Febrero 2013 A problema

Problema Si A es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por $(1,2,1,1), (-1,0,1,0), (2,2,0,1)$ y B es el subespacio de ecuación $2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$, se pide:
A) *(2ptos.)* Ecuaciones paramétricas y cartesianas de los subespacios A, B y $A \cap B$.
B) *(2ptos.)* Encontrar una base de $A \cap B$ y otra de $A + B$.

<u>Respuesta</u>

- <u>Subespacio *A*</u>

El subespacio *A* está expresado mediante un sistema de generadores

$$A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

En primer lugar, vamos a reducir el sistema de generadores a un sistema escalonado equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, el subespacio *A* está generado por dos vectores linealmente independientes. Su dimensión es dim(*A*) = 2.

Unas ecuaciones paramétricas de *A* son:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 2\lambda + 2\mu \\ x_3 = \lambda + 2\mu \\ x_4 = \lambda + \mu \end{cases}$$

Por consiguiente,

$$A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para hallar la forma implícita de *A* hay que eliminar parámetros.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \underset{F_3 - x_1 F_1 \to F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & x_2 - 2x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \end{pmatrix} \underset{2F_3 - (x_2 - 2x_1)F_2 \to F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 & -x_2 + 2x_4 \end{pmatrix}$$

Para que el rango esta matriz sea 2, tiene que ocurrir que

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Comentario: Una comprobación sería ver que los vectores generadores de *A* verifican este sistema de ecuaciones que acabamos de obtener.

Comentario: La *eliminación de parámetros* también se puede hacer directamente, despejando un parámetro en todas las ecuaciones el mismo parámetro e igualando dos a dos. Así se pierde una ecuación y se elimina un parámetro.

- <u>Subespacio *B*</u>

Según el enunciado del problema, el subespacio vectorial *B* está descrito en forma implícita mediante una ecuación lineal homogénea con cuatro incógnitas

$$2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$

La solución general de este sistema dependerá de 3 parámetros. Es decir, dim(*B*) = 3.

Haciendo $x_1 = \lambda$, $x_2 = \mu$, $x_3 = \sigma$ la expresión paramétrica de *B* es

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = \sigma \\ x_4 = 2\lambda - 2\mu + 2\sigma \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Comentario: Se puede comprobar que los vectores que generan *B*, en efecto, verifican la ecuación implícita de que define *B*.

- <u>Subespacio *A*∩*B*</u>

Los vectores que pertenecen a $A \cap B$ son los que están simultáneamente a *A* y *B*. Por consiguiente, las ecuaciones implícitas de el conjunto $A \cap B$ serán el sistema formado por las ecuaciones implícitas de definen *A* junto con las ecuaciones implícitas que definen *B*.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Para hallar la solución general del sistema, y así obtener la forma paramétrica de $A \cap B$, lo reducimos a forma escalonada.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & - & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Por tanto, el sistema escalonado que define $A \cap B$ es

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 + 2x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

La solución general de este sistema va a depender de un parámetro. Por ejemplo $x_1 = \lambda$. De modo que

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -\lambda \\ x_4 = 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comentario: Se puede comprobar que, efectivamente, el vector (1, 0, –1, 0) pertenece tanto a *A* como a *B* viendo que cumple las respectivas ecuaciones de *A* y de *B*.

En definitiva,

$$A \cap B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La dimensión de este subespacio $A \cap B$ es: $\dim(A \cap B) = 1$

- <u>Subespacio *A* + *B*</u>

El subespacio $A + B$ está formado por todos los vectores de la forma $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, en donde $\mathbf{a} \in A$ y $\mathbf{b} \in B$. Por consiguiente, un sistema de generadores de $A + B$ es el resultado de juntar los vectores generadores de A y los vectores generadores de B.

$$A + B = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para hallar una base del subespacio $A + B$ hay que reducir este sistema de vectores a una forma escalonada equivalente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la base de $A + B$ está formada por cuatro vectores linealmente independientes, resulta que $\dim(A + B) = 4$ y, por tanto,

$$A + B = R^4$$

Comentario: Se verifica la fórmula de Grassman

$$\dim(A + B) = \dim(A) + \dim(B) - \dim(A \cap B)$$