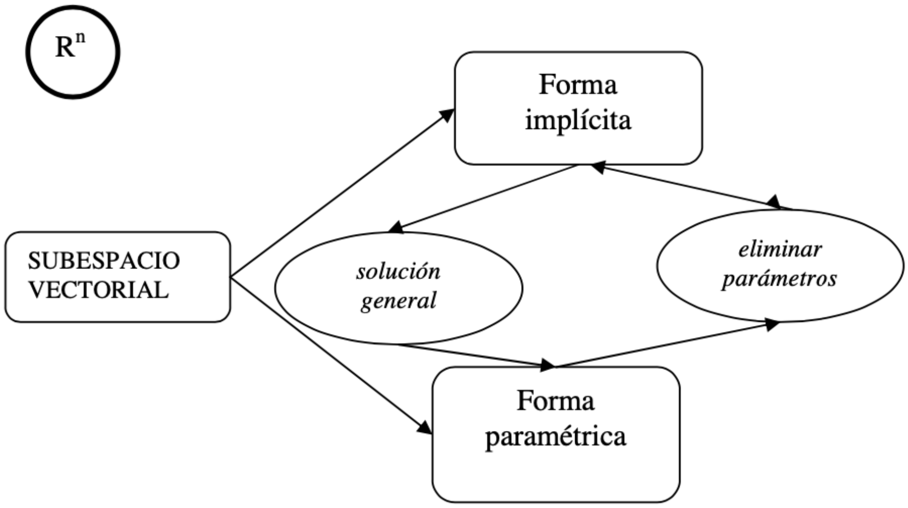
IMPLÍCITAS ←→PARAMETRICAS



ELIMINAR PARÁMETROS (Usando método de Gauss)

<u>Ejemplo 1</u>

Consideremos un subespacio vectorial de R^3. Descrito en forma paramétrica como el conjunto de vectores que verifican

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

Donde λ es un parámetro que recorre todos los números reales.

Escribiendo esta relación en notación vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para eliminar los parámetros interpretamos que el vector (x, y, z) depende linealmente de $\{(1, -1, 2)\}$ lo que significa que

$$ran \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 1$$

Reducimos esta matriz a su forma escalonado usando el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & y+x & z-2x \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, de la relación

$$ran\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & y+x & z-2x \end{pmatrix} = 1$$

Se deduce que

$$\begin{cases} y+x = 0 \\ z-2x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = 0 \\ 2x-z = 0 \end{cases}$$

Esta es la definición implícita del subespacio, como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

¡Comprobación! Comprobamos que el vector generador del espacio verifica las ecuaciones implícitas.

En definitiva,

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que} \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \text{para } \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que.} \begin{cases} x+y = 0 \\ 2x-z = 0 \end{cases}\right\} =$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Comentario: Interpretación geométrica. Se trata de una recta del espacio que pasa por el origen. Definida por un vector director o definida como la intersección de dos planos.

Ejemplo 2

Consideremos un subespacio vectorial de $R^{3.}$ Descrito en forma paramétrica como el conjunto de vectores que verifican

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -2\lambda + \mu \end{cases}$$

Donde λ y μ son dos parámetros que recorren todos los números reales.

Escribiendo esta relación en notación vectorial

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para eliminar los parámetros interpretamos que el vector (x, y, z) depende linealmente de $\{(1, 0, -2), (0, 1, 1)\}$ lo que significa que

$$ran\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 2$$

Reduciendo la matriz a forma escalonada por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & y & z+2x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z+2x-y \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, de la relación

$$ran\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z+2x-y \end{pmatrix} = 2$$

Se deduce que

$$\{2x - y + z = 0$$

Que es la definición implícita del subespacio como el conjunto de soluciones de un sistema homogéneo de ecuaciones lineales.

¡Comprobación! Comprobamos que los vectores generadores del espacio verifican la ecuación implícita.

En definitiva,

$$\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -2\lambda + \mu \end{cases} \text{ para } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{tal que. } \{2x - y + z = 0\} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Comentario: Interpretación geométrica. Se trata de un plano del espacio que pasa por el origen.

HALLAR LA SOLUCIÓN GENERAL DE UN SISTEMA (Usando en método de Gauss)

Ejemplo 3

Dado el sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales linealmente independientes con tres incógnitas

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Para hallar su solución general lo reducimos a otro sistema equivalente escalonado usando el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$$

Tomando $z = \lambda$

$$\begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En definitiva,

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que. } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{cases} x = -2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \text{ para } \lambda \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

¡Comprobación! Comprobamos que el vector generador del espacio verifica las ecuaciones implícitas.

Ejemplo 4

Dada la ecuación

$$\{x - 2y + z = 0$$

Tomando $z = \lambda; y = \mu$

$$\begin{cases} x = -\lambda + 2\mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

¡Comprobación!
Comprobamos que los vectores generadores del espacio verifican la ecuación implícita.

```
(%i1) solve([x+y-z=0, 2·x+y+z=0],[x,y,z]);
(%o1) [[x=-2 %r1,y=3 %r1,z=%r1]]

(%i2) solve([x-2·y+z=0],[x,y,z]);
(%o2) [[x=2 %r3-%r2,y=%r3,z=%r2]]

(%i4) eliminate([x=t,y=-t, z=2·t],[t]);
(%o4) [2 x-z,-y-x]

(%i5) eliminate([x=t,y=s,z=-2·t+s],[t,s]);
(%o5) [-z+y-2 x]

(%i8) triangularize(matrix([1,-1,2],[x,y,z]));
```

$$(\%o8) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & y+x & z-2x \end{pmatrix}$$

```
(%i10) triangularize(matrix([1,0,-2],[0,1,1],[x,y,z]));
```

$$(\%o10) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & z-y+2x \end{pmatrix}$$