ} - 2\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP} + nor\overrightarrow{OP} = 0$$

$$-2\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}) = -2\frac{d}{dt}\left(\sqrt{nor\overrightarrow{OP}}\sqrt{nor\overrightarrow{OQ}} cos(\widehat{POQ})\right) = 0 \longrightarrow -2\sqrt{nor\overrightarrow{OP}}\sqrt{nor\overrightarrow{OQ}}\frac{d}{dt} cos(\widehat{POQ}) = 0$$

y puesto que las normas son constantes en la derivación y distintas de cero, resulta: $\frac{d}{dt} cos(\widehat{POQ}) = 0$

de donde se deduce que: $\boxed{cos(\widehat{POQ}) = cte}$ y por tanto los ángulos son constantes.

La constancia de los ángulos se deduce como consecuencia inmediata la conservación de las alineaciones. Igualmente se conservarán los planos, por conservarse las rectas, también se conservarán los rectilíneos de diedros, por conservarse los ángulos y los planos

La posición de un sistema indeformable queda determinada si se conocen las coordenadas de tres cualesquiera de sus puntos no alineados. Estos nueve parámetros no son independientes, debido a que la distancia entre dos puntos es invariable, condición que proporciona tres ecuaciones adicionales, por lo que el número de parámetros necesario para determinar la posición de un sistema indeformable en el espacio es de seis. Se dice por ello que el número de ***grados de libertad*** de un sólido rígido libre es de seis. A cualquier conjunto de parámetros independientes que permita fijar la posición del sólido indeformable en el espacio de forma única se le denomina ***coordenadas de posición o coordenadas generalizadas***. Si el sistema no es libre, sino que está sometido a ligaduras, el número de coordenadas de posición será igual a la diferencia entre seis y el número mínimo de ecuaciones necesario para expresar las condiciones de ligadura que han de verificarse durante el movimiento.

UNED MADRID SUR

1.9. Movimientos de traslación y de rotación

La velocidad en cada punto de un sistema indeformable es un campo vectorial que depende de la posición y del tiempo. Es decir:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$

En lo que sigue estudiaremos ese campo de velocidades en un instante dado, esto es el campo instantáneo de velocidades $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$. Para ello definiremos previamente los conceptos de movimiento de traslación y movimiento de rotación.

Diremos que un sistema indeformable realiza un movimiento de traslación si dados dos puntos cualesquiera del mismo P y Q se cumple:

$$\frac{d\overrightarrow{PQ}}{dt} = 0$$

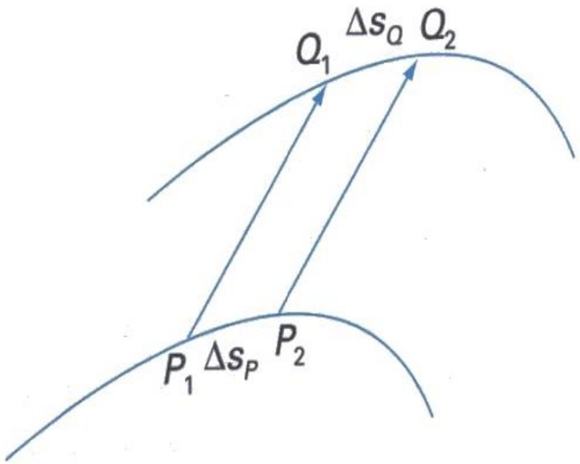


FIGURA 1.10

Dicha condición expresa que el vector que determinan dos puntos cualesquiera en el instante inicial, permanece equipolente a su posición inicial durante el movimiento.

Supongamos que en el instante t_1 los puntos P y Q ocupan las posiciones P_1 y Q_1 y que en el instante $t_2 = t_1 + \Delta t$ sus posiciones son P_2 y Q_2.

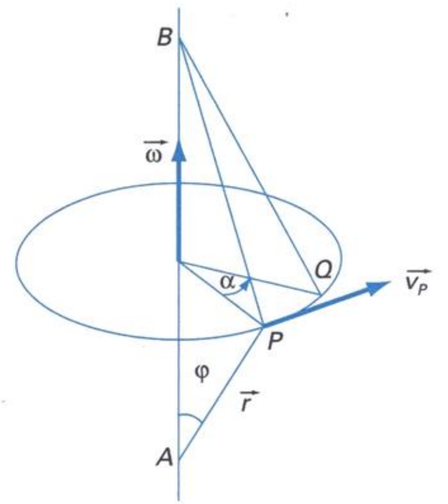
Supongamos que en el instante t_1 los puntos P y Q ocupan las posiciones P_1 y Q_1 y que en el instante $t_2 = t_1 + \Delta t$ sus posiciones son P_2 y Q_2.

Puesto que $nor\overrightarrow{PQ} = nor\overrightarrow{P_1Q_1} + nor\overrightarrow{P_2Q_2}$, por la condición de indeformabilidad, y $\overrightarrow{P_1Q_1}$ es paralelo a $\overrightarrow{P_2Q_2}$, por la definición de movimiento de traslación, resulta que el cuadrilátero $P_1Q_1P_2Q_2$ es un paralelogramo. Puede entonces escribirse:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2} \quad \text{o lo que es lo mismo:} \quad \Delta\vec{s}_P = \Delta\vec{s}_Q$$

y dividiendo por Δt y tomando límites cuando $\Delta t \to 0$ resulta: $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{s}_P}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{s}_Q}{\Delta t}$

o sea: $\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q}$



por lo que se puede concluir que el vector velocidad en el instante considerado es el mismo para todos los puntos. El campo instantáneo de velocidades es uniforme y el movimiento puede representarse por un vector libre igual a la velocidad de cualquier punto al que se le denomina ***vector translación***.

Derivando respecto al tiempo la expresión anterior se tiene: $\vec{a}_P = \vec{a}_Q$

de donde se deduce la igualdad de las aceleraciones para todos los puntos de un sistema indeformable en movimiento de traslación.

Las hodógrafas de velocidades de cualquier punto son coincidentes y el vector aceleración será también el mismo para todos los puntos en el instante considerado.

Supongamos ahora que un sistema indeformable se mueve de modo que dos cualesquiera de sus puntos se mantienen fijos. Se dice, en ese caso, que ejecuta un ***movimiento de rotación***.

Sean los dos puntos fijos A y B. Como consecuencia de la condición de indeformabilidad hemos visto que se conservan las alineaciones por tanto todos los puntos de la recta AB serán también fijos y a la recta AB la denominaremos ***eje de rotación***.

Si P es un punto cualquiera del sistema, no perteneciente al eje de rotación, por la definición de sistema indeformable han de cumplirse simultáneamente las dos condiciones:

$$\frac{d\,nor\overrightarrow{AP}}{dt} = 0 \text{ y } \frac{d\,nor\overrightarrow{BP}}{dt} = 0$$

de donde se deduce inmediatamente que los puntos no pertenecientes al eje de rotación tienen como trayectorias circunferencias cuyos centros están sobre la recta AB, ya que por la primera condición el punto P ha de moverse sobre una esfera de centro A A y radio AP y, por la segunda, ha de moverse sobre una esfera de centro B y radio BP. El cumplimiento simultáneo de ambas condiciones obliga a que el punto se mueva sobre la circunferencia resultante de la intersección de las dos esferas con centros en los puntos fijos A y B y radios AP y BP, respectivamente, que estará situada en un plano perpendicular a la recta AB y cuyo centro se encontrará sobre dicha recta.

Tomemos dos puntos arbitrarios, no pertenecientes al eje de rotación que llamaremos P y Q. Sea α el ángulo que forman los planos APB y AQB y sea $\Delta\alpha$ la variación de dicho ángulo al cabo del tiempo Δt. Se define la ***velocidad angular*** instantánea del sistema como:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}$$

La trayectoria descrita por un punto cualquiera P es una circunferencia, la velocidad instantánea del punto será un vector tangente a la circunferencia, contenido en el plano perpendicular al eje de rotación, el sentido es el del movimiento y de módulo:

$$v_P = \frac{ds}{dt} = \frac{r\,sen\varphi\,d\alpha}{dt} = r\,\omega\,sen\varphi = |\vec{\omega} \times \vec{r}|$$

$\vec{r}$ es un vector con origen en un punto cualquiera O del eje de rotación y extremo en el punto P, $\vec{\omega}$ es un vector deslizante, que denominaremos ***vector rotación***, su línea de acción es el eje de rotación, su sentido es tal que los tres vectores $\vec{\omega}$, $\vec{r}$, $\vec{v}_P$, en ese orden, forman un triedro a derechas y que tiene por módulo la velocidad angular

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} \longrightarrow \boxed{\vec{v}_P = \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

que da la velocidad de un punto cualquiera P de un sistema indeformable

Puesto que el vector rotación es el mismo para cualquier punto del sistema indeformable, su variación respecto al tiempo también será la misma para todos los puntos del sistema en un instante dado. A dicha variación respecto al tiempo se le denomina ***aceleración angular***.

$$\dot{\vec{\omega}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Cuando sobre el sistema indeformable actúan simultáneamente una rotación y una traslación paralela al eje de giro se dice que el sistema está animado de un ***movimiento helicoidal***.

1.10. Equiproyectividad del campo de velocidades

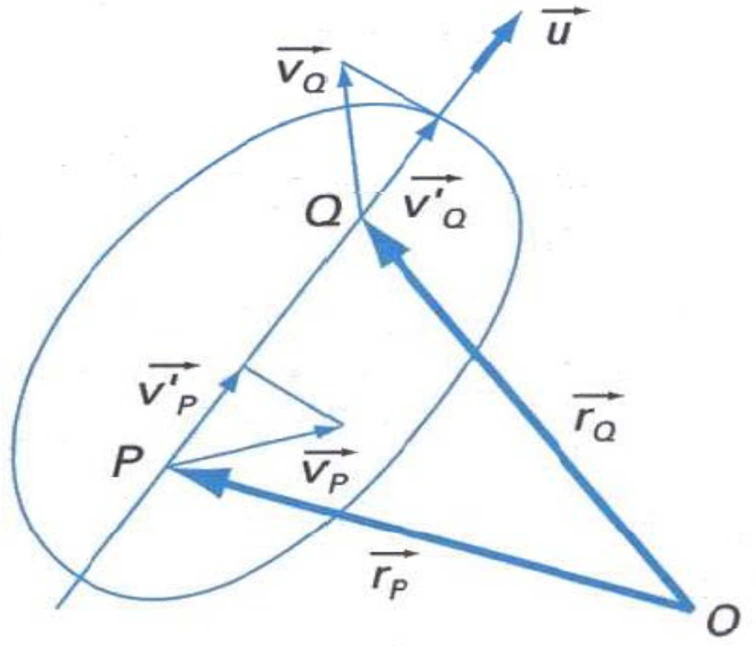
Un campo vectorial es equiproyectivo cuando dados dos puntos cualesquiera, pertenecientes al dominio en el que está definido el campo, se verifica que son iguales en cada punto las proyecciones del vector campo sobre la recta que une los dos puntos.

Sean P y Q dos puntos cualesquiera del sistema indeformable y δ la distancia entre ellos. Por la condición de indeformabilidad la distancia se mantiene constante por lo que se tiene:

$$nor\overrightarrow{PQ} = nor\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) = \delta^2$$

es decir

$$\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right)^2 = \delta^2$$

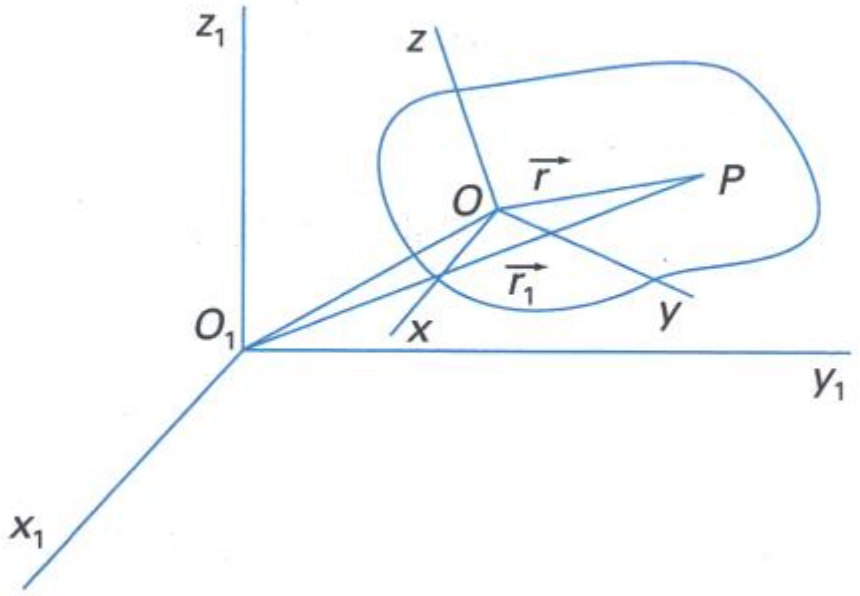


Y derivando respecto al tiempo, ya que $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ son funciones del tiempo, resulta:

$$2\left(\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\right) \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right) = 0$$

1.11. Distribución de velocidades

Vamos a calcular la expresión de la velocidad de un punto P cualquiera en el movimiento general instantáneo de un sistema indeformable. Consideraremos dos sistemas de referencia: uno fijo $O_1x_1y_1z_1$ y otro móvil, ligado al sistema indeformable al que acompaña en su movimiento, con origen en uno de sus puntos O, al que llamaremos $Oxyz$.



Sea P un punto cualquiera del sistema indeformable. Su vector de posición respecto al sistema móvil será: $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

en donde x, y, z son las coordenadas del punto respecto al sistema móvil.

El vector de posición de P respecto al sistema fijo será: $\vec{r_1} = \overrightarrow{O_1O} + \vec{r}$

en donde $\overrightarrow{O_1O}$ es el vector de posición del origen del sistema móvil respecto al sistema fijo.

La velocidad del punto P se obtendrá derivando la expresión anterior:

$$\overrightarrow{v_P} = \frac{d\vec{r_1}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O_1O}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + x\frac{d\vec{\imath}}{dt} + y\frac{d\vec{\jmath}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

ya que las coordenadas de P permanecen constantes por pertenecer a un sistema indeformable, y en donde $\vec{v}_0$ es la velocidad del origen de coordenadas del sistema de ejes móviles

Para calcular las derivadas respecto al tiempo de los vectores unitarios del triedro móvil tendremos en cuenta que, por ser su módulo constante, las derivadas estarán contenidas en un plano perpendicular al vector y podrán, en consecuencia, expresarse como el producto vectorial de ciertos vectores desconocidos $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ y $\vec{\gamma}$ por los vectores unitarios $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ y $\vec{k}$, respectivamente.

Comencemos por la $\frac{d\vec{\imath}}{dt}$. Será igual al producto vectorial de un cierto vector desconocido $\vec{\alpha} = \alpha_x\, \vec{\imath} + \alpha_y\, \vec{\jmath} + \alpha_z\, \vec{k}$, por $\vec{\imath}$. Es decir:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \left(\alpha_x\, \vec{\imath} + \alpha_y\, \vec{\jmath} + \alpha_z\, \vec{k}\right) \times \vec{\imath}$$

y análogamente:

$$\frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \left(\beta_x \vec{\imath} + \beta_y \vec{\jmath} + \beta_z \vec{k}\right) \times \vec{\jmath}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \left(\gamma_x \vec{\imath} + \gamma_y \vec{\jmath} + \gamma_z \vec{k}\right) \times \vec{k}$$

Al ser perpendiculares entre sí los vectores unitarios

$$\vec{\imath} \times \vec{\imath} = \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = \vec{k} \times \vec{k} = 0 \longrightarrow \alpha_x\, \vec{\imath} \times \vec{\imath} = 0 \;;\; \beta_y \vec{\jmath} \times \vec{\jmath} = 0 \;;\; \gamma_z \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

Lo que quiere decir que los valores α_x, β_y y γ_z pueden ser cualesquiera.

Las expresiones anteriores quedarán en la forma:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \alpha_z\, \vec{\jmath} - \alpha_y\, \vec{k} \qquad \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \beta_x \vec{k} - \beta_z \vec{\imath} \qquad \frac{d\vec{k}}{dt} = \gamma_y \vec{\imath} - \gamma_x \vec{\jmath}$$

ahora bien, las componentes de estos vectores no son independientes entre sí ya que entre los vectores unitarios existen las siguientes relaciones:

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{\imath} = 0$$

Derivando estas expresiones respecto al tiempo se tiene: $\frac{d\vec{\imath}}{dt}\cdot\vec{\jmath}+\vec{\imath}\cdot\frac{d\vec{\jmath}}{dt}=\frac{d\vec{\jmath}}{dt}\cdot\vec{k}+\vec{\jmath}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}=\frac{d\vec{k}}{dt}\cdot\vec{\imath}+\vec{k}\cdot\frac{d\vec{\imath}}{dt}=0$

Y sustituyendo aquí las expresiones de las derivadas de los vectores unitarios, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}(\propto_z\vec{\jmath}-\propto_y\vec{k})\cdot\vec{\jmath}+\vec{\imath}\cdot(\beta_x\vec{k}-\beta_z\vec{\imath})=\propto_z-\beta_z=0\\(\beta_x\vec{k}-\beta_z\vec{\imath})\cdot\vec{k}+\vec{\jmath}\cdot(\gamma_y\vec{\imath}-\gamma_x\vec{\jmath})=\beta_x-\gamma_x=0\\(\gamma_y\vec{\imath}-\gamma_x\vec{\jmath})\cdot\vec{\imath}+\vec{k}\cdot(\propto_z\vec{\jmath}-\propto_y\vec{k})=\gamma_y-\propto_y=0\end{array}\right\}\quad\left\{\begin{array}{l}\propto_z=\beta_z\\\beta_x=\gamma_x\\\gamma_y=\propto_y\end{array}\right.$$

$\propto_x$, β_y y γ_z son arbitrarios, se puede escribir:

$$\alpha_x=\beta_x=\gamma_x$$
$$\propto_y=\beta_y=\propto_y$$
$$\propto_z=\beta_z=\gamma_z$$

lo que significa que los tres vectores cualesquiera son en realidad un único vector.

Si a este vector le llamamos $\vec{\omega}$, las expresiones de las derivadas de los vectores unitarios en los ejes móviles pueden expresarse en la forma:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d\vec{\imath}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{\imath}\\\frac{d\vec{\jmath}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{\jmath}\\\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{k}\end{array}\right\}$$ ***fórmulas de Poisson***

Equivale a decir que, en los ejes móviles, se puede definir el operador:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{móv}=\vec{\omega}\times$$

Sustituyendo los valores de las derivadas de los vectores unitarios en la expresión que da la velocidad del punto P queda:

$$\overrightarrow{v_P} = \vec{v}_O + x(\vec{\omega} \times \vec{\imath}) + y(\vec{\omega} \times \vec{\jmath}) + z(\vec{\omega} \times \vec{k}) = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (x\,\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})$$

o lo que es igual: $\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}}$ expresión que proporciona la velocidad de un punto cualquiera del sistema, que consta de dos términos.

El primer término es la velocidad del origen del sistema de ejes móviles y obsérvese que si se hubieses escogido, para calcular la velocidad, un punto del sistema indeformable distinto del P también habría aparecido este término, por lo que dicha velocidad es la misma para todos los puntos del sistema indeformable, es decir, es una traslación de valor $\vec{v}_O$.

El segundo sumando, $\vec{\omega} \times \vec{r}$, es el momento del vector $\vec{\omega}$ respecto al punto P.

Finalmente hay que señalar que si se hubiese elegido un punto distinto del O como origen del sistema móvil la velocidad de traslación habría cambiado pero al permanecer fijo P en el sistema indeformable su velocidad total no habría variado.

En consecuencia la velocidad de cualquier punto del sistema indeformable queda perfectamente determinada cuando se conocen los vectores $\vec{v}_O$ y $\vec{\omega}$.

<u>El movimiento más general de un sistema indeformable se compone de una traslación y una rotación y, puesto que el punto O puede ser cualquier punto del sistema, hay infinitas posibilidades de descomposición del movimiento</u>.

1.12 Grupo cinemático

El conjunto $(\vec{v}_O, \vec{\omega})$ de los vectores $\vec{v}_O$ y $\vec{\omega}$ recibe el nombre de grupo cinemático. A continuación, estudiaremos que sucede con el grupo cinemático cuando se cambia el origen de coordenadas del sistema de referencia móvil.

En efecto, sea O_1 el nuevo origen (este nuevo origen pertenece también al sistema móvil y no debe confundirse con el origen O_1 del sistema fijo que se utilizó anteriormente) y supongamos que el nuevo grupo cinemático en O_1 es $(\vec{v}_O, \vec{\omega}_1)$. Calculemos a continuación la velocidad de un punto cualquiera P, distinto de O y O_1, del sistema indeformable respecto a cada uno de los dos sistemas móviles.

Respecto a 0 tendremos:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Y respecto a O_1:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$$

Importante!

Ahora bien, estas dos expresiones han de ser iguales puesto que la velocidad del punto P es única, o sea:

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_{O_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$$

Fe de erratas

Y si ahora expresamos la velocidad del punto O_1 en función del grupo cinemático en O, resulta:

$$\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO_1} + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \vec{v}_O + \boldsymbol{\vec{\omega}} \times (\vec{r} - \vec{r}_1) + +\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$$

Es decir:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r} - \vec{\omega} \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1$$

De donde:

$$(\vec{\omega} - \vec{\omega}_1) \times \vec{r}_1 = 0$$

Para que este producto vectorial se anule habrá de anularse uno de los factores o ser ambos paralelos. El vector $\vec{r}_1$ es distinto de cero, ya que sino P y O_1 coincidirían y, al ser un punto genérico, no tiene por qué ser paralelo al primer factor por lo que el anterior producto vectorial sólo se anula si la diferencia $(\vec{\omega} - \vec{\omega}_1)$ es nula, de dónde se deduce que el vector rotación en un instante determinado no depende del punto elegido como origen, es decir $\vec{\omega}$ es un invariante (**primer invariante**).

Calculemos a continuación el producto escalar de $\vec{v}_{O_1}$ por $\vec{\omega}$. Tendremos:

$$\vec{v}_{O_1} \cdot \vec{\omega} = \left(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OO_1}\right) \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega} + \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OO_1}\right) \cdot \vec{\omega}$$

la expresión $\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OO_1}\right) \cdot \vec{\omega}$ se anula por ser un producto mixto con dos factores iguales quedando:

$$\vec{v}_{O_1} \cdot \vec{\omega} = \vec{v}_O \cdot \vec{\omega}$$

Es decir, el producto escalar de los dos vectores del grupo cinemático es un invariante (segundo invariante).

Esta expresión se puede escribir también en la forma:

$$|\vec{\omega}|\ \mathrm{pro}_{\omega}\vec{v}_{O_1} = |\vec{\omega}|\ \mathrm{pro}_{\omega}\vec{v}_{O} = |\vec{\omega}|\ v_d$$

es decir, la proyección de la velocidad de cualquier punto del sistema indeformable sobre la dirección de la rotación instantánea es constante y se denomina **velocidad de deslizamiento**.

1.13. Distribución de aceleraciones

Para obtener la aceleración de un punto cualquiera P de un sistema indeformable, derivaremos respecto al tiempo la expresión [1.25] de la velocidad de P. Es decir

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

El primer término de la aceleración del origen del sistema móvil respecto a la referencia fija $\vec{a}_O$; en el segundo aparece la aceleración angular del sistema $\vec{\omega}$, que es en cada instante independiente del punto del sistema indeformable elegido y, por último el tercer sumando, recordando el operador derivada respecto al tiempo en ejes móviles: $\frac{d}{dt} = \vec{\omega} \times$

se puede escribir en la forma: $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

por lo que queda finalmente: $\vec{a}_P = \vec{a}_O + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

que da la aceleración de un punto P cualquiera de un sistema indeformable.

1.14. Reducción del movimiento general de un sistema a rotaciones

Comenzaremos por definir qué se entiende por **par de rotaciones**. Se llaman así a dos rotaciones de igual módulo, igual dirección y sentidos opuestos.

A continuación, vamos a calcular la velocidad de un punto P cualquiera del sistema indeformable. Se tiene:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + (\vec{\omega} - \vec{\omega}) \times \vec{r}$$

es decir:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O$$

ya que la resultante del par de rotaciones es cero, es decir, cuando actúa únicamente un par de rotaciones la velocidad de cualquier punto del sistema es la misma, o lo que es igual, el sistema está animado de un movimiento de traslación, por lo que cabe decir que un par de rotaciones aplicado a un sistema indeformable es equivalente a una traslación.

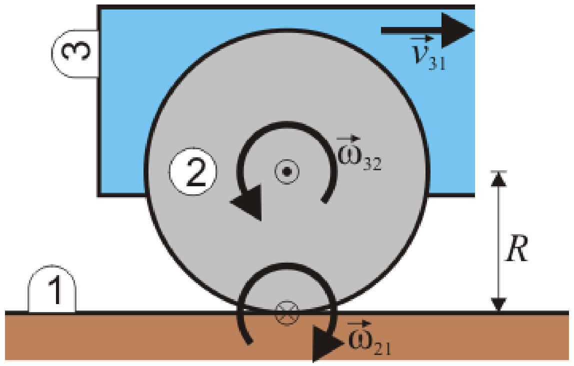
En consecuencia, si sobre un sistema indeformable hay aplicadas rotaciones y t traslaciones, puesto que cada traslación equivale a dos rotaciones, se pueden descomponer las t en $2t$ rotaciones con lo que el sistema quedará reducido únicamente a $2t + r$ rotaciones y la resultante de todas ellas será la rotación única a la que estará sometido el sistema, por lo cual siempre es posible reducir el movimiento general de un sistema a un conjunto de rotaciones.

La reducción del movimiento de un sistema a un punto P consiste en dar en él los elementos necesarios para poder definir el movimiento en cualquier punto del sistema. Para ello es preciso conocer la resultante de las $2t + r$ rotaciones, $\vec{\Omega}$, y la velocidad con que se mueve dicho punto, ya que la velocidad de cualquier otro punto se obtiene inmediatamente a partir de la expresión:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{PQ}$$

Como se observa existe una analogía completa entre el movimiento de un sistema indeformable y la teoría de los sistemas de vectores deslizantes, aunque es precios decir una vez más que es aplicable únicamente al estado instantáneo de velocidades de los puntos del sistema y no a su evolución en el tiempo.

En el caso de un vehículo que avanza sobre ruedas. Si el vehículo es el sólido 3, el suelo el sólido 1, y una rueda el sólido intermedio 2 ésta gira con la misma velocidad angular respecto al eje de la rueda que respecto a la línea de contacto con el suelo.

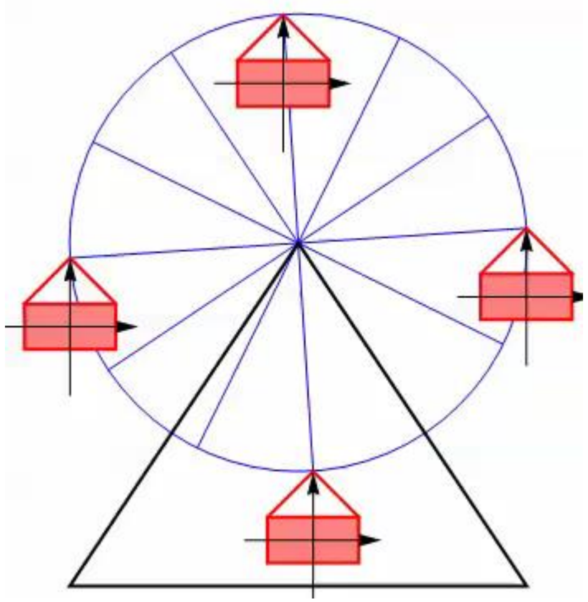


$$\vec{\omega}_{23} = \vec{\omega}_{21} \Rightarrow \vec{\omega}_{32} = -\vec{\omega}_{21} \Rightarrow \vec{\omega}_{31} = \vec{\omega}_{32} + \vec{\omega}_{21} = \vec{0}$$

La velocidad de traslación del cuerpo del vehículo respecto al suelo será

$$v^P = \omega_{21} R$$

Otro ejemplo es el movimiento de una noria



1.15. Eje instantáneo de rotación y eje de deslizamiento mínimo. Axoides

El movimiento de un sistema indeformable puede reducirse, en el caso más general, a rotaciones y, análogamente a lo que sucede con los sistemas de vectores deslizantes, al eje central del sistema, que es lugar geométrico de los puntos respecto a los cuales el momento es mínimo, o lo que es lo mismo, los puntos en los que el momento es paralelo a la resultante, se le llama ***eje instantáneo de rotación y deslizamiento mínimo***. O sea, que dicho eje es el lugar geométrico de los puntos en los que, en un instante determinado, la velocidad es mínima, o lo que es lo mismo, en los que la velocidad es paralela a la resultante del sistema de rotaciones, que es la que se denomina velocidad de deslizamiento.

Para obtener la expresión analítica del eje instantáneo de rotación basta con expresar la condición de paralelismo, en un punto cualquiera del lugar geométrico buscado, entre la velocidad de dicho punto y la rotación resultante. En efecto, si conocemos el grupo cinemático $\vec{a}_O$, $\vec{a}_O$, en el punto O, de coordenadas x_0, x_0, x_0, respecto a un sistema fijo $OXYZ$, se tiene:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OP}$$

es decir: $$\vec{v}_P = \vec{v}_{OX}\vec{\imath} + \vec{v}_{OY}\vec{\jmath} + \vec{v}_{OX}\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \Omega_X & \Omega_Y & \Omega_Z \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}$$

y puesto que la velocidad de P y la rotación instantánea resultante han de ser colineales, se verificará:

$$\vec{v}_P = \lambda\vec{\Omega} = \lambda\Omega_X\vec{\imath} + \lambda\Omega_Y\vec{\jmath} + \lambda\Omega_Z\vec{k}$$

y sustituyendo en la expresión anterior e identificando miembro a miembro, se obtienen las ecuaciones paramétricas del eje instantáneo de rotación:

$$v_{OX} + \Omega_Y(z - z_0) - \Omega_Z(y - y_0) = \lambda\Omega_X$$
$$v_{OY} + \Omega_Z(x - x_0) - \Omega_X(z - z_0) = \lambda\Omega_Y$$
$$v_{OZ} + \Omega_X(y - y_0) - \Omega_Y(x - x_0) = \lambda\Omega_Z$$

y basta con eliminar el parámetro para obtener la ecuación en la forma canónica:

$$\frac{v_{OX} + \Omega_Y(z - z_0) - \Omega_Z(y - y_0)}{\Omega_X} = \frac{v_{OY} + \Omega_Z(x - x_0) - \Omega_X(z - z_0)}{\Omega_Y} = \frac{v_{OZ} + \Omega_X(y - y_0) - \Omega_Y(x - x_0)}{\Omega_Z}$$

Que es la ecuación del ***eje instantáneo de rotación*** y ***deslizamiento mínimo***.

El lugar geométrico de las sucesivas posiciones que va ocupando el eje instantáneo con el transcurso del tiempo es una superficie reglada que, si la referimos a unos ejes en el sistema fijo, se denomina ***axoide fijo***. Dicha superficie depende del sistema de referencia elegido, por lo que si la hubiésemos referido a unos ejes que acompañan al movimiento (sistema móvil) daría lugar a otra superficie reglada, distinta de la anterior, que se denomina ***axoide móvil***. En cada instante ambos axoides tienen una tangente común que es el eje instantáneo de rotación.

1.16. Movimiento relativo de dos superficies en contacto

Se trata de estudiar el movimiento de dos sólidos que se mueven de forma que las superficies que los limitan mantienen siempre en contacto un punto O. Puesto que lo que nos interesa es el movimiento relativo de ambas superficies, se puede considerar una de las superficies y la otra móvil.

El movimiento de la superficie móvil se puede reducir al punto de contacto O, dando el grupo cinemático en él. En el caso más general, el movimiento estará compuesto por una velocidad $\vec{v}_O$, que estará contenida en el plano tangente común a ambas superficies, ya que de no ser así tendría componente normal por lo que las superficies se penetrarían o se separarían, en contra de la hipótesis, y una rotación $\vec{\Omega}$.

Esta rotación puede descomponerse de infinitas formas, pero la descompondremos en dos, una según la normal al plano tangente en O, que da lugar a una rotación alrededor de un eje en la dirección de la normal común a ambas superficies y que llamaremos **rotación de pivotamiento** $\vec{\Omega}_p$, y otra contenida en el plano tangente que llamaremos **rotación de rodadura**, $\vec{\Omega}_r$.

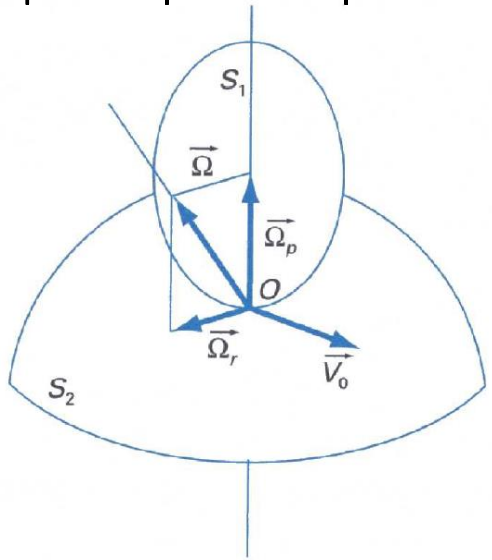
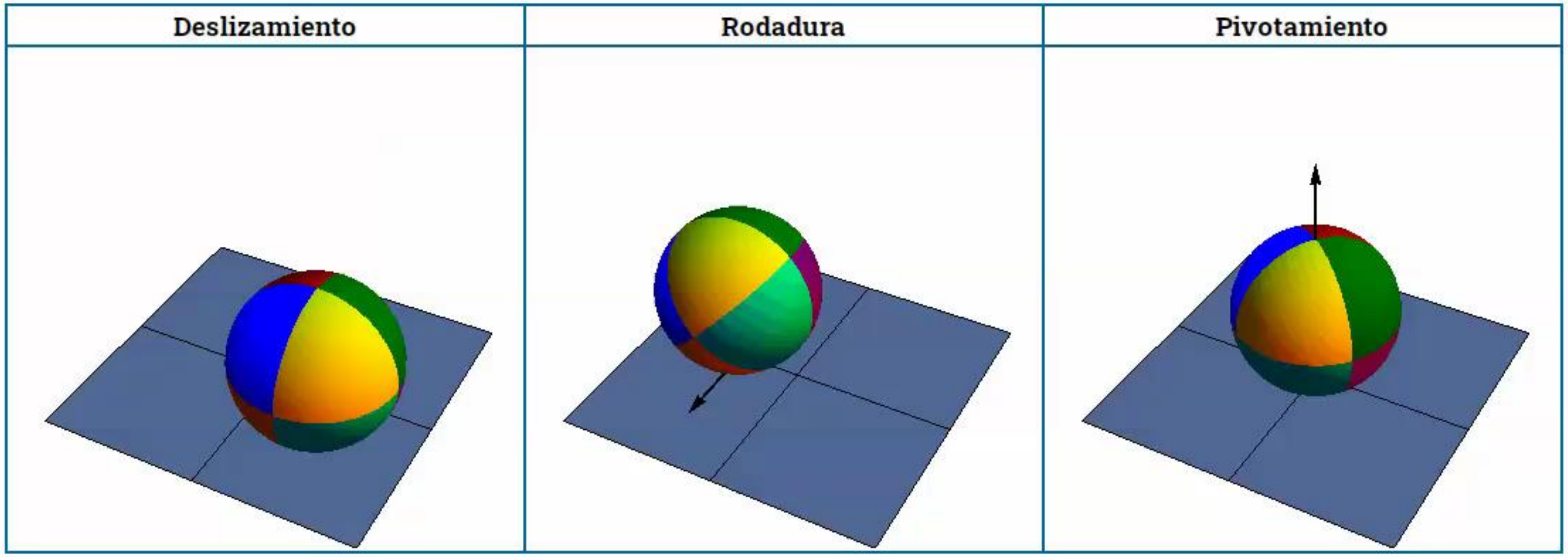


FIGURA 1.14



http://laplace.us.es/wiki/index.php/Movimiento_relativo_(G.I.T.I.)#Par_de_rotaciones_opuestas

68901022. MECÁNICA.
Grados en Ingeniería Eléctrica y en Electrónica Industrial y Automática
Septiembre 2010. R. Tiempo: dos horas. Material: ninguno.

1. Elipsoide de inercia.
   (3p)

2. La aceleración de un punto *P* en coordenadas cilíndricas viene dada por:

$$a_\rho = -1, \quad a_\theta = 0, \; a_z = 0$$

   En el instante inicial el punto se encuentra en la posición *(1,0,1)* y su velocidad es $v_\rho=0$, $v_\theta=1$ $v_z=0$. Calcular:
   a) Expresión del ángulo θ en función del tiempo.
   b) Ecuaciones horarias del movimiento del punto.
   (3,5 p)

3. Un hilo uniforme de longitud *2L* y peso *p* por unidad de longitud está sujeto por sus extremos a dos puntos situados a la misma altura y separados una distancia *2d*. Las tensiones en estos puntos son iguales al peso del hilo. Calcular:
   a) El ángulo que forman las tangentes al hilo en los puntos de amarre con la horizontal.
   b) Relación entre la longitud del hilo y la distancia entre los puntos de amarre.
   (3,5 p)

Mecánica I

Tema 1

Tema 1

Curso 2021-2022

Mecánica I
Tema 1

68901022. MECÁNICA.
Grados en Ingeniería Eléctrica y en Electrónica Industrial y Automática
Septiembre 2010. R. Tiempo: dos horas. Material: ninguno.

1. Elipsoide de inercia.
   (3p)

2. La aceleración de un punto *P* en coordenadas cilíndricas viene dada por:
   $a_\rho = -1,\ \ a_\theta = 0,\ a_z = 0$
   En el instante inicial el punto se encuentra en la posición *(1,0,1)* y su velocidad es $v_\rho=0$, $v_\theta=1$ $v_z=0$. Calcular:
   a) Expresión del ángulo θ en función del tiempo.
   b) Ecuaciones horarias del movimiento del punto.
   (3,5 p)

3. Un hilo uniforme de longitud *2L* y peso *p* por unidad de longitud está sujeto por sus extremos a dos puntos situados a la misma altura y separados una distancia *2d*. Las tensiones en estos puntos son iguales al peso del hilo. Calcular:
   a) El ángulo que forman las tangentes al hilo en los puntos de amarre con la horizontal.
   b) Relación entre la longitud del hilo y la distancia entre los puntos de amarre.
   (3,5 p)

Sabemos que en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \boldsymbol{\rho\dot{\theta}}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_\rho} + \left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

El enunciado nos indica que

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -1$$

$$a_\theta = \rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0$$

$$a_z = \dot{z} = 0$$

$$\rho\ddot{\theta} + \dot{\rho}2\dot{\theta} = 0 \rightarrow \rho\ddot{\theta} + \frac{d\rho}{dt}2\dot{\theta} = 0 \rightarrow \frac{\ddot{\theta}dt}{\dot{\theta}} + \frac{2d\rho}{\rho} = 0$$

$$\rightarrow \frac{\frac{d\dot{\theta}}{dt}dt}{\dot{\theta}} + \frac{2d\rho}{\rho} = 0 \rightarrow \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} + \frac{2d\rho}{\rho} = 0$$

$$\int \frac{d\dot{\theta}}{\dot{\theta}} + 2\int \frac{d\rho}{\rho} = \int 0 \to \ln\dot{\theta} + 2ln\rho = c \to \dot{\theta}\rho^2 = e^c \to \dot{\theta}\rho^2 = k \to \boldsymbol{\rho\dot{\theta}}\rho = k \to v_\theta\rho = k$$

Del enunciado sabemos que: $v_\rho = 0$, $v_\theta = 1$, $v_z = 0$ para el punto $\rho = 1$, $\theta = 0$, $z = 1$

Por tanto: $v_\theta\rho = k \to 1\cdot 1 = k$

Sustituyendo tenemos: $\dot{\theta}\rho^2 = 1 \to \dot{\theta} = \dfrac{1}{\rho^2}$

Como: $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -1 \to \ddot{\rho} - \rho\left(\dfrac{1}{\rho^2}\right)^2 = -1 \to \ddot{\rho} - \dfrac{1}{\rho^3} = -1$

Para t=0 sabemos que: $v_\rho = 0$ $\quad\rho = 1$ $\quad\to \ddot{\rho} - \dfrac{1}{1^3} = -1 \to \ddot{\rho} - 1 = -1 \to \ddot{\rho} = 0$

$\dddot{\rho} = -\dfrac{3\dot{\rho}}{\rho^4} - 1 \quad \to \dddot{\rho}(0) = 0$ y así sucesivamente , y por tanto $\rho = 1$

Sustituyendo en $\dot{\theta} = \frac{1}{\rho^2} \rightarrow \dot{\theta} = 1 \rightarrow \theta = t + k$ como para t=0 $\theta = 0$ entonces:

$$\theta = t$$

$$\rho(t) = 1$$

b) Del apartado anterior obtenemos:

$$\theta(t) = t = \theta$$

Para el cálculo de z(t) procedemos de forma análoga

Del enunciado sabemos que: $a_z = 0$ $v_z = 0$ $z = 1$

Sabemos que coordenadas cilíndricas

$$\vec{v} = \dot{\rho}\overrightarrow{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_\rho} + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta})\,\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

Por tanto: $\ddot{z} = 0 \rightarrow \dot{z} = c$ como para t=0 $v_z = 0 \rightarrow c = 0 \rightarrow \dot{z} = 0$

Y como $\dot{z} = 0 \rightarrow z = cte$ como para t=0 $z = 1 \rightarrow cte = 1 \rightarrow z = 1$

Quedando

$$z(t) = 1$$

EQUIPO DOCENTE DE MECÁNICA

DPTO. MECÁNICA ETSII - UNED

$$\ddot{\rho} - \rho\left(\frac{1}{\rho^2}\right)^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\rho} - \frac{1}{\rho^3} = -1$$

Para t=0 $\rho(0) = 1$ y $\dot{\rho}(0) = 1$ luego $\ddot{\rho}(0) = -1 + \frac{1}{\rho(0)^3} = -1 + 1 = 0$

Si se calcula $\dddot{\rho}$, resulta $\dddot{\rho} = -\frac{3\dot{\rho}}{\rho^4}$ y $\dddot{\rho}(0) = 0$ y así sucesivamente.

Por tanto, la solución es $\rho = 1$

Sustituyendo este valor en la ecuación $\dot{\theta}\rho^2 = 1$ se tiene $\dot{\theta} = 1$

e integrando

$$\theta = t + C_4$$

Para t=0, θ=0 $\Rightarrow$ C_4=0 y resulta