Febrero 2018 A Ejercicio 3

$\boxed{\textbf{Ejercicio 3}}$ Halle una base del subespacio núcleo de la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y,z) = (x, y-z, 0).$$

Respuesta.

Si escribimos la aplicación lineal *f* en forma matricial

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Comentario: Observar que las columnas de la matriz son los transformados de los elementos de la base:

$f(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$; $f(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$; $f(0, 0, 1) = (0, -1, 0)$;

Comentario: Recordando la definición de núcleo de una aplicación lineal f: $V \to W$

$$\mathrm{Nuc}(f) = \{\mathbf{x} \in V \text{ tal que } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

Analíticamente, el Nuc(*f*) son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

En nuestro caso, las ecuaciones implícitas de Nuc(*f*) son

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Claramente es un sistema escalonado de dos ecuaciones linealmente independientes con tres incógnitas, por lo que la solución general depende de un parámetro.
Por ejemplo, haciendo $z = \lambda$, resulta

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es decir,

$$\text{Nuc}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Comentario: La dimensión del Núcleo de f es 1.

$$\dim(\text{Nuc}(f)) = 1$$

Aunque no se pide en el ejercicio, vamos a calcular también el espacio Im(f)

Comentario: Recordando la definición de Im(f)

$$\text{Im}\,(f) = \{\, \mathbf{y} \in W \text{ tal que } \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \text{ para algún } \mathbf{x} \in V \}$$

Im(f) es el subespacio del espacio final que está generado por los transformados de una base del espacio original

$$\text{Im}\,(f) = \langle f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n) \rangle$$

Analíticamente, una vez establecidas las bases de referencia en los espacios original y final, Im(f) es el subespacio generado por los vectores columna de la matriz asociada a la aplicación f.
En nuestro caso

$$\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 \text{ tales que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

Luego las ecuaciones paramétricas de Im(f) son

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$$

Eliminando parámetros, la forma implícita de Im(f) es la ecuación

$$z = 0.$$

Comentario: Recordamos el método general de eliminar parámetros unando el método de eliminación de Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & z \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Para que el rango de la última matriz sea 2, tiene que ocurrir que $z = 0$.

La dimensión de la Imagen de *f* es

$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$$

Comentario: Se verifica que la suma de las dimensiones del Núcleo y la Imagen de una aplicación lineal es la dimensión del espacio inicial.

$$\dim(\mathrm{Nuc}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$$