EJEMPLOS DE DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES Y MATRICES DE JORDAN

Dimensión *n* = 2

EJEMPLO 1 $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 0\lambda + (-1) = \lambda^2 - 1$$

Comentario: Los coeficientes del polinomio característico son *invariantes* al cambio de base, es decir, no dependen de la expresión analítica del endomorfismo.

Para el caso de matrices cuadradas de orden 2, los coeficientes del polinomio característico son:

- Coeficiente de λ^2: +1
- Coeficiente de λ: $-(a_{11} + a_{22})$ (El opuesto de la traza de la matriz)
- Término independiente: $+\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (El determinante de la matriz)

- Autovalores

Las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \to \qquad \lambda = 1 \qquad\qquad \lambda = -1$$

- Autoespacios

$$E(1) = \{(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \left\{\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{x - 2y = 0 = \left\langle\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle\right.$$

$$E(-1) = \{(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \left\{\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{x - y = 0 = \left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle\right.$$

- Expresión diagonal, J, y matriz de paso, P, tal que $J = P^{-1}AP$

En este caso, para cada autovalor, su multiplicidad es igual a la dimensión de su autoespacio. Por tanto, admite una expresión diagonal respecto de la base que está formada por los autovectores. Por consiguiente, la matriz de paso tendrá por columnas los autovectores, en el orden en el que aparecen los autovalores en la diagonal.

Así pues,

$$J=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad\qquad P=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

EJEMPLO 2 $\quad A=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

- Polinomio característico

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}0-\lambda & 2\\ -2 & 4-\lambda\end{pmatrix}=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$$

- Autovalores

$$(\lambda-2)^2=0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = 2 \text{ (doble)}$$

- Autoespacios

$$E(2)=\left\{\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}=\left\{x-y=0=\left\langle\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle\right.$$

- Expresión diagonal, J, y matriz de paso, P, tal que $J = P^{-1}AP$

Como en este caso la multiplicidad del autovalor es diferente de la dimensión del autoespacio no admite expresión diagonal, pero sí una expresión en forma de matriz de Jordan.

Comentario: Para determinar la matriz de Jordan hay que tener en cuenta lo siguiente (ver página 169 del libro de teoría):

1) El número de bloques correspondientes a cada valor propio es la dimensión del autoespacio asociado. Es decir la multiplicidad geométrica.

2) Los bloques correspondientes a un mismo valor propio se disponen sobre la diagonal principal consecutivamente, de modo que sus tamaños sean no crecientes.

3) Tiene en la diagonal secundaria tantos “1” como vectores no propios se necesitan para completar una base de vectores propios.

En nuestro caso

$$J=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz de paso P, tal que $J = P^{-1}AP$, necesitamos buscar una base respecto de la cual el endomorfismo tenga la expresión de Jordan

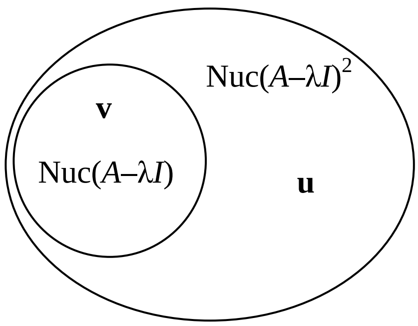
Para ello, primero, hacemos la sucesión de núcleos de las sucesivas potencias de $(A - \lambda I)$

$$\mathrm{Nuc}(A - \lambda I) \subset \mathrm{Nuc}(A - \lambda I)^2$$

En nuestro caso:

$$\mathrm{Nuc}\,(A - \lambda I) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right.$$

$$\mathrm{Nuc}\,(A - \lambda I)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R^2 \right.$$



Buscamos un vector **u** que esté en $\mathrm{Nuc}(A–\lambda I)^2$, pero que no esté en $\mathrm{Nuc}(A–\lambda I)$

Por ejemplo, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculamos $\mathbf{v} = (A–\lambda I)\,\mathbf{u}$

En nuestro caso $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

Comentario: El vector $\mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A - \lambda I)$

En efecto, $(A - \lambda I)\mathbf{v} = (A - \lambda I)\,(A - \lambda I)\mathbf{u} = (A - \lambda I)^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Para construir la matriz de paso, debemos elegir adecuadamente la base de referencia. Para ello tenemos en cuenta que

$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

$(A - \lambda I)\,\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad A\,\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$

Si consideramos la base $B = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}\}$, en ese orden se tiene que

$$A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A\,\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Así pues,

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimensión *n* = 3

EJEMPLO 3 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 0-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1 = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)$$

Comentario: Los coeficientes del polinomio característico son *invariantes* al cambio de base, es decir, no dependen de la expresión analítica del endomorfismo.

Para el caso de matrices cuadradas de orden 3, los coeficientes del polinomio característico son:

- Coeficiente de λ^3: (–1)
- Coeficiente de λ^2: + ($a_{11} + a_{22} + a_{33}$) (La traza de la matriz)
- Coeficiente de λ: $-\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\right)$ (El opuesto de la suma de los adjuntos de los elementos de la diagonal).
- Término independiente: $+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (El determinante de la matriz)

- Autovalores

Son las raíces del polinomio característico

$\lambda = 1$ (doble) $\qquad\qquad \lambda = -1$ (simple)

- Autoespacios

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ x - y - z = 0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right.$$

$$E(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array} \right. = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Expresión diagonal, J, y matriz de paso, P, tal que $J = P^{-1}AP$.

En este caso, para cada autovalor, su multiplicidad es igual a la dimensión de su autoespacio. Por tanto, admite una expresión diagonal respecto de la base que está formada por los autovectores. Por consiguiente, la matriz de paso tendrá por columnas los autovectores, en el orden en el que aparecen los autovalores en la diagonal.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 4 $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 3 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda + 8 = -(\lambda + 2)^2 (\lambda - 2)$$

- Autovalores

$\lambda = 2$ (simple) $\qquad\qquad$ $\lambda = -2$ (doble)

- Autoespacios

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{cases} 2x - 3y - z = 0 \\ -4y - 4z = 0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E(-2) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Expresión diagonal, J, y matriz de paso, P, tal que $J = P^{-1}AP$.

En este caso no va a poder encontrarse una expresión diagonal, ya que para el autovalor $\lambda = -2$ su multiplicidad no es igual a la dimensión de su autoespacio.

Sin embargo, sí va a haber una expresión mediante una matriz de tipo Jordan

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Para el caso del autoespacio $E(2)$ no hay ningún problema y su autovector será el tercer vector de la base.

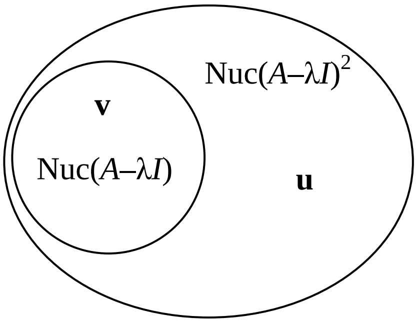
Para hallar una base del subespacio $E(-2)$ tenemos que considerar la cadena de núcleos de las sucesivas potencias de $(A - \lambda I)$

$$\text{Nuc}(A - \lambda I) \subset \text{Nuc}(A - \lambda I)^2$$

En nuestro caso:

$$\text{Nuc}\,(A - \lambda I) = E(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\text{Nuc}\,(A - \lambda I)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ x + y = 0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right.\right.$$



Buscamos un vector **u** que esté en Nuc(A–λI)^2, pero que no esté en Nuc(A–λI)

Por ejemplo, **u** = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculamos **v** = (A–λI) **u**

En nuestro caso, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Comentario: El vector **v** ∈ Nuc(A – λI)

Para construir la matriz de paso, debemos elegir adecuadamente la base de referencia.
Para ello tenemos en cuenta que

$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

$(A - \lambda I)\,\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad A\,\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$

Si consideramos la base B = {**v**, **u, w**}, en ese orden se tiene que

$$A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A\,\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector **w** es la base de $E(2)$.

Así pues,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 5 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & -3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 6\lambda^2 - 12\lambda - 8 = -(\lambda+2)^3$$

- Autovalores

$$\lambda = -2 \ \text{(triple)}$$

- Autoespacios

$$E(-2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{cases} y - z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Expresión diagonal J y matriz de paso P, tal que $J = P^{-1}AP$.

En este caso, como la multiplicidad del autovalor no coincide con la dimensión de su autoespacio, no habrá expresión diagonal, pero sí una forma de Jordan.

La matriz de Jordan tendrá una única caja de Jordan con dos "1" en la diagonal secundaria (ver página 169 del libro de teoría).

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz de paso, P, estudiamos la serie núcleos de las potencias de $(A - \lambda I)$

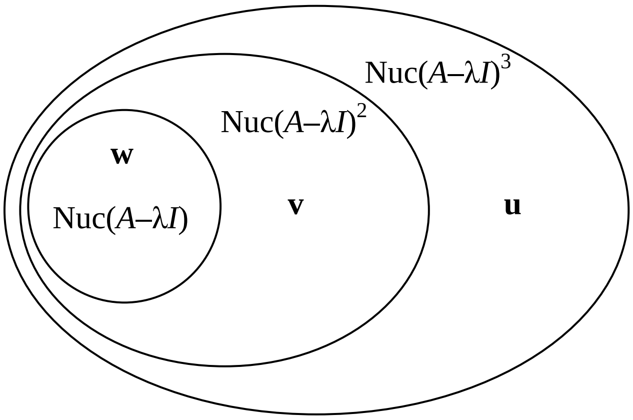
$$\mathrm{Nuc}(A - \lambda I) \subset \mathrm{Nuc}(A - \lambda I)^2 \subset \mathrm{Nuc}(A - \lambda I)^3$$

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nuc}\,(A-\lambda I)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ -x+z=0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \right. \right.$$

$$(A-\lambda I)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nuc}\,(A-\lambda I)^3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R^3 \right.$$



Elegimos un vector **u** que esté en Nuc(A–λI)^3, pero que no esté en Nuc(A–λI)^3. Por ejemplo,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A partir de este vector calculamos

$$\mathbf{v} = (A–\lambda I)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w} = (A–\lambda I)\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Tal como se han calculado estos vectores se tiene que

$$(A-\lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{w} \qquad \rightarrow \qquad A\mathbf{v} = \mathbf{w} + \lambda\mathbf{v} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)\mathbf{u} = \mathbf{v} \qquad \rightarrow \qquad A\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, considerando la base $B = \{\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{u}\}$, en efecto, la matriz, J, del endomorfismo es la que tiene por columnas los transformados de los elementos de la base.
Así pues, la matriz, P, del cambio de base es la que tiene por columnas los elementos de la base.

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJEMPLO 6 $\quad A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda+1)^3$$

- Autovalores

$$\lambda = -1 \ \text{(triple)}$$

- Autoespacios

$$E(-1)=\left\{\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{-x+z=0=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle\right.$$

- Expresión diagonal, J, y matriz de paso, P, tal que $J = P^{-1}AP$.

En este caso, como la multiplicidad del autovalor no coincide con la dimensión de su autoespacio, no habrá expresión diagonal, pero sí una forma de Jordan.

La matriz de Jordan tendrá dos cajas de Jordan con un "1" en la diagonal secundaria (ver página 169 del libro de teoría). Por tanto, la matriz de Jordan será:

$$J=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz de paso P, tal que $J = P^{-1}AP$, necesitamos buscar una base respecto de la cual el endomorfismo tenga la expresión de Jordan, J.

Para ello, primero, hacemos la sucesión de núcleos de las sucesivas potencias de $(A - \lambda I)$

$$\text{Nuc}(A-\lambda I)\subset\text{Nuc}(A-\lambda I)^2\subset\text{Nuc}(A-\lambda I)^3\subset\ldots..$$

En nuestro caso:

$$\text{Nuc}\,(A-\lambda I)=E(-1)=\left\{\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right.=\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$\text{Nuc}\,(A-\lambda I)^2=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right.=R^3$$

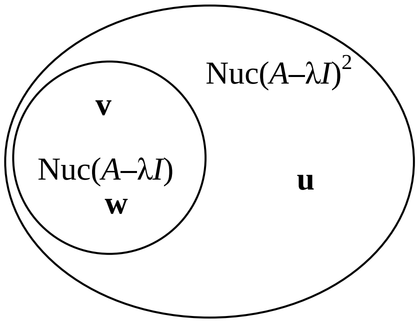
Buscamos un vector **u** que esté en $\text{Nuc}(A-\lambda I)^2$, pero que no esté en $\text{Nuc}(A-\lambda I)$

Por ejemplo, **u** = $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Calculamos **v** = $(A-\lambda I)$ **u**

En nuestro caso, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Comentario: El vector $\mathbf{v} \in \text{Nuc}(A - \lambda I)$



Ahora debemos buscar un vector **w** que, junto con **v**, forme una base de Nuc($A - \lambda I$)
Por ejemplo,

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comentario: Vamos a ver en qué orden tenemos que elegir los vectores de la base para obtener la forma de Jordan que deseamos.

Como **w** y **v** pertenecen al Nuc($A - \lambda I$) se tiene que

$(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad A\,\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$

$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \rightarrow \qquad A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Además, tal como se ha definido **v**,

$(A - \lambda I)\,\mathbf{u} = \mathbf{v} \qquad \rightarrow \qquad A\,\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$

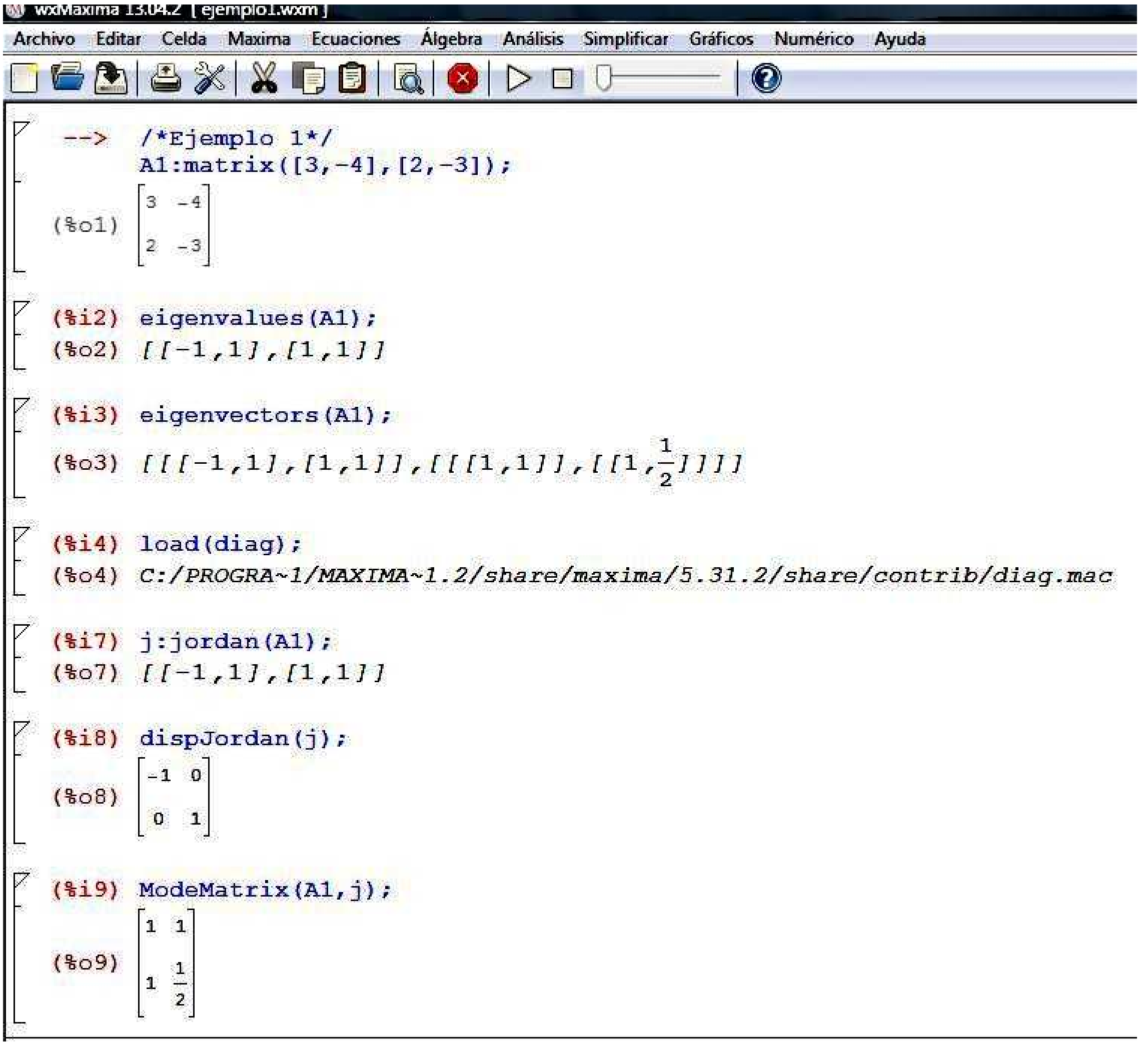
Si consideramos la base $B = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$, en ese orden se tiene que

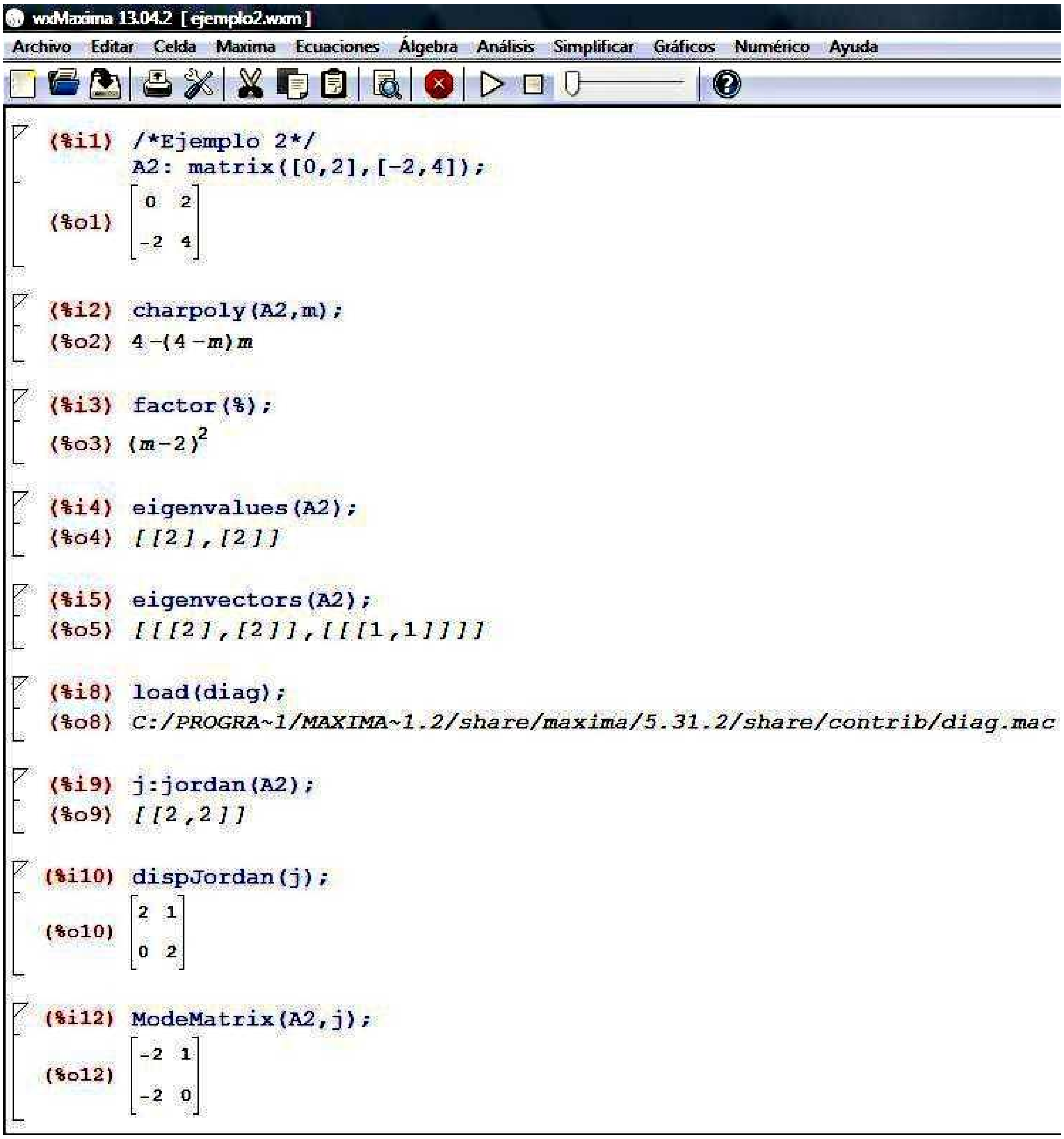
$A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\,\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\,\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$

Resulta, que en este caso, para esta matriz de Jordan, la matriz de paso, P, que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base es:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La comprobación de que, en efecto, $J = P^{-1}AP$, la hacemos viendo la igualdad equivalente $PJ = AP$. (De esta manera nos ahorramos calcular la inversa de una matriz)


wxMaxima 13.04.2 [ejemplo1.wxm]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda
--> /*Ejemplo 1*/
A1:matrix([3,-4],[2,-3]);
(%o1) $\begin{bmatrix}3 & -4\\2 & -3\end{bmatrix}$
(%i2) eigenvalues(A1);
(%o2) [[-1,1],[1,1]]
(%i3) eigenvectors(A1);
(%o3) $[[[-1,1],[1,1]],[[[1,1]],[[1,\frac{1}{2}]]]]$
(%i4) load(diag);
(%o4) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/contrib/diag.mac
(%i7) j:jordan(A1);
(%o7) [[-1,1],[1,1]]
(%i8) dispJordan(j);
(%o8) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
(%i9) ModeMatrix(A1,j);
(%o9) $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$


wxMaxima 13.04.2 [ejemplo2.wxm]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda
(%i1) /*Ejemplo 2*/
A2: matrix([0,2],[-2,4]);
(%o1) [0 2; -2 4]
(%i2) charpoly(A2,m);
(%o2) 4-(4-m)m
(%i3) factor(%);
(%o3) (m-2)^2
(%i4) eigenvalues(A2);
(%o4) [[2],[2]]
(%i5) eigenvectors(A2);
(%o5) [[[2],[2]],[[[1,1]]]]
(%i8) load(diag);
(%o8) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/contrib/diag.mac
(%i9) j:jordan(A2);
(%o9) [[2,2]]
(%i10) dispJordan(j);
(%o10) [2 1; 0 2]
(%i12) ModeMatrix(A2,j);
(%o12) [-2 1; -2 0]

wxMaxima 13.04.2 [ejemplo3.wxm]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i13) /*Ejemplo 3*/
A3: matrix([1,0,0],[1,0,-1],[1,-1,0]);

(%o13) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

(%i14) charpoly(A3,m);

(%o14) $(1-m)(m^2-1)$

(%i15) factor(%);

(%o15) $-(m-1)^2(m+1)$

(%i16) eigenvalues(A3);

(%o16) [[-1,1],[1,2]]

(%i17) eigenvectors(A3);

(%o17) [[[-1,1],[1,2]],[[[0,1,1]],[[1,0,1],[0,1,-1]]]]

(%i18) load(diag);

(%o18) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/contrib/diag.mac

(%i19) j:jordan(A3);

(%o19) [[-1,1],[1,1,1]]

(%i20) dispJordan(j);

(%o20) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i21) ModeMatrix(A3,j);

(%o21) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

wxMaxima 13.04.2 [ejemplo4.wxm]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Algebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i22) /*Ejemplo 4*/
A4: matrix([0,3,1],[2,-1,-1],[-2,-1,-1]);

(%o22) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(%i23) charpoly(A4,m);

(%o23) $-\left((-m-1)^2-1\right)m+2(-m-1)-3(2(-m-1)-2)-2$

(%i24) factor(%);

(%o24) $-(m-2)(m+2)^2$

(%i25) eigenvalues(A4);

(%o25) [[2,-2],[1,2]]

(%i26) eigenvectors(A4);

(%o26) [[[2,-2],[1,2]],[[[1,1,-1]],[[1,-1,1]]]]

(%i27) load(diag);

(%o27) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/contrib/diag.mac

(%i28) j:jordan(A4);

(%o28) [[2,1],[-2,2]]

(%i29) dispJordan(j);

(%o29) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(%i30) ModeMatrix(A4,j);

(%o30) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

wxMaxima 13.04.2 [ejemplo5.wxm]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Algebra Analisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

```
(%i40) /*Ejemplo 5*/
       A5: matrix([-2,1,-1],[-1,-1,0],[0,1,-3]);
```

$$(\%o40)\quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

```
(%i41) charpoly(A5,m);
```

$$(\%o41)\quad -m+(-m-3)(-m-2)(-m-1)-2$$

```
(%i42) factor(%);
```

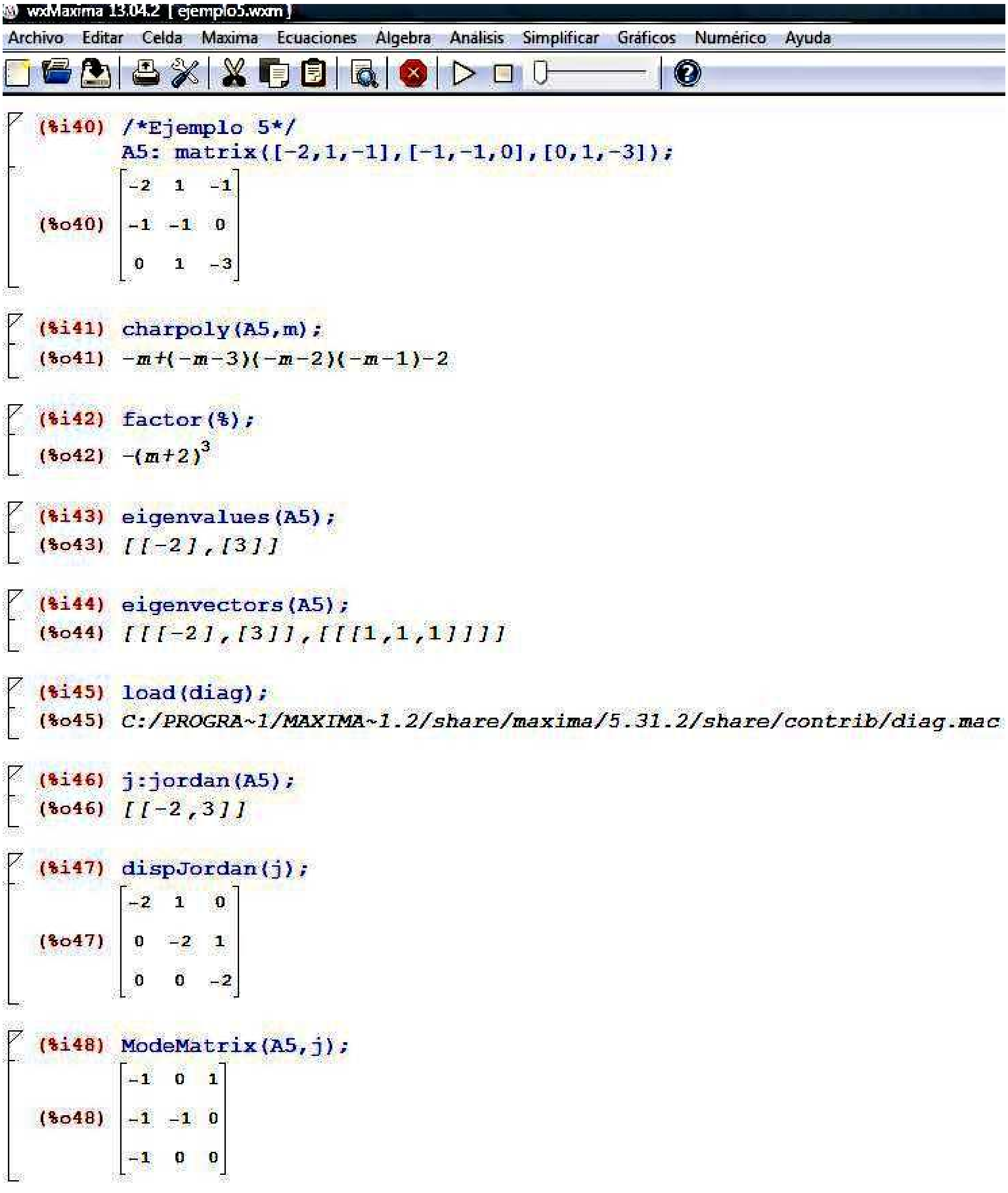
$$(\%o42)\quad -(m+2)^3$$

```
(%i43) eigenvalues(A5);
(%o43) [[-2],[3]]
(%i44) eigenvectors(A5);
(%o44) [[[-2],[3]],[[[1,1,1]]]]
(%i45) load(diag);
(%o45) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/contrib/diag.mac
(%i46) j:jordan(A5);
(%o46) [[-2,3]]
(%i47) dispJordan(j);
```

$$(\%o47)\quad \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

```
(%i48) ModeMatrix(A5,j);
```

$$(\%o48)\quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$


wxMaxima 13.04.2 [ejemplo5.wxm]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Algebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda
(%i40) /*Ejemplo 5*/
A5: matrix([-2,1,-1],[-1,-1,0],[0,1,-3]);
(%o40) [-2 1 -1; -1 -1 0; 0 1 -3]
(%i41) charpoly(A5,m);
(%o41) -m+(-m-3)(-m-2)(-m-1)-2
(%i42) factor(%);
(%o42) -(m+2)^3
(%i43) eigenvalues(A5);
(%o43) [[-2],[3]]
(%i44) eigenvectors(A5);
(%o44) [[[-2],[3]],[[[1,1,1]]]]
(%i45) load(diag);
(%o45) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/contrib/diag.mac
(%i46) j:jordan(A5);
(%o46) [[-2,3]]
(%i47) dispJordan(j);
(%o47) [-2 1 0; 0 -2 1; 0 0 -2]
(%i48) ModeMatrix(A5,j);
(%o48) [-1 0 1; -1 -1 0; -1 0 0]

wxMaxima 13.04.2 [ejemplo6.wxm]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

```
(%i49) /*Ejemplo 6*/
       A6: matrix([-2,0,1],[0,-1,0],[-1,0,0]);
```

(%o49) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

```
(%i50) charpoly(A6,m);
```

(%o50) $-(-m-2)(-m-1)m-m-1$

```
(%i51) factor(%);
```

(%o51) $-(m+1)^3$

```
(%i52) eigenvalues(A6);
(%o52) [[-1],[3]]
```

```
(%i53) eigenvectors(A6);
(%o53) [[[-1],[3]],[[[1,0,1],[0,1,0]]]]
```

```
(%i54) load(diag);
(%o54) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/contrib/diag.mac
```

```
(%i55) j:jordan(A6);
(%o55) [[-1,2,1]]
```

```
(%i56) dispJordan(j);
```

(%o56) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

```
(%i57) ModeMatrix(A6,j);
```

(%o57) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$