Septiembre 2018 ejercicio 3

Ejercicio 3 Hallar la aplicación lineal h definida por $f \circ g$ (f compuesta con g) siendo $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2 - x_1, 3x_1)$ y $g(y_1, y_2) = (2y_1 - y_2, 0)$.

<u>Respuesta:</u>

Comentario: En la definición de las funciones no hay que fijarse en las letras que se utilizan. Hay que interpretarlos como una regla.

Aplicando la definición de composición de aplicaciones:

$$f \circ g\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(g\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ 0 - (2y_1 - y_2) \\ 3(2y_1 - y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y_1 - y_2 \\ -2y_1 + y_2 \\ 6y_1 - 3y_2 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g\left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

El esquema de esta composición de aplicaciones es este:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f \circ g & & \\
 & \boldsymbol{g} & & \boldsymbol{f} & \\
\boldsymbol{R}^2 & \to & \boldsymbol{R}^2 & \to & \boldsymbol{R}^3 \\
\mathbf{y} & \mapsto & g(\mathbf{y}) & \mapsto & f(g(\mathbf{y})) \\
 & B & & A & \\
Y & \mapsto & BY & \mapsto & (AB)Y
\end{array}$$

Si B es la matriz asociada la aplicación lineal g y A es la matriz asociada a la aplicación lineal f, la matriz asociada a la aplicación lineal $f \circ g$ es AB

Comprobamos

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Con lo cual

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Otra manera de resolver este ejercicio es tener en cuenta que las columnas de la matriz de $f \circ g$ don los transformados de los elementos de la base. Así resulta que las columnas C_1 y C_2 de la matriz buscada serán:

$$C_1 = f \circ g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f\left(g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-2\\6\end{pmatrix}$$

$$C_2 = f \circ g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f\left(g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}$$