

Ejercicio 1 Calcular las soluciones del sistema

$$\begin{cases} mx + y + z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$

para los distintos valores de $m \in \mathbb{R}$.

Se trata de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

Escrito en forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comentario: Las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es un conjunto de vectores. El conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones tiene una estructura algebraica de espacio vectorial en el sentido de que la suma de dos soluciones también es una solución y el producto de un escalar por una solución también es una solución. Los sistemas homogéneos lineales siempre tienen, al menos, la solución trivial (0,0,0).

Para resolver este ejercicio vamos a utilizar el *método de reducción de Gauss*. La idea fundamental del método de Gauss consiste en lo siguiente: Para estudiar un sistema se transforma en otro sistema equivalente más sencillo. Así se paso a paso se hacen transformaciones hasta llegar a un sistema escalonado.

Las *transformaciones elementales de filas*. (Ver página 14 del LT) [Explicarlas con símiles] transforman un sistema en otro equivalente.

En el método de eliminación Gaussiana el pivote tiene que ser distinto de cero. Si en nuestro ejercicio utilizamos el valor m como pivote hay que considerarlo la hora de hacer el análisis de los casos críticos del parámetro. Una opción alternativa más simple de analizar es permutar previamente las ecuaciones primera y tercera.

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 0 \\ 1 & m & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - F_1 \rightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ m & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - mF_1 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 1-m & 1-m^2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2 \rightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & m & 0 \\ 0 & m-1 & 1-m & 0 \\ 0 & 0 & -m^2 - m + 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez reducido el sistema a forma escalonada, son *valores críticos* del parámetro aquellos que anulan las cabeceras de fila.

Son valores críticos del parámetro la solución de $m - 1 = 0$, que anulan la cabecera de la segunda ecuación, y las soluciones de $-m^2 - m + 2 = 0$ que anulan la cabecera de fila de la tercera ecuación

A continuación se estudia el sistema de forma particular para cada uno de los valores críticos del parámetro.

Para $m = 1$, el sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow x + y + z = 0$$

Se trata de un sistema de una ecuación con tres incógnitas. El conjunto de las soluciones son todos los vectores tales que la suma de sus componentes es cero. Por ejemplo serían soluciones $(1, -1, 0)$, $(-3, -5, 8)$,

Comentario: Concepto de rango de una matriz (Ver página 22 del LT). Una vez reducida a forma escalonada el *rango* de una matriz es el número de filas con cabeceras distintas de cero.

Para este caso la matriz del sistema es de rango 1. La matriz ampliada es de rango 1. El sistema tiene infinitas soluciones (es un sistema *compatible indeterminado*). Para hallar la solución general se utilizan dos de las incógnitas como parámetros.

$$\begin{cases} x = -\lambda - \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \text{Esto mismo escrito en forma vectorial} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comentario: La interpretación geométrica del conjunto de las soluciones es un plano del espacio.

Para $m = -2$, el sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases}$$

Es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas.

La matriz del sistema es de rango 2. La matriz ampliada es de rango 2. El sistema tiene una infinidad de soluciones (es un sistema *compatible indeterminado*). Para hallar la solución general se utiliza una de las incógnitas como parámetro.

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comentario: La interpretación geométrica del conjunto de soluciones es una recta en el espacio.

Comentario: En general, dado un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, el conjunto de soluciones se puede describir de *forma implícita* o de *forma paramétrica*. Es muy importante en el desarrollo de la materia de este curso saber pasar con soltura de una forma a otra. (Ver páginas 33, 34 y 35 del LT).

Para los demás casos, cuando $m \neq 1$ y $m \neq -2$, resulta que el sistema tiene solución única (El sistema es *compatible determinado*), que es la solución trivial $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Otra manera de resolver este problema es usando los *determinantes*.

Comentario: Los *determinantes* se introdujeron por Leibniz para expresar explícitamente las soluciones de sistemas de n ecuaciones con n incógnitas (fórmula de Cramer). Los determinantes, además de para resolver sistemas de ecuaciones son útiles en otros muchos ámbitos de las matemáticas. (Ver página 23 y siguientes del LT).

La solución del sistema que da la regla de Cramer es:

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}}; \quad y = \frac{\det \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}}; \quad z = \frac{\det \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}}$$

En las fórmulas de Cramer, para que tengan sentido hay que evitar la división por cero. Es decir, hay que asumir que

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = m^3 - 3m + 2 = (m-1)^2(m+2) \neq 0$$

Los casos críticos del sistema, para los que el sistema no tiene solución única (la que da la regla de Cramer) son los valores que anulan el determinante de la matriz del sistema

Es decir, los mismos casos críticos que ya encontramos usando el método de Gauss.

Comentario: Para problemas en los que hay que estudiar sistemas de ecuaciones el método de Gauss es más general. Con el método de Gauss se pueden estudiar sistemas en los que el número de ecuaciones es distinto que el número de incógnitas. Además, el método de Gauss es un algoritmo muy eficiente.

wxMaxima 13.04.2 [problema 1 2020.wxm]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i2) A:matrix([m,1,1],[1,m,1],[1,1,m]);

(%o2)
$$\begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{bmatrix}$$

(%i8) determinant(A);

(%o8) $m(m^2 - 1) - 2m + 2$

(%i9) solve(%o8=0,m);

(%o9) $[m = -2, m = 1]$

(%i3) ev(A, m=1);

(%o3)
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i4) ev(A, m=-2);

(%o4)
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(%i6) rank(%o3);

(%o6) 1

(%i7) rank(%o4);

(%o7) 2

```

[ (%i11) triangularize(%o3);
  (%o11) 
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


[ (%i12) triangularize(%o4);
  (%o12) 
$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


[ --> solve([x+y+z=0],[x,y,z]); /*Solución en función de parámetros para m=-2*/
  (%o15) [[x=-%r2-%r1,y=%r2,z=%r1]]

[ --> solve([-2*x+y+z=0, 3*y-3*z=0],[x,y,z]); /*Solución en función de parámetros para m=1 */
  (%o16) [[x=%r3,y=%r3,z=%r3]]

```