Febrero 2019 B ejercicio 2

$\boxed{\textbf{Ejercicio 2}}$ Encontrar unas ecuaciones paramétricas del subespacio $U_1 \cap U_2$ siendo

$$U_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = 2x_2; x_3 = x_4\}$$

y

$$U_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = 2x_3\}.$$

Respuesta

Lus subespacios $U_1$ y $U_2$ están definidos en forma implícita. Sus elementos respectivos son las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales homogéneos.

Comentario. Aunque no es necesario hacerlo para resolver el problema, vamos a hallar la forma paramétrica de ambos subespacios para repasar el procedimiento.

Para encontrar la forma paramétrica de $U_1$ debemos calcular la solución general en función de parámetros del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Haciendo $x_2 = \lambda$ y $x_3 = \mu$ resulta

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \mu \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para encontrar la forma paramétrica de $U_2$ debemos calcular la solución general en función de parámetros del sistema

$$\{x_1 - 2x_3 = 0$$

Haciendo $x_2 = \lambda$ , $x_3 = \mu$ y $x_4 = \sigma$ resulta

$$\begin{cases} x_1 = 2\mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \\ x_4 = \sigma \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comentario: Una comprobación es mirar si los vectores generadores de la forma paramétrica cumplen el sistema de ecuaciones de la forma implícita.

Los vectores que están en $U_1 \cap U_2$ son los vectores que cumplen a la vez las ecuaciones que definen $U_1$ y las ecuaciones que definen $U_2$. Es decir son las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Para describir paramétricamente las soluciones de este sistema, hay que hallar la solución general en función de parámetros, para lo cual hay que reducirlo a forma escalonada utilizando el método de eliminación de Gauss.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

De esta manera el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que define $U_1 \cap U_2$ es equivalente a este otro escalonado

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Haciendo $x_4 = \lambda$, resulta

$$\begin{cases} x_1 = 2\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comentario: Una comprobación es ver que en efecto el vector (2, 1, 1, 1) cumple las ecuaciones de $U_1$ y las de $U_2$.

Aunque no lo piden, vamos a calcular la ecuaciones paramétricas e implícitas.
El subespacio $U_1 + U_2$ está generado por la unión de los vectores generadores de $U_1$ y de $U_2$.

$$U_1 + U_2 = < (2,1,0,0), (0,0,1,1), (0,1,0,0), (2,0,1,0), (0,0,0,1)\}$$

Para hallar la expresión paramétrica hay que reducir este sistema de vectores a forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el rango del sistema es igual a 4 que es la dimensión del espacio, resulta que

$$U_1 + U_2 = \mathrm{R}^4$$

Cometario: se comprueba la fórmula de Grassman

$$\dim (U_1 + U_2) = \dim (U_1) + \dim(U_2) - \dim (U_1 \cap U_2)$$