Capítulos 3 y 4

ECUACIONES de ORDEN SUPERIOR

(ECUACIONES LINEALES con coeficientes constantes)

- Definiciones generales
- Algunos casos que se resuelven inmediatamente.
- Ecuaciones lineales en general
- Ecuaciones lineales con coeficientes constantes
- Ecuaciones de Euler, (son ecuaciones lineales de coeficientes variables que se reducen a ecuaciones lineales con coeficientes constantes)

allave@madrid.uned.es

Trataremos de ecuaciones en las que aparecen derivadas de orden superior, con especial atención a las <u>ecuaciones lineales</u>.

La forma general de las Ecuaciones diferenciales de orden superior es

- Ecuaciones de orden $\underline{n}$ - en forma explícita

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1)})$$

- Ecuaciones de orden $\underline{n}$ de forma implícita

$$F(x, y, y', \ldots y^{n)}) = 0$$

- Problema de Cauchy: Se dan $\underline{n}$ condiciones iniciales $y_0 = y(x_0)$ $y_1 = y'(x_0)$ .... $y_{n-1} = y^{n-1)}(x_0)$

- Teorema de existencia y unicidad

El problema de Cauchy

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y' \ldots y^{n-1)}) \\ y_0 = y(x_0),\ y_1 = y'(x_0), \ldots y_{n-1} = y^{n-1)}(x_0 \end{cases}$$

tiene solución única en Ω garantiza cuando

1) f es continua en Ω

2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{y'}, \ldots \dfrac{\partial f}{\partial y^{n-1)}}$ son continuas en Ω

La familia de curvas que son solución general depende de $\underline{n}$ parámetros, $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Los valores se ajustan con las condiciones iniciales para obtener la solución única

- Algunos ejemplos de ecuaciones que se resuelven directamente

Ejemplo 1

$$\boxed{x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = 1}$$

no aparece y ni y' ni y''
solo aparece y''' y x

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3} \; ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \int \frac{1}{x^3}\, dx \; ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{2x^2} + C_1 \; ; \quad \frac{dy}{dx} = \int \left(-\frac{1}{2x^2} + C_1 \right) dx \; ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x} + C_1 x + C_2 \; ;$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2x} + C_1 x + C_2 \right) dx =$$

$$y = \frac{1}{2} \ln(x) + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

solución general que depende de 3 parámetros

Ejemplo 2

$$\boxed{y\,y'' - (y')^2 = 0}$$

Caso de que no aparece x

Se hace $p = y' \Rightarrow \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\underbrace{\dfrac{dy}{dx}}_{p} = p\dfrac{dp}{dy}$

$$y\,p\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

$$p\left(y\frac{dp}{dy} - p\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p = 0 = \dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y = cte & (*) \\ \underbrace{y\dfrac{dp}{dy} = p}_{\text{de variables separables}} \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x} & [**] \end{cases}$$

La solución (*) está incluida en [* *]

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{p}dp \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{p}dp$$

$$\ln(y) = \ln(p) + C$$

deso

$y = Cp$; $y = C\dfrac{dy}{dx}$; $\dfrac{1}{y}dy = c\,dx$

deshacemos el cambio

$$\ln(y) = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}$$

Ejemplo 3 La ecuación anterior

$$y\,y'' - (y')^2 = 0$$

También se puede resolver de otras maneras:

Dividiendo por y^2

$$\frac{y\,y''}{y^2} - \frac{(y')^2}{y^2} = 0$$

$$\frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2 = 0$$

Haciendo el cambio

$$z = \frac{y'}{y} \Rightarrow z' = \frac{y''y - y'y'}{y^2} = \frac{y''}{y} - \left(\frac{y'}{y}\right)^2$$

$$z' = 0 \Rightarrow z = cte$$

$$\frac{y'}{y} = C_1 \;; \qquad \frac{dy}{dx} = y C_1 \;;$$

$$\frac{dy}{y} = c_1 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int C_1 dx$$

$$\Rightarrow \ln(y) = C_1 x + C_2$$

$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

ECUACIONES LINEALES DE ORDEN SUPERIOR

Teoría general de las $\boxed{\text{ECUACIONES LINEALES}}$ con coeficientes variables de orden mayor que uno

(por simplificar escribimos de 2º orden)

$$\boxed{y'' + \alpha(x)\, y' + \beta(x)\, y = F(x)}$$

Interpretación funcional:

$$L(y) = F(x) \quad \text{donde } L = (D^2 + \alpha D + \beta)$$

L es un operador entre espacios funcionales

Resolver una ecuación es hallar $y = L^{-1}(F)$

- La ecuación homogénea: $L(y) = 0$

$$y'' + \alpha(x)\, y' + \beta(x)\, y = 0$$

Las soluciones de la ecuación homogénea forman un espacio vectorial generado por dos funciones $\{y_1, y_2\}$ linealmente independientes. Las funciones y_1, y_2 se llaman soluciones fundamentales

$$y_H = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$\leftarrow$ solución general de la homogénea

Un conjunto de funciones $\{y_1, y_2\}$ es linealmente independiente si el WORSKIANO es distinto de cero (función cero)

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

- La ecuación completa: $L(y) = F$

Si y_p es una solución particular de la ecuación completa $L(y_p) = F$

La <u>solución general</u> de una ecuación lineal es una solución particular de la completa más la solución general de la homogénea

$$\underset{\text{Solución general}}{y} = \underset{\text{Solución particular de la completa}}{y_p} + \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2}_{\text{solución general de la homogénea}}$$

<u>Caso más sencillo</u>: Ec. lineal con $\boxed{\text{COEFICIENTES CONSTANTES}}$

$$\boxed{y'' + a y' + b y = F(x)} \qquad [D^2 + aD + b]\, y = F$$

Solución general de la homogénea $L(y) = 0$

Se ensaya $y = e^{mx}$; $y' = m e^{mx}$; $y'' = m^2 e^{mx}$

$$m^2 e^{mx} + a m e^{mx} + b e^{mx} = 0$$

$$(m^2 + am + b)\, e^{mx} = 0 \Longrightarrow$$

$$(m^2 + am + b) = 0$$

Luego e^{mx} es solución de la homogénea si m es una raíz del <u>"polinomio característico"</u>

$$P(m) = m^2 + am + b$$

<u>Casos</u> 1) Si hay dos raíces reales distintas, m_1 y m_2,

$$y_1 = e^{m_1 x} \quad ; \quad y_2 = e^{m_2 x}$$

La solución general de la homogénea

$$\boxed{y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}}$$

2) Si hay una raíz real doble $\underline{m} = m_1 = m_2$

$y_1 = e^{mx}$ $\qquad y_2 = x e^{mx}$

La solución general de la homogénea

$$y = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx} =$$

$$\boxed{y = [c_1 + c_2 x] e^{m_1 x}}$$

3) Si tiene dos raíces complejas conjugadas

$m_1 = a + bi$ $\qquad m_2 = a - bi$

$y_1 = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$

$y_2 = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos(-b)x + i \sin(-b)x)$

$= e^{ax}(\cos bx - i \sin bx)$

La solución $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ (*) se satisface para la parte real y para la parte imaginaria con lo cual se pueden tomar como soluciones fundamentales reales:

$y_1 = e^{ax} \cos bx$ $\qquad y_2 = e^{ax} \sin bx$

$$\boxed{y = c_1 e^{ax} \cos(bx) + c_2 e^{ax} \sin(bx)}$$

$(*) = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1(e^{ax} \cos bx + i \sin bx) + c_2(e^{ax} \cos bx - i \sin bx) =$

$= [c_1 e^{ax} \cos bx + c_2 e^{ax} \cos bx] + i [c_1 e^{ax} \sin bx - c_2 \sin bx] =$

$= [(c_1 + c_2) e^{ax} \cos bx] + i [(c_1 - c_2) e^{ax} \sin bx] = [\tilde{C}_1 e^{ax} \cos(bx)] +$

$+ i [\tilde{C}_2 e^{a} \sin bx]$

(*) Para hallar la solución particular de la completa se pueden usar varios métodos.

El método de variación de las constantes

Se ensaya $y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$

considerando que c_1 y c_2 son funciones de x

cuyas derivadas verifican

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = F \end{cases} \Rightarrow$$

[*] Para ver la justificación en detalle ver otro documento "Método de variación de las constantes"

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 F}{W(y_1 y_2)}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 F}{W(y_1 y_2)}$$

Para hallar c_1 y c_2 se integra

$$c_1 = \int \frac{-y_2 F}{W(y_1 y_2)} dx \; ; \quad c_2 = \int \frac{y_1 F}{W(y_1 y_2)} dx$$

11

Ejemplo $\boxed{y'' + y = \dfrac{1}{\sin(x)}}$

* Solución general de la homogénea

$$m^2 + 1 = 0 \qquad \text{(polinomio característico)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = i \\ m = -i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = e^0 \cos 1x = \cos x \\ y_2 = e^0 \sin 1x = \sin x \end{cases}$$

las solución general de la homogénea es

$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

* Solución particular de la completa por el método de variación de las constantes

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$c_1 = \int \frac{-y_2 F}{W(y_1 y_2)} dx = \int - \frac{\sin x \frac{1}{\sin x}}{1} dx =$$

$$= \int -dx = -x$$

$$c_2 = \int \frac{y_1 F}{W(y_1, y_2)} dx = \int \frac{\cos x \cdot \frac{1}{\sin x}}{1} dx =$$

$$= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln(\sin x)$$

Por tanto,

$$y_p = \underbrace{-x}_{c_1} \underbrace{\cos x}_{y_1} + \underbrace{\ln(\sin x)}_{c_2} \underbrace{\sin x}_{y_2}$$

• La solución de la ecuación $y = y_p + y_H$

$$y = \underbrace{-x\cos x + \ln(x)\sin x}_{y_p} + \underbrace{C_1\cos x + C_2\sin x}_{y_H}$$

En algunos casos especiales, cuando la función $F(x)$ es sencilla (polinomio, exponencial, trigonométrica) se pueden usar otros métodos para hallar la solución particular

— Método operacional

— Identificación de coeficientes

Principio de Superposición

Si $\begin{cases} y_{p1} \text{ es solución particular de } L(y) = F_1 \\ y_{p2} \text{ es solución particular de } L(y)\, F_2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ $y_{p1} + y_{p2}$ es solución particular de $L(y) = F_1 + F_2$

Para hallar la solución particular de la completa en algunos casos se pueden utilizar

Método de ensayo (para funciones que son suma de estos tipos)

I. Si $F(x) = a e^{\alpha x}$ se ensaya $y = m e^{\alpha x}$, pero

- Si α es raíz simple del polinomio característico se ensaya $y = m x e^{\alpha x}$
- Si α es raiz doble del polinomio característico se ensaya $y = m x^2 e^{\alpha x}$

II. Si $F(x) = a \cos(\beta x) + b \sin(\beta x)$

Se ensaya $y = h \cos(\beta x) + k \sin(\beta x)$

- Si βi es una raiz del polinomio característico se ensaya $y = h x \cos(\beta x) + k x \sin(\beta x)$
- Si βi es una raiz doble del polinomio caratenístico se ensaya $y = h x^2 \cos(\beta x) + k x^2 \sin(\beta x)$

III Si $F(x)$ es un polinomio

- Si en la ecuación hay un término en y ensayamos un polinomio del mismo grado que $F(x)$
- Si en la ecuación no existe un término en y, pero sí en y', se ensaya un polinomio de un grado más que $F(x)$
- Si en en la ecuación no existe término en y y en y', pero sí en y'', se aumenta en dos el grado .... Así sucesivamente.

• Método operacional

I. Si $F(x)$ es un polinomio

$$H(D)y = F(x) \Rightarrow y = \frac{1}{H(D)} F(x)$$

se hace la división $\frac{1}{H(D)}$ así

Por ejemplo: si $H(D) = D^3 - D^2 + 2D + 1$

$$\begin{array}{l|l}
1 & 1 + 2D - D^2 + D^3 \\ \cline{2-2}
-1 - 2D + D^2 - D^3 & 1 - 2D + 5D^2 + \cdots \\ \cline{1-1}
\quad -2D + D^2 - D^3 & \\
\quad +2D + 4D^2 - 2D^3 + 2D^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad 5D^2 - 3D^3 + 2D^4 & \\
\qquad -5D^2 - 10D^3 + 5D^4 - 5D^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -13D^3 + 7D^4 - 5D^5 & \\
\qquad\qquad \cdots &
\end{array}$$

a partir de una derivada se anula el polinomio

$$\frac{1}{H(D)} F(x) = \left[1 - 2D + 5D^2 + \cdots\right] P(x)$$

II. Si $F(x) = e^{mx}$

$$y_p = \frac{1}{H(m)} e^{mx}$$

Ejemplo

$H(D) = D^2 - 3D - 4$

$y'' - 3y' - 4y = e^{mx}$

$$y_p = \frac{1}{m^2 - 3m - 4} e^{mx}$$

III Si $F(x) = e^{mx} f(x)$

La ecuación $H(D)\, y = F(x)$ tiene como solución particular

$$y_p = \frac{1}{H(D)}\left[e^{mx} f(x)\right] = e^{mx} \frac{1}{H(D+m)} f(x)$$

Ejemplo $y'' - 2y' + y = e^x x^2$

$$H(D) = D^2 - 2D + 1$$

$$y_p = e^x \frac{1}{H(D+1)} x^2 = e^x \frac{1}{(D+1)^2 - 2(D+1) + 1} x^2$$

$$= e^x \frac{1}{D^2} x^2 = e^x \cdot \frac{x^4}{12}$$

$$\left[\frac{1}{D^2} x^2 = \iint x^2\, dx = \int \frac{x^3}{3} dx = \frac{x^4}{12}\right]$$

$$\left[\frac{1}{D} = \int \; ; \; \frac{1}{D^2} = \iint\right]$$

Aplicación del método operacional en algún caso sencillo por descomposición en fracciones elementales

1) $y' + a y = F(x)$

$(D + a) y = F(x)$

$y = \frac{1}{D+a} F(x)$ es la solución de una ecuación lineal $y' + ay = F(x)$

2) Si se tiene hallar el inverso de $H(D)$ [que es un polinomio en D] se puede descomponer en fracciones elementales

$$\frac{1}{H(D)} = \frac{A}{D-r_1} + \frac{B}{D-r_2} + \frac{C}{D-r_3} + \cdots$$

donde $r_1, r_2, r_3, \ldots$ son raíces de $H(D) = 0$

$$y = \frac{1}{H(D)} F(x) = \frac{A}{D-r_1} F(x) + \frac{B}{D-r_2} F(x) + \frac{C}{D-r_3} F(x) + \cdots$$

Junio 2011 (1ª Semana)

3. Consideremos la ecuación diferencial

$$H(D)y = e^x + 4$$

donde $H(D) = D^4 - 4D^3 + 5D^2 - 4D + 4$

(D operador derivada). Se pide

a) Solución general de la ecuación homogénea asociada

b) Una solución particular de la completa. Para ello aplicar:

1. El método de selección (coeficientes indeterminados)

2. El método operacional

c) Solución general de la ecuación completa

Respuesta:

a) La ecuación $H(D)y = e^x + 4$

$$(D^4 - 4D^3 + 5D^2 - 4D + 4)y = e^x + 4$$

$$y^{(IV)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = e^x + 4$$

El polinomio característico

$$p(m) = m^4 - 4m^3 + 5m^2 - 4m + 4$$

Se buscan las raíces

	1	−4	5	−4	4
2		2	−4	2	−4
	1	−2	1	−2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

$$p(m) = (m-2)^2 (m^2+1) = 0$$

$$\text{raíces} = \begin{cases} 2 & \text{(doble)} \\ \pm i \end{cases}$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + C_3 \cos(x) + C_4 \sin(x)$$

b) Se busca una solución particular de la completa

1) Método de coeficientes indeterminados

Se ensaya $y_p = Ae^x + B$

$$y_p' = Ae^x \,;\quad y_p'' = Ae^x \,;\quad y_p''' = A \cdot e^x \,;\quad y_p^{IV} = Ae^x$$

$$H(D)[Ae^x + B] = Ae^x - 4Ae^x + 5Ae^x - 4Ae^x + 4Ae^x + 4B$$

$$= (A - 4A + 5A - 4A + 4A)e^x + 4B =$$

$$= 2Ae^x + 4B = e^x + 4 \Rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1 \end{cases}$$

Por tanto, $y_p = \frac{1}{2}e^x + 1$

2) Método operacional

Para el término $F_1(x)=e^x$

$$H(D)y = e^x \Rightarrow y = \frac{1}{H(D)}e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{H(1)}e^x = \frac{1}{(1-4+5-4+4)}e^x =$$

$$= \frac{1}{2}e^x$$

Para el término $F_2(x)=4$

$$H(D)y=4 \Rightarrow y=\frac{1}{H(D)}4$$

$$\begin{array}{l|l} 1 & 4-4D+5D^2-4D^3+D^4 \\ \hline -1+D-\frac{5}{4}D^2+D^3-\frac{1}{4}D^4 & \frac{1}{4}+\frac{1}{4}D+\cdots \\ D-\frac{5}{4}D^2+D^3-\frac{1}{4}D^4 & \\ -D+D^2-\frac{5}{4}D^3+D^4-\frac{1}{4}D^5 & \\ -\frac{1}{4}D^2-\frac{1}{4}D^3+\frac{3}{4}D^4-\frac{1}{4}D^5 & \\ + & \end{array}$$

$$y=\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}D+\cdots\right]4 = 1+0+0+\cdots$$

Con lo que $y_p = \frac{1}{2}e^x + 1$

c) La solución: $y = \underbrace{\frac{1}{2}e^x+1}_{y_p}+\underbrace{c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}+c_3\cos(x)+c_4\sin(x)}_{y_H}$

Método de reducción de orden

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

Si y_1 es una solución particular

se hace el cambio

$$y = y_1 \cdot u$$

con esto queda una ecuación

del tipo

$$u'' + A(x)\,u' = 0$$

se hace el cambio $w = u'$

$$w' + A(x)\,w = 0$$

Junio 2013

2) Dada la ecuación diferencial

$$\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - y = 1 + e^x$$

se pide:

a) Determinar tres soluciones reales linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada

b) Calcular el Wronskiano de las soluciones halladas en el apartado anterior

c) Solución general de la ecuación no homogénea

La ecuación la podemos escribir

$$\left(D^3 - D^2 + D - 1\right) y = 1 + e^x$$

(Es una ecuación diferencial lineal de orden 3 con coeficientes constantes.

1) Buscamos una solución general de la homogenea

Polinomio característip

$$P(m) = m^3 - m^2 + m - 1 =$$

$$= (m-1)(m^2+1).$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

raíces $\begin{cases} m_1 = 1 & \text{(real)} \\ m_2 = i \\ m_3 = -i \end{cases}$ $\Big\}$ complejas conjugadas $a \pm bi$

$\longrightarrow y = e^{mx}$

$\begin{cases} y = e^{ax}\cos bx \\ y = e^{ax}\sin bx \end{cases}$

Soluciones fundamentales

$$y_1 = e^x \; ; \; y_2 = \cos(x) \; ; \; y_3 = \sin(x)$$

Solución general de la homogénea

$$y_H = C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x)$$

b) $$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & \cos(x) & \sin(x) \\ e^x & -\sin(x) & \cos(x) \\ e^x & -\cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & -\sin(x) & \cos(x) \\ 1 & -\cos(x) & -\sin(x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^x \begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & -\sin(x) & \cos(x) \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2e^x \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = 2e^x \neq 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$

c) Para hallar la solución general de la completa usaremos el principio de superposición

$$L(y) = F_1 = 1 \qquad [*]$$
$$L(y) = F_2 = e^x \qquad [**]$$

Buscamos una solución particular de [*] ensayando $y_{p1} = A$

$$0 - 0 + 0 - A = 1 \Rightarrow A = -1$$

Buscamos una solución particular de [**] ensayando

$$y = Axe^x$$

e^x es una de las soluciones de la homogénea por eso ensayamos $y_p = Axe^x$

$$\begin{cases} y' = Ae^x + Axe^x = e^x[A + Ax] \\ y'' = Ae^x + Ae^x + Axe^x = \\ \quad = 2Ae^x + Axe^x = e^x[2A + Ax] \\ y''' = 2Ae^x + Ae^x + Axe^x = \\ \quad = 3Ae^x + Axe^x = e^x[3A + Ax] \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$e^x[3A + Ax] - e^x[2A + Ax] + e^x[A + Ax] - e^x Ax = e^x$$

$$e^x[2A] = e^x \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_{p2} = \frac{1}{2}xe^x$$

por consiguiente, la solución particular de la completa es

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = -1 + \frac{1}{2} e^x$$

Así pues la solución general de la ecuación es

$$y = \underbrace{-1 + \frac{1}{2} x e^x}_{y_p} + \underbrace{C_1 e^x + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x)}_{y_H}$$

2 Se considera la ecuación lineal de 2º Orden

$$H(D)y = e^{3x}\cos(x)$$

Donde $H(D)$ es un polinomio operacional

Se pide

a) La ecuación homogénea asociada, de la cual $r=3$ es raíz doble de su ecuación característica, y su solución general.

b) Una solución particular de la completa usando el método operacional

c) Solución general de la completa

Nota: Si lo desea, puede utilizar un método distinto para obtener la solución particular del apartado b) La valoración en este caso será de 0,5ptos.

$$\boxed{H(D)(y) = e^{3x}\cos(x)}$$

$H(D)$ es un polinomio de 2º orden que tiene $r=3$ raíz doble

Por tanto, $p(r) = (r-3)^2 = r^2 - 6r + 9$

$$H(D) = (D-3)^2 = D^2 - 6D + 9$$

La ecuación dada es, pues,

$$\boxed{y'' - 6y' + 9y = e^{3x}\cos(x)}$$

a) La ecuación homogénea asociada es:

$$y'' - 6y' + 9y = 0$$

La solución general de la homogénea (Caso de una raíz doble del polinomio característico) es:

$$y_H = c_1 e^{3x} + c_2\, x e^{3x}.$$

$$\boxed{y_H = [c_1 + x c_2]\, e^{3x}}$$

b) Para hallar una solución particular de la completa. Hay que aplicar el caso (Ver apuntes)

Si $F(x) = e^{mx} f(x)$

La ecuación $H(D)y = F(x)$ tiene como solución particular

$$y_p = \frac{1}{H(D)}\left[e^{mx} f(x)\right] =$$

$$= e^{mx} \frac{1}{H(D+m)} f(x)$$

En nuestro caso

$$y_p = \frac{1}{(D-3)^2}\left[e^{3x} \cos(x)\right] =$$

$$= e^{3x} \frac{1}{(D+3-3)^2}\left[\cos(x)\right]$$

$$= e^{3x} \frac{1}{D^2}\left[\cos(x)\right]$$

teniendo en cuenta que $\frac{1}{D^2} = \iint$

$$\frac{1}{D^2}(\cos(x)) = \int\left(\int \cos(x)\,dx\right)dx = \int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$$

Por tanto $\boxed{y_p = -e^{3x}\cos(x)}$

c) La solución general de la completa es

$$y = y_H + y_p$$

$$\boxed{y = \left[C_1 + xC_2\right]e^{3x} - e^{3x}\cos(x)}$$

$\boxed{\text{ECUACIONES DE EULER}}$

(Se reducen a una lineal de coeficientes constantes)

Ecuaciones de EULER

Teoría

Es un caso de ecuación lineal de coeficientes variables son las ecuaciones de EULER que mediante un cambio se reduce a coeficientes constantes

$$\boxed{x^2 y'' + a x y' + b y = F(x)}$$

1) Se hace el cambio ; $x = e^t$

$$\left(\frac{dx}{dt} = e^t = x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t} \right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$$ (primera derivada)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dt} e^{-t}\right] =$$

$$= \frac{dt}{dt} \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dt} e^{-t}\right] = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt} e^{-t}\right] =$$

$$= \frac{dt}{dx}\left[\frac{d^2y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t}\right] = e^{-t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t}\right] =$$

$$= e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$ (segunda derivada

Cambiando en la ecuación original

$$e^{2t}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] + a e^t \left[\frac{dy}{dt} e^{-t}\right] + b y = F(x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + a \frac{dy}{dt} + b y = F(x)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1) \frac{dy}{dt} + b y = F(x)$$ ← Ecuación lineal con coeficientes constantes

Junio 2010 — 2ª Semana

3. En la ecuación diferencial lineal no homogenea con coeficientes variables

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 6x^3$$

Se pide :

a) Comprobar que el cambio de variable $x = e^t$, la convierte en otra no homogenea pero de coeficientes constantes.

b) Resolverla

Respuesta :

a) Se hace el cambio $x = e^t$

$$\begin{cases} y' = e^{-t}\dfrac{dy}{dt} \; ; \; y'' = e^{-2t}\left[\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right] \end{cases}$$

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] + e^t \cdot e^{-t}\frac{dy}{dt} + y = 6e^{3t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} + y = 6e^{3t}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2} + y = 6e^{3t}}$$ ← Es una ecuación lineal no homogénea de coeficientes constantes

b) 1) Se busca una solución general de la homogénea

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$$

Para ello se buscan las raíces del polinomio característico $P_1(m) = m^2 + 1$

El polinomio característico tiene dos raíces

$$m_1 = i \qquad m_2 = -i$$

Con lo cual la solución general de la homogénea es:

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

3) Hay que buscar una solución particular de la completa. Como $F(t) = 6e^{3t}$ es una función exponencial podemos ensayar

$$y_p = Ae^{3t} \;;\; y_p' = 3Ae^{3t} \;;\; y_p'' = 9Ae^{3t}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$9Ae^{3t} + Ae^{3t} = 6e^{3t}$$

$$9A + A = 6 \Rightarrow A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(*)

Con lo cual $y_p = \frac{3}{5} e^{3t}$

4) ~~La~~ solución de la ecuación es $y = y_p + y_H$

$$y = \frac{3}{5} e^{3t} + c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

Deshaciendo el cambio $x = e^t \Rightarrow t = \ln(x)$

$$\boxed{y = \frac{3}{5} x^3 + c_1 \cos(\ln(|x|)) + c_2 \sin(\ln(|x|))}$$

(*) Usando el método de variación de las constantes $y_p = c_1 \cos t + c_2 \sin t$

$$W(y_1 y_2) = \begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} = 1$$

$$c_1 = \int \frac{-\sin t \cdot 6e^{3t}}{1} dt = -6 \int \sin t\, e^{3t} dt = \frac{3}{5} e^{3t} [\cos(t) - 3 \sin(t)]$$

$$c_2 = \int \frac{\cos t \cdot 6e^{3t}}{1} dt = 6 \int \cos t\, e^{3t} dt = \frac{3}{5} e^{3t} [\sin(t) + 3 \cos(t)]$$

$$y_p = \frac{3}{5} e^{3t}\left[\cos(t) - 3\sin(t)\right]\cos t + \frac{3}{5} e^{3t}\left[\sin t + 3\cos t\right]\sin t$$

$$= \frac{3}{5} e^{3t}\left[\cos^2 t - 3\,\cancel{\sin t\cos t} + \sin^2 t + 3\,\cancel{\sin t\cos t}\right] =$$

$$= \frac{3}{5} e^{3t}$$

[Es bastante más laborioso que el método del ensayo]

(*) Usando el método operacional (Ver pag 100 del libro)

$$y'' + y = 6e^{3t}$$

$$\left[D^2 + 1\right] y = 6e^{3t}$$

$$y = \frac{1}{D^2+1}\left[6e^{3t}\right] = 6\,\frac{1}{D^2+1}\left(e^{3t}\right)$$

$$y = 6\,\frac{1}{3^2+1}\left(e^{3t}\right) = \frac{6}{10} e^{3t} = \frac{3}{5} e^{3t}$$