Febrero de 2010 A Problema

Problema

a)(2ptos.) Calcular la factorización LU de la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ y utilizar dicha factorización para resolver el sistema $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

b)(2ptos.) El subespacio V de $\mathbb{R}^3$ está generado por $\{(1,1,2)\}$ y el subespacio U de $\mathbb{R}^3$ está definido por las ecuaciones $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_2 + x_3 = 0$. Calcular la dimensión de $V + U$ y justificar si U y V están en suma directa.

Respuesta:

a) El apartado a) está hecho. Es el ejercicio 1.44 del Libro de Problemas, página 44. También está explicado en "Factorización *LU* de matrices cuadradas".

b)

- ***V***

El subespacio *V* está definido en forma paramétrica.

$$V = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in R^3 \quad tal \quad que \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

La dimensión de *V* es 1, porque su base tiene un elemento, dim(*V*) = 1.

Cometario: Geométricamente son los vectores de una recta del espacio.

Comentario: Aunque no es necesario hacerlo, vamos describir el subespacio *V* en forma implícita. Para ello, eliminamos el parámetro. En este caso es muy sencillo hacerlo directamente. Se despeja el parámetro en las tres ecuaciones y se igualan dos a dos.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in R^3 \quad tal \quad que \quad \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \right\}$$

Si lo hubiésemos hecho sistemáticamente reduciendo a forma escalonada la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ x & y & z \end{pmatrix} \underset{F_2 - xF_1 \to F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & y - x & z - 2x \end{pmatrix}$$

Para que el rango de estas matrices sea igual a 1, tiene que ocurrir que los elementos de la segunda fila sean ceros.

- ***U***

El subespacio *U* está definido en forma implícita.

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in R^3 \quad tal \quad que \quad \left\{ \begin{matrix} 2x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{matrix} \right. \right\}$$

Las dos ecuaciones del sistema son linealmente independientes (el sistema es escalonado). Para describir el sistema de forma paramétrica hay que hallar la solución general del sistema en función de un parámetro. Por ejemplo, haciendo $z = \lambda$, se tiene

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in R^3 \quad tal \quad que \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Comentario: Una comprobación sencilla es ver que el vector (0, –1, 1) verifica las ecuaciones que definen *U*.

Comentario: Geométricamente, el subespacio *U* son los vectores de una recta.

- ***U + V***

El subespacio *U* + *V* se define así:

$V + U = \langle V \cup U \rangle$ = { **x** tales que **x** = **v** + **u**, donde **v**$\in V$ y **u**$\in$ U}

En este caso

V + *U* = < (1, 1, 2), (0, –1, 1)>

Es claro, que los dos vectores que generan *V* + *U* son una base, ya que forman un sistema escalonado de vectores.

$$V + U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in R^3 \quad tal \quad que \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La dim (*U* + *V*) = 2.

Comentario: Geométricamente, *U* + *V* es un plano del espacio.

Para hallar la forma implícita de *U* + *V* hay que eliminar los parámetros

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \underset{F_3 - xF_1 \to F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & y-x & z-2x \end{pmatrix} \underset{-F_3-(y-x)F_2 \to F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3x-y-z \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$V+U=\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in R^3 \quad tal \quad que \quad \{3x-y-z=0 \right\}$$

Comentario: una comprobación fácil es ver que los vectores que son base de $V + U$, {(1,1,2,) , (0,–1,1)}, verifican el sistema de ecuaciones que definen $V + U$ en forma implícita.

- ***<u>V ∩ U</u>***

Los vectores que están a la vez en los dos subespacios son los que verifican simultáneamente las ecuaciones implícitas de V junto con las ecuaciones implícitas de U.

$$V \cap U=\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} \in R^3 \quad tal \quad que \quad \left\{ \begin{array}{c} x-y=0 \\ 2x-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ y+z=0 \end{array} \right\} \right.$$

Ahora hay que reducir el sistema a forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema es compatible determinado y la única solución es (0, 0, 0).
dimensión es dim($S∩T$) = 0.

Comentario: Geométricamente, $V ∩ U$ es la intersección de dos rectas que pasan por el origen y que no son paralelas.

Como $V ∩ U$ ={ **0** } se dice que V y U son *suma directa* (ver página 897 del LT)

Comentario Los vectores de $V \oplus U$ se descomponen de *manera única* como suma de un vector de V más un vector de U.

Comentario: Comprobamos la fórmula de Grassmann (ver página 95 LT)

dim (V + U) = dim (V) + dim(U) – dim ($V ∩ U$)

wxMaxima 13.04.2 [Febreo 2010 A problema.wxm]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

```
-->    /*U en paramétricas*/
       linsolve([2*x+y+z=0, y+z=0], [x,y,z]);
(%o7)  [x=0,y=-%r1,z=%r1]

-->    /*V en implícitas*/
       eliminate([x=t, y=t, z=2*t],[t]);/*implicitas de V*/
(%o8)  [2 x-z,x-y]

(%i10) /*V intersección U*/
       linsolve([2*x+y+z=0, y+z=0, 2*x-z=0, x-y=0], [x,y,z]);
solve: dependent equations eliminated: (4)
(%o10) [x=0,y=0,z=0]

(%i11) /*Ecuaciones de V + U*/
       eliminate([x=t, y=t-s, z=2*t+s],[s,t]);
(%o11) [z+y-3 x]
```