PROBLEMAS de ECUACIONES LINEALES

orden superior

PEC 2013

Sea la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$

a) A partir de la solución $y_1 = x^{-1}$ obtener, aplicando el método de reducción de orden, una segunda solución y_2 linealmente independiente de la primera y, por consiguiente, su solución general

b) Aplíquese el método de variación de las constantes para obtener una solución particular de la ecuación no homogénea

$$x^2 y'' + x y' - y = x^2$$

y con ella la solución general

a) Es una ecuación lineal. Queda más claro si se escribe así:

$$y'' + \left(\frac{1}{x}\right) y' + \left(-\frac{1}{x^2}\right) y = 0$$

comprobamos que $y_1 = \frac{1}{x}$ verifica la ecuación

$$y_1 = \frac{1}{x} \; ; \; y_1' = -\frac{1}{x^2} \; ; \; y_1'' = \frac{2}{x^3}$$

En efecto, verifica la ecuación

$$x^2\left(\frac{2}{x^3}\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

En el método de reducción de orden se hace el cambio

$$\boxed{y = y_1 \cdot u}$$

En nuestro caso $y = \frac{1}{x} u$

$$y' = -\frac{1}{x^2} u + \frac{1}{x} u'$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} u - \frac{1}{x^2} u' + \left(-\frac{1}{x^2}\right) u' + \frac{1}{x} u''$$

$$= \frac{2}{x^3} u - \frac{2}{x^2} u' + \frac{1}{x} u''$$

Sustituyendo en la ecuación

$$x^2\left(\frac{2}{x^3}u - \frac{2}{x^2}u' + \frac{1}{x}u''\right) + x\left(-\frac{1}{x^2}u + \frac{1}{x}u'\right) - \frac{1}{x}u = 0$$

$$\frac{2}{x}u - 2u' + xu'' - \frac{1}{x}u + u' - \frac{1}{x}u = 0$$

$$xu'' + u'(-2+1) + u\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$xu'' - u' = 0$$

Se hace el cambio $u' = w$

$$xw' - w = 0$$

$$x\frac{dw}{dx} - w = 0$$

Es una ecuación de varibles separables

$$x\frac{dw}{dx} = w \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{1}{x}dx$$

$$\int\frac{dw}{w} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(w) = \ln(x) + C$$

$$\ln(w) = \ln(x) + C \Rightarrow w = C_1 x$$

deshaciendo los cambios $(w = u')$

$$u = \int C_1 x\,dx = C_1\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$= C_1 x^2 + C_2$$

Deshaciendo $y = \frac{1}{x} u$

$$y = \frac{1}{x}\left(c_1 x^2 + c_2\right) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}$$

Luego son soluciones fundamentales

$$\left\{ y_1 = x \quad , \quad y_2 = \frac{1}{x} \right\}$$

La solución general de la homogenea

$$y = c_1 x + c_2 \left(\frac{1}{x}\right)$$

b) Para aplicar el método de variación de las constantes, ensayamos una función de la forma

$$y = c_1(x)\, x + c_2(x) \frac{1}{x}$$

Las funciones c_1' y c_2' deben verificar

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = F(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1' = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \dfrac{-y_2 F}{W} \\ c_2' = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \dfrac{y_1 F}{W} \end{cases}$$

En nuestro caso. ⑥

La ecuación lineal dada

es:

$$x^2y'' + xy' - y = x^2$$

escrita en forma canónica es así

$$y'' + \left(\frac{1}{x}\right)y' - \frac{1}{x^2}y = 1$$

En nuestro caso $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$; $F(x) = 1$

$$\begin{cases} c_1' x + c_2' \frac{1}{x} = 0 \\ c_1' 1 + c_2'\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & 1/x \\ 1 & -1/x^2 \end{vmatrix}} = \frac{x}{-\frac{2}{x}} = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow c_2 = \int -\frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{6}$$

con lo cual la solución particular de la completa es

$$y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 =$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot x - \frac{x^3}{6} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^2 =$$

$$= \frac{1}{3} x^2$$

Así pues la solución general de la completa es

$$y = \underbrace{C_1 x + C_2 \frac{1}{x}}_{y_H} + \underbrace{\frac{1}{3} x^2}_{y_p}$$

Junio 2018

Considere las funciones

$$y_1 = e^{-x};\quad y_2 = 2,\quad y_3 = 1 - e^{-x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

a) Aplicando la definición, verifique si son o no linealmente independientes

b) ¿Pueden formar las tres un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea?

c) Halle una ecuación diferencial lineal homogenea de orden 2 que tenga a las tres como solución.

d) Resuelva la ecuación no homogénea $L(y) = e^{-x}$ donde $L(y) = 0$ es la ecuación hallada en el apartado anterior.

a) $\{y_1 = e^{-x},\ y_2 = 2,\ y_3 = 1 - e^{-x}\}$ es un conjunto linealmente dependiente ya que obviamente y_3 es combinación lineal de $\{y_1, y_2\}$. En efecto,

$$y_3 = \frac{1}{2} y_2 - y_1$$

b) Como $\{y_1, y_2, y_3\}$ no son linealmente independientes no pueden formar un sistema fundamental de soluciones

c) como $\{y_1 = e^{-x}, y_2 = 2\}$ forman un sistema linealmente independiente

El espacio $\langle y_1, y_2, y_3 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle$

$$= \langle e^{-x}, 1 \rangle = \langle e^{-x}, e^{0x} \rangle$$

~~Son~~ raíces del polinomio característico

$$m_1 = -1, \quad m_2 = 0$$

Por tanto, el polinomio característico es

$$p(m) = (m+1)(m-0) = m^2 + m$$

Luego la ecuación lineal homogénea es

$$y'' + y' = 0$$

Esto se podría haber hecho usando el Wronskiano

Si una función y es de la forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$\Rightarrow W(y, y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

En nuestro caso

$$\begin{vmatrix} y & e^{-x} & 1 \\ y' & -e^{-x} & 0 \\ y'' & e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \begin{vmatrix} y' & -e^{-x} \\ y'' & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} \begin{vmatrix} y' & -1 \\ y'' & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-x}(y' + y'') = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow y'' + y' = 0$$

La solución general de la homogenea es

$$\boxed{y_H = c_1 + c_2 e^{-x}}$$

d) Para buscar una solución particular de la completa

$$y'' + y' = e^{-x}$$

Vamos a utilizar el método de identificación de coeficientes como el término forzado $F(x)=e^{-x}$

es una de las soluciones de la homogenea tenemos que ensayar

$$y_p = Axe^{-x}$$

Calculamos las derivadas

$$y_p' = Ae^{-x} - Axe^{-x}$$

$$y_p'' = -Ae^{-x} - (Ae^{-x} - Axe^{-x})$$

$$= -2Ae^{-x} + Axe^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$-2Ae^{-x} + \cancel{Axe^{-x}} + Ae^{-x} - \cancel{Axe^{-x}} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$$

Por tanto

$$y_p = -xe^{-x}$$

Luego la solución general es

$$\boxed{y = \underbrace{-xe^{-x}}_{y_p} + \underbrace{c_1 + c_2 e^{-x}}_{y_H}}$$

Junio 2020

Dada la ecuación lineal

$$y''' - 3y'' + 4y = 8x$$

A) $\{e^{2x}, e^{-x}, xe^{-x}\}$ es un sistema fundamental de la homogénea asociada

B) La solución general de la homogénea asociada es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

C) Admite una solución particular de la forma

$$y_p = b_1 x + b_2$$

$$b_1 \neq 0, \quad b_2 \neq 0$$

D) Ninguna de las anteriores

Se trata de una ecuación lineal de tercer orden con coeficientes constantes

1º Sol. general de la homogénea

Para hallar la solución general de la homogénea

$$y''' - 3y'' + 4y = 0$$

Resolvemos el polinomio característico

$$m^3 - 3m^2 + 4 = 0$$

tanteamos usando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & -3 & 0 & 4 \\
-1 & & -1 & 4 & -4 \\
\hline
 & 1 & -4 & 4 & \boxed{0} \\
2 & & 2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & -2 & \boxed{0} & \\
2 & & 2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Las raíces del polinomio característico

$$m^3 - 3m^2 + 4 = (m+1)(m-2)^2 = 0$$

Son $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \quad (\text{doble}) \end{cases}$

Luego las soluciones fundamentales son $\{e^{(-1)x}, e^{2x}, xe^{2x}\}$

La solución general de la ec. homogénea es

2º Solución particular de la completa

(Hay varios métodos)

A) Método de los coeficientes indeterminados

Como el término forzado es de grado 1 y existe término en y, ensayamos un polinomio de grado uno

$$y_p = Ax + B$$

$$y_p' = A \ ; \ y_p'' = 0 \ ; \ y''' = 0$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$0 - 3 \cdot 0 + 4(Ax + B) = 8x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A = 8 \Rightarrow A = 2 \\ B = 0 \end{cases}$$

por tanto, una solución particular es $y_p = 2x$

3º/ La solución general de la completa

$$\boxed{y = \underbrace{2x}_{y_p} + \underbrace{C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}}_{y_H}}$$

NO ES RECOMENDABLE

B) Método de variación de las constantes

Para hallar la solución particular de la completa

$$\therefore H(D)\, y = F(x)$$

Se busca una solución particular de la forma

$$y_p = c_1(x)\, e^{-x} + c_2(x)\, e^{2x} + c_3(x)\, x e^{2x}$$

Con las condiciones

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = F(x) \end{cases}$$

Se aplica la regla de Cramer

(Hecho con WOLFRAM-ALPHA)

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} & e^{2x} + 2e^{2x} x \\ e^{-x} & 4e^{2x} & 4e^{2x} + 4e^{2x} x \end{vmatrix}$$

$$= 9 e^{3x}$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{2x}x \\ 0 & 2e^{2x} & e^{2x}+2e^{2x}x \\ 1 & 4e^{2x} & 4e^{2x}+4e^{2x}x \end{vmatrix} F(x)}{9e^{3x}} = \frac{e^{4x}}{9e^{3x}} =$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 & e^{2x}x \\ -e^{-x} & 0 & e^{2x}+2e^{2x}x \\ e^{-x} & 1 & 4e^{2x}+4e^{2x}x \end{vmatrix} F(x)}{9e^{3x}} = \frac{-e^{x}(3x+1}{9e^{3x}}$$

$$C_3' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} & 0 \\ -e^{-x} & 2e^{2x} & 0 \\ e^{-x} & 4e^{2x} & 1 \end{vmatrix} F(x)}{9e^{3x}} = \frac{e^{3x}}{9e^{3x}}$$

Integrado

$$C_1 = \int \frac{8e^{x}x}{9}\,dx = \frac{8}{9}e^{x}(x-1)$$

$$C_2 = \int -\frac{8}{9}e^{-2x}x(3x+1)\,dx =$$

$$= -\frac{8}{9}e^{-2x}\left(-\frac{3x^2}{2}-2x-1\right)$$

$$c_3 = \int \frac{8}{3} e^{-2x} x \, dx = \frac{8}{3} e^{-2x} \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

Con lo cual

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 =$$

$$= \frac{8(x-1)}{9} - \frac{8}{9} \left(-\frac{3x^2}{2} - 2x - 1 \right) + \frac{8}{3} x \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

$$= 2x$$

c/ Método operacional

$$(D^3 - 3D^2 + 4) y = 8x$$

$$y_p = \frac{1}{(D^3 - 3D^2 + 4)} (8x) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} D^2 + \dots \right)(8x) =$$

$$= 2x + 0 + \dots$$

$$= 2x$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 4 - 3D^2 + D^3 \\ \hline -\cancel{1} + \frac{3}{4} D^2 - \frac{1}{4} D^3 & \frac{1}{4} + \frac{3}{16} D^2 \dots \\ \hline \frac{3}{4} D^2 - \frac{1}{4} D^3 & \\ -\frac{3}{4} D^2 + \frac{9}{16} D^4 - \frac{3}{16} D^5 & \end{array}$$

PEC - 2019

En la ecuación lineal no homogenea

$$H(D)\,y = 2e^{x}$$

donde $H(D)$ es el polinomio operacional

$$H(D) = D^2 + pD + 6$$

Se pide

a) Hallar el valor de $\underline{p}$ y la solución de la ecuación homogénea asociada, sabiendo que $r=3$ es una raíz de su ecuación característica

b) Una solución particular de la ecuación completa, utilizando el método de variación de las constantes

c) Solución general de la ecuación completa

a) El polinomio característico es

$P(r) = r^2 + pr + 6$

Si $r=3$ es una raíz, $P(3)=0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & p & 6 \\ 3 & & 3 & 3p+9 \\ \hline & 1 & p+3 & \boxed{3p+15} \end{array} = P(3)$$

$3p + 15 = 0 \Rightarrow p = -5$

Con lo cual

$$P(r) = r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2)$$

y las raíces son $\begin{cases} r = 3 \\ r = 2 \end{cases}$

La ecuación lineal homogene

$$H(D)\,y = 0$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

tiene como solución general

$$\boxed{y_H = c_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}}$$

b) Para buscar una solución particular de la completa

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^{x}$$

por el método de variación de las constantes ensayamos

$$y_p = C_1(x)\, e^{2x} + C_2(x)\, e^{3x}$$

con las condiciones $\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = F(x) \end{cases}$

$$\begin{cases} c_1' e^{2x} + c_2' e^{3x} = 0 \\ c_1'\, 2e^{2x} + c_2'\, 3e^{3x} = 2e^{x} \end{cases}$$

Resolvemos para c_1' y c_2' usando la regla de Cramer

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 2e^{x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{-2e^{4x}}{e^{5x}} = -2e^{-x}$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 2e^{x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{2e^{3x}}{e^{5x}} = 2e^{-2x}$$

Integrando

$$C_1 = \int -2e^{-x}\,dx = 2e^{-x}$$

$$C_2 = \int 2e^{-2x}\,dx = -e^{-2x}$$

Por consiguiente

$$y_p = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} =$$
$$= 2e^{-x}\cdot e^{2x} - e^{-2x} e^{3x} =$$
$$= 2e^{x} - e^{x}$$
$$= e^{x}$$

Con lo cual la solución general de la ecuación es

$$y = \underbrace{C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}_{y_H} + \underbrace{e^{x}}_{y_p}$$

Observación: La solución particular de la completa también se podría haber encontrado ensayando

$$y_p = Ae^{x}$$

1) Aplíquese el teorema de existencia y unicidad para comprobar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = \cos(x) \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

tiene solución única, y hállese la solución

Si se expresa la ecuación en la forma $y' = f(x,y)$ el teorema de existencia y unicidad dice que

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0,y_0) \text{ continua} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) \text{ es continua} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{hay solución única en } (x_0 y_0)$$

En nuestro caso $\begin{cases} y' = -\dfrac{y}{x} \cos(x) \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x,y) = -\dfrac{y}{x} + \cos(x) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

son funciones continuas, salvo para el valor $x=0$. Por tanto, en el punto $(\pi, 1)$ la solución existe y es única

Para resolver la ecuación

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = \cos(x)$$

observamos que es una ecuación lineal de 1ª orden.

1) Solución general de la homogénea

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$ ← Es de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln(y) = -\ln(x) + C$$

$$\ln(y) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

$$y = C\frac{1}{x}$$ ← Solución general de la homogénea

Buscamos una solución particular de la completa por el método de variación de las constantes.
Ensayamos

$$\begin{cases} y_p = C(x) \cdot \dfrac{1}{x} \\ y'_p = C' \dfrac{1}{x} - C \dfrac{1}{x^2} \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$c' \frac{1}{x} - \cancel{c \frac{1}{x^2}} + \cancel{C \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x}} = \cos(x)$$

$$c' = x \cos(x)$$

integrando

$$c = \int x \cos(x)\, dx \underset{\uparrow}{=}$$

Por partes

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \sin(x) \end{cases}$$

$$= x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx =$$

$$= x \sin(x) + \cos(x)$$

Integración por partes

$$d(uv) = u\,dv + v\,du$$

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$uv = \int u\,dv + \int v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

sustituyendo

$$y_p = \left[x\sin(x) + \cos(x)\right] \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \sin(x) + \frac{\cos(x)}{x}$$

Con lo que la solución general de la ecuación

$$\boxed{y = \underbrace{\frac{C}{x}}_{y_H} + \underbrace{\sin(x) + \frac{\cos(x)}{x}}_{y_p}}$$