MÉTODO de VARIACIÓN de las CONSTANTES

(en ecuaciones lineales de 2º orden)

1

Consideremos una ecuación lineal de 2º orden

$$\boxed{y'' + \alpha(x)\,y' + \beta(x)\,y = F(x)} \quad [1]$$

Supongamos que

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Es una solución general de la ecuación homogénea $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$

Para buscar una solución particular de la completa, [1], se ensaya

$$y_p = C_1(x)\,y_1 + C_2(x)\,y_2$$

Para ello calculamos

$$y_p' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2' =$$

$$= C_1 y_1' + C_2 y_2' + \underbrace{\left[C_1' y_1 + C_2' y_2\right]}_{(*)}$$

2

Para simplificar los cálculos vamos imponer la condición (*) = 0

$$\boxed{c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0}$$

Con ~~esta~~ condición, $y_p' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$,

$$y_p'' = c_1' y_1' + c_1 y_1'' + c_2' y_2' + c_2 y_2''$$

Sustituyendo en la ecuación [1]

$$\underbrace{c_1' y_1' + \overset{\otimes}{c_1} y_1'' + c_2' y_2' + \overset{\#}{c_2} y_2''}_{y_p''} + \alpha\underbrace{(\overset{\otimes}{c_1} y_1' + \overset{\#}{c_2} y_2')}_{y_p'} + \beta\underbrace{(\overset{\otimes}{c_1} y_1 + \overset{\#}{c_2} y_2)}_{y_p} = F$$

$$c_1 \overset{\otimes}{[} \cancel{y_1'' + \alpha y_1' + \beta y_1}]_{0} + c_2 \overset{\#}{[} \cancel{y_2'' + \alpha y_2' + y_2}]_{0} +$$

$$+ c_1' y_1' + c_2' y_2' = F$$

De donde

$$\boxed{c_1' y_1' + c_2' y_2' = F}$$

Por consiguiente,

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

es solución de la completa si se verifican estas dos condiciones

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = F \end{cases}$$

aplicando la regla de Cramer

$$c_1' = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ F & y_2' \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}} = -\frac{y_2 F}{W(y_1 y_2)}$$

$$c_2' = \frac{\det\begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}} = \frac{y_1 F}{W(y_1 y_2)}$$

Integrando

$$c_1 = -\int \frac{y_2 F}{W(y_1 y_2)}$$

$$c_2 = \int \frac{y_1 F}{W(y_1 y_2)}$$

Por métodos análogos para la ecuación lineal de tercer orden la condición para que

$$y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3$$

sea solución particular de la completa es

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = 0 \end{cases}$$