Ejercicio 1 Probar que si $A \in \mathcal{M}_n$ es real, regular y tal que $A^2 = A$ entonces A solo puede ser la matriz unidad de orden n .

Es inmediato comprobar que la matriz identidad, I , es una matriz regular (que tiene inversa) que verifica que $I^2 = I$.

Veremos que es la única matriz con estas dos propiedades.

Supongamos que A es una matriz regular, (es decir, existe su inversa A^{-1} , de modo que $A^{-1}A = A^{-1}A = I$) y que verifica que $A^2 = A$.

A partir de estas hipótesis deduciremos que necesariamente $A=I$.

En efecto, partimos de que $A^2 = A$

Si en la igualdad $AA=A$, multiplicamos por detrás por A^{-1} , ambos miembros de la igualdad resulta

$$(AA)A^{-1} = AA^{-1}$$

$$A(AA^{-1}) = I$$

$$AI = I$$

$$A = I$$

Como queríamos demostrar.

RECORDATORIO: Estructura algebraica de las operaciones con matrices (Ver página 11 del LT)

Una matriz de m filas y n columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m \times n}$$

Una *estructura algebraica* es el lote formado por: 1) Un conjunto de entes matemáticos, 2) unas operaciones definidas en el conjunto, 3) ciertas propiedades que verifican estas operaciones.

Propiedades de las operaciones con matrices

(Consejo: Enunciar las propiedades como reglas; las letras son mudas)

SUMA

En el conjunto $M_{m \times n}$, de las matrices m filas y n columnas, se considera la operación interna *suma* que verifica las siguientes propiedades:

- Asociativa: $\forall A, B, C \in M_{m \times n}$ se verifica que $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Conmutativa: $\forall A, B \in M_{m \times n}$ se verifica que $A + B = B + A$
- Existencia de un elemento neutro (matriz nula): $\exists O \in M_{m \times n}$ tal que $A + O = O + A = A$
- Elemento tiene un elemento opuesto: $\forall A \in M_{m \times n} \exists (-A) \in M_{m \times n}$ tal que $A + (-A) = O$

Esta estructura algebraica se llama *Grupo Conmutativo*

MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES

En el conjunto de las matrices de m filas y n columnas, $M_{m \times n}$, se considera la operación externa de *multiplicación por escalares* que verifica las siguientes propiedades:

- Asociativa: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m \times n}$ se verifica que $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
- Distributiva respecto suma de escalares:
 $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m \times n}$ se verifica que $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- Distributiva respecto a la suma de matrices:
 $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall A, B \in M_{m \times n}$ se verifica que $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- Multiplicación por la unidad escalar: $\forall A \in M_{m \times n}$ se verifica que $1A = A$

SUMA y MULTIPLICACIÓN POR ESCALARES = ESPACIO VECTORIAL

$[M_{m \times n}, +, \cdot \mathbb{R}]$ tiene estructura de Espacio Vectorial

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

$$A \in M_{m \times n} \quad B \in M_{n \times p} \quad \rightarrow \quad P = AB \in M_{m \times p}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} a_{11} = 1 & a_{12} = 1 & a_{13} = 0 \\ a_{21} = -2 & a_{22} = 3 & a_{23} = 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} = 0 & b_{12} = 2 & b_{13} = 5 \\ b_{21} = -2 & b_{22} = 0 & b_{23} = 1 \\ b_{31} = 4 & b_{32} = 1 & b_{33} = -1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} p_{11} = -2 & p_{12} = 2 & p_{13} = 6 \\ p_{21} = -2 & p_{22} = -3 & p_{23} = -8 \end{pmatrix} \\ p_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

La operación de multiplicación de matrices, en el caso de que las dimensiones de las matrices permiten hacerlo, son:

- Asociativa: $\forall A, B, C \in M_{m \times n}$ se verifica que $(AB)C = A(BC)$
- ¡NO es conmutativa!
- Distributiva respecto de la suma, tanto por la derecha como por la izquierda: Suponiendo que las dimensiones de las matrices permitan la multiplicación:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

- Asociativa respecto al producto por escalares:
 $\forall \alpha, \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{m \times n}$ se verifica que $\alpha(AB) = (\alpha A)B$

Para las MATRICES CUADRADAS $M_{n \times n}$

- Existe una matriz identidad: I , tal que $\forall A \in M_{n \times n}$ se verifica que $IA = AI = A$
- ¡NO! todas las matrices cuadradas tienen una matriz inversa A^{-1} tal que $AA^{-1} = AA^{-1} = I$

Las matrices que tienen inversa se dice que son *regulares* y las que no tienen inversa se dice que son *singulares*.

Las matrices regulares se caracterizan porque su determinante es distinto de cero.

Para las matrices cuadradas se define su *determinante*

```

→ Definir matrices

→ A:matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23]);
(%o34)

$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \end{pmatrix}$$


→ B:matrix([b11,b12,b13],[b21,b22,b23]);
(%o3)

$$\begin{pmatrix} b11 & b12 & b13 \\ b21 & b22 & b23 \end{pmatrix}$$


→ /*Suma de matrices*/

→ A+B;
(%o4)

$$\begin{pmatrix} b11+a11 & b12+a12 & b13+a13 \\ b21+a21 & b22+a22 & b23+a23 \end{pmatrix}$$


→ Producto de una matriz por un escalar

→ m·B;
(%o16)

$$\begin{pmatrix} b11 m & b12 m & b13 m \\ b21 m & b22 m & b23 m \end{pmatrix}$$


→ C:matrix([c11,c12],[c21,c22],[c31,c32]);
(%o14)

$$\begin{pmatrix} c11 & c12 \\ c21 & c22 \\ c31 & c32 \end{pmatrix}$$


```

→ Multiplicacion de matrices

→ A.C;

$$(\%o15) \begin{pmatrix} a_{13}c_{31}+a_{12}c_{21}+a_{11}c_{11} & a_{13}c_{32}+a_{12}c_{22}+a_{11}c_{12} \\ a_{23}c_{31}+a_{22}c_{21}+a_{21}c_{11} & a_{23}c_{32}+a_{22}c_{22}+a_{21}c_{12} \end{pmatrix}$$

→ Transpuesta de una matriz

→ transpose(A);

$$(\%o19) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$$

→ M:matrix([2,-1],[-1,1]);

$$(\%o22) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

→ P:invert(M);

$$(\%o24) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

→ M.P;

$$(\%o25) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
→ Q:matrix([2,0],[-1,1]);  
(%o26)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 
```

```
→ P.Q;  
(%o27)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 
```

```
→ Q.P;  
(%o28)  $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 
```

→ Comprobar una igualdad

```
→ is(P.Q=Q.P);  
(%o29) false
```

→ Operaciones usando variables

```
→ H:matrix([1,2*x,1],[(1-x),1,x],[x,x^2,5]);  
(%o39)  $\begin{pmatrix} 1 & 2x & 1 \\ 1-x & 1 & x \\ x & x^2 & 5 \end{pmatrix}$ 
```

↙ → $H^{2,2}$

$$\begin{pmatrix} 2(1-x)x+x+1 & x^2+4x & 2x^2+6 \\ x^2-2x+2 & x^3+2(1-x)x+1 & 5x+1 \\ (1-x)x^2+6x & 8x^2 & x^3+x+25 \end{pmatrix}$$

→ $\text{invert}(H);$

$$\begin{pmatrix} \frac{5-x^3}{-x^3+2x(x^2-5(1-x))+(1-x)x^2-x+5} & \frac{x^2-10x}{-x^3+2x(x^2-5(1-x))+(1-x)x^2-x+5} & \frac{2x^2-1}{-x^3+2x(x^2-5(1-x))+(1-x)x^2-x+5} \\ \frac{x^2-5(1-x)}{-x^3+2x(x^2-5(1-x))+(1-x)x^2-x+5} & \frac{5-x}{-x^3+2x(x^2-5(1-x))+(1-x)x^2-x+5} & \frac{1-2x}{-x^3+2x(x^2-5(1-x))+(1-x)x^2-x+5} \\ \frac{(1-x)x^2-x}{-x^3+2x(x^2-5(1-x))+(1-x)x^2-x+5} & \frac{x^2}{-x^3+2x(x^2-5(1-x))+(1-x)x^2-x+5} & \frac{1-2(1-x)x}{-x^3+2x(x^2-5(1-x))+(1-x)x^2-x+5} \end{pmatrix}$$