Septiembre 2018 Problema b)

Problemas

a) (0.5ptos.) Si A, B son matrices cuadradas, se pide justificar si es cierta o no la siguiente igualdad, $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$. (0.5ptos.) Escribir dos matrices elementales asociadas a operaciones elementales de distinto tipo.

b) La aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to V$, donde V es el espacio vectorial de matrices reales cuadradas de orden 2, está definida por

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x-y \end{pmatrix}.$$

Hallar unas ecuaciones paramétricas del subespacio núcleo (0.5ptos.) y calcule la dimensión del subespacio imagen (0.5ptos).

c) (1 pto.) Definir y proporcionar un ejemplo de sistema ortonormal de un espacio euclídeo.

Respuesta

El núcleo de la aplicación *f* es un subespacio vectorial del espacio original, R^3, definido así

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathrm{R}^3 \text{ tal que } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

En nuestro caso

$$\mathrm{Nuc}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \text{ tal que } f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Lo que significa que las ecuaciones implícitas de de Nuc(*f*) son

$$\begin{cases} x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Se ve a simple vista que el sistema es equivalente a este otro de dos ecuaciones linealmente independientes

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Como se trata de un sistema homogéneo de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas, la solución general va a depender de un parámetro $z = \lambda$. Así pues, las ecuaciones paramétricas de Nuc(f) son:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

de modo que el Nuc(f) es un subespacio vectorial de R^3 de dimensión 1.

$$\text{Nuc}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Consideremos, ahora el subespacio vectorial Im(f) del espacio vectorial final V de las matrices 2×2

La dimensión de Im(f) se puede deducir de la fórmula

$$\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Nuc}(f)) = \dim(R^3)$$

Por lo que resulta que

$$\dim(\text{Im}(f)) = 2.$$

Otra manera de abordar este problema es considerar la base canónica en el espacio vectorial V, de las matrices cuadradas 2×2

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

De modo que, tomando esta base como referencia, se identifica a las matrices 2×2 de V con vectores de R^4 de sus coordenadas con respecto a la base B. Con esta identificación la expresión analítica de $f : R^3 \to R^4$ es:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ x-y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Comentario: Las columnas de la matriz A asociada a la aplicación f son los transformados de los elementos de la base. En efecto,

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El subespacio Img(f) es el espacio generado por los transformados de la base.

$$\text{Img(f)} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Con lo cual

$$\dim(\text{Im(f)}) = \text{ran}(A) = 2$$