Febrero 2019 A problema a)

Problemas

a) (1 pto.) Si $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a un endomorfismo, calcular las ecuaciones cartesianas y dimensiones de los subespacios núcleo e imagen.

b) (1 pto.) Enunciar algún método numérico para resolver un sistema de ecuaciones lineales y mostrar sus pasos, es decir, cómo se aplica.

c) (1 pto.) Consideremos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ y una base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ cuyos elementos verifican, respecto del producto escalar $\bullet$:

$$\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j = i.j \quad \text{para} \quad i \neq j, \quad |\bar{e}_i|^2 = 1 + i^2 \qquad \text{para todo } i,\, j \in \{1,2,3,4\}.$$

Hallar la expresión de la matriz de Gram del producto escalar, $\bullet$, en la base B.

Respuesta del apartado a)

Comentario: *Endomorfismo* significa aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo. También se llama *transformación lineal*.

La expresión analítica del endomorfismo $f : R^3 \to R^3$ dado por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ es

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}$$

Es decir,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 = 4x_1 + 3x_2 \\ y_3 = 5x_1 + 5x_2 + x_3 \end{cases}$$

El Núcleo de f son las soluciones del sistema $f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (El conjunto de los vectores que se transforman en el vector cero).

$$\text{Nuc}(f) \equiv \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Para hallar la solución general de este sistema, y así describir el subespacio Nuc(*f*) en forma paramétrica utilizamos el método de eliminación de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A la vista de la forma escalonada, concluimos que la matriz *A* tiene rango igual a 2.

El sistema que define el Núcleo de *f* es un sistema de dos ecuaciones lineales linealmente independientes con tres incógnitas. La solución general depende de un parámetro $x_3 = \lambda$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -5x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}\lambda \\ x_2 = -\frac{4}{5}\lambda \\ x_3 = \lambda \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 3\lambda \\ x_2 = -4\lambda \\ x_3 = 5\lambda \end{cases}$$

Comentario: Hemos cambiado de parámetro para evitar utilizar fracciones

De modo que

$$\text{Nuc}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La dimensión del Núcleo de f es uno.

$$\dim(\text{Nuc}(f)) = 1$$

El espacio *Imagen de f* es el subespacio del espacio final generado por los transformados de los elementos de la base del espacio inicial. Es decir, Im(*f*) es el espacio generado por los vectores columna de la matriz asociada a la aplicación lineal *f*.

$$\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Usando el método de eliminación de Gauss buscamos un sistema de generadores linealmente independiente, reduciéndolo a un sistema escalonado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues,

$$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La dimensión de la imagen de *f* es dos.

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$$

Comentario: En una matriz el rango por filas es igual al rango por columnas.

Unas ecuaciones paramétricas de Im(*f*) son:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 4\lambda + \mu \\ x_3 = 5\lambda + \mu \end{cases}$$

Eliminando parámetros, obtendremos las ecuaciones implícitas de Im(*f*).

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - 4x_1 & x_3 - 5x_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

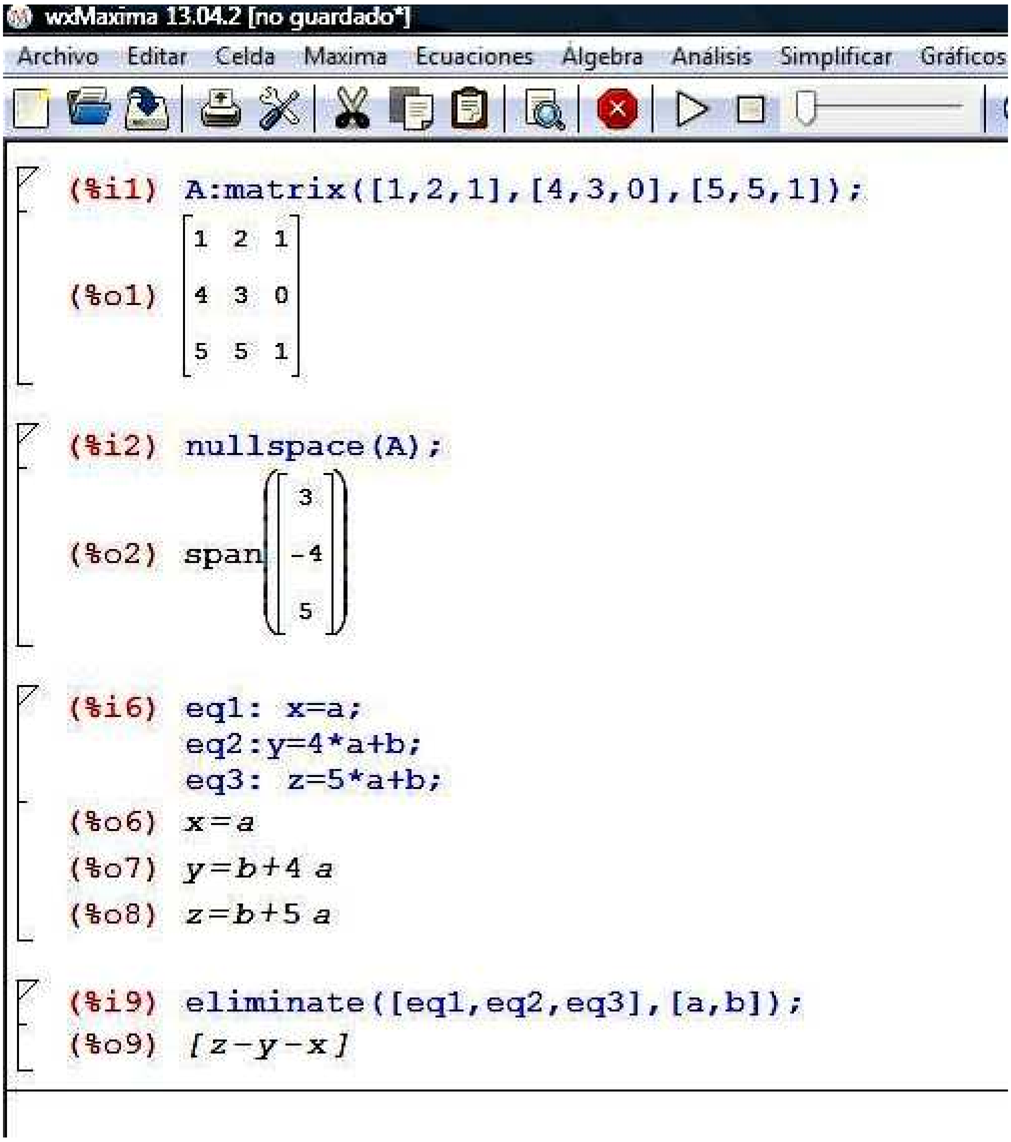
Para que el rango de la matriz sea 2 tiene que ocurrir que

$$\{x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

Comentario: Se comprueba la fórmula

$$\dim(\mathrm{Nuc}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(R^3)$$

$$1 + 2 = 3$$


wxMaxima 13.04.2 [no guardado*]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos
(%i1) A:matrix([1,2,1],[4,3,0],[5,5,1]);
(%o1)
1 2 1
4 3 0
5 5 1
(%i2) nullspace(A);
(%o2) span
3
-4
5
(%i6) eq1: x=a;
eq2:y=4*a+b;
eq3: z=5*a+b;
(%o6) x=a
(%o7) y=b+4 a
(%o8) z=b+5 a
(%i9) eliminate([eq1,eq2,eq3],[a,b]);
(%o9) [z-y-x]