

CURVAS

(resumen)

allave@madrid.uned.es

CURVAS

2

$$\vec{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$$

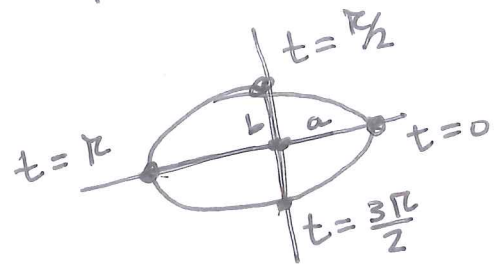
Representa una curva en forma PARAMETRICA

Interpretación: un punto del espacio se mueve según evoluciona el tiempo

Ejemplos:

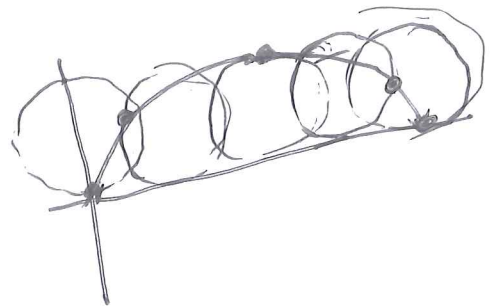
1) En $\mathbb{R}^2$, una elipse

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = b \sin(t) \end{cases}$$
$$t \in [0, 2\pi)$$



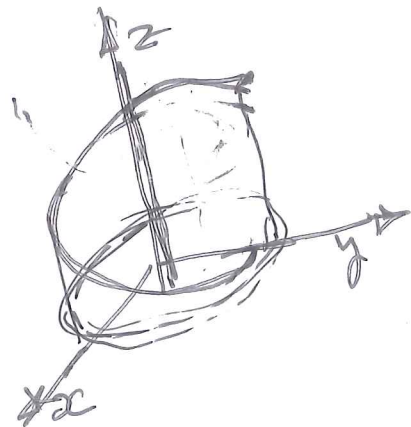
2) En $\mathbb{R}^2$, la cicloide

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases}$$
$$t \in [0, 2\pi)$$



3) En $\mathbb{R}^3$, la hélice

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$



Vector velocidad Derivada

$$\vec{x}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

Ejemplos 1) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix}$

2) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

3) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

$[\|\vec{x}'(t)\|$ se suele llamar rapidez]

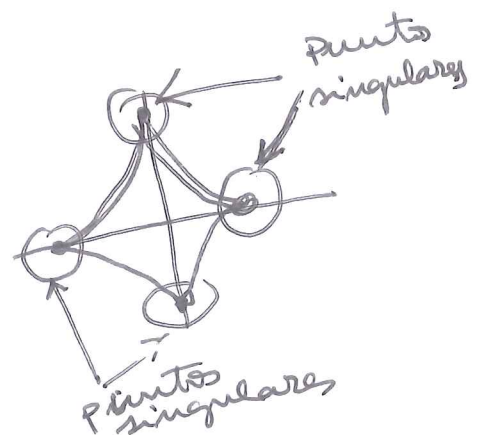
PUNTOS REGULARES de una curva son aquellos en los que $\vec{x}'(t) \neq 0$

Ejemplo $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$

$$\begin{cases} x'(t) = 3 \sin(t) \cos^2(t) \\ y'(t) = 3 \cos(t) \sin^2(t) \end{cases}$$

$\vec{x}'(t)$ se anula para los valores de t que anulan simultáneamente las dos componentes

$t = 0$	$\rightarrow \vec{x}'(0) = (0, 0)$	$\rightarrow \vec{x}(0) = (1, 0)$
$t = \frac{\pi}{2}$	$\rightarrow \vec{x}'(\frac{\pi}{2}) = (0, 0)$	$\rightarrow \vec{x}(\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$
$t = \pi$	$\rightarrow \vec{x}'(\pi) = (0, 0)$	$\rightarrow \vec{x}(\pi) = (-1, 0)$
$t = \frac{3\pi}{2}$	$\rightarrow \vec{x}'(\frac{3\pi}{2}) = (0, 0)$	$\rightarrow \vec{x}(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$



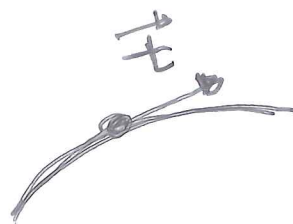
Vector tangente $\vec{t}(t) = \frac{\vec{x}'(t)}{\|\vec{x}'(t)\|}$ (vector unitario)

PARÁMETRO LONGITUD DE ARCO, VECTOR TANGENTE

(5)

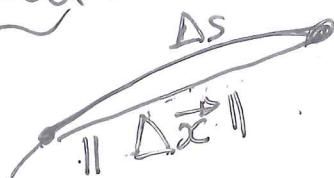
Cuando se utiliza la longitud de arco como parámetro y se mide la velocidad (Como cuando se mide la velocidad de un coche por una carretera)

$$\vec{T} = \frac{d\vec{x}(s)}{ds}$$



Vector tangente unitario que tiene la dirección de $\vec{x}'(t)$ (tangente)

Comentario:

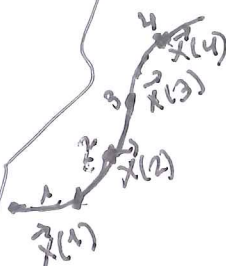


Cuando el arco es pequeño

$$\Delta s \approx \|\Delta \vec{x}\|$$

Por tanto, si se usa como parámetro la longitud de arco

$$\frac{d\|\vec{x}(s)\|}{ds} \approx \frac{\Delta \|\vec{x}\|}{\Delta s} = 1$$



VECTOR NORMAL

$$\vec{n}(s) = \frac{\frac{d}{ds} \vec{T}(s)}{\left\| \frac{d}{ds} \vec{T}(s) \right\|}$$

Como $\vec{T}$ no cambia de módulo

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{n} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{x}(s)}{ds} \right)$$

donde $\vec{n}$ es un vector unitario perpendicular a $\vec{T}$ que está en el plano $\langle \vec{x}', \vec{x}'' \rangle$

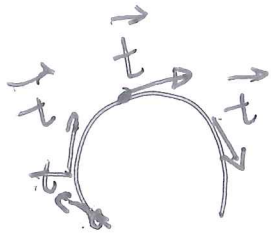
κ es la curvatura y mide lo que varía $\vec{T}$

$$\kappa = \left\| \frac{d^2 \vec{x}(s)}{ds^2} \right\| = \|\text{vector de curvatura}\|$$

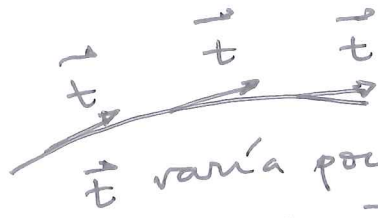
Los vectores que no cambian de módulo sus derivadas son perpendiculares
Demostración
 $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \text{cte}$
 $\Rightarrow d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 0$

Porque
 $d(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2 \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{u}'$

6

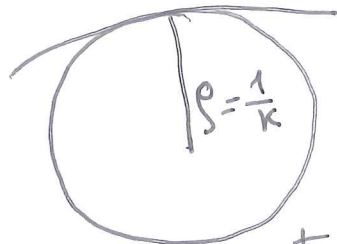
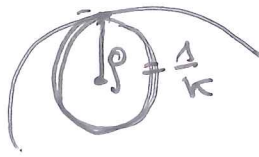


$\vec{t}$ varía mucho
 κ es grande

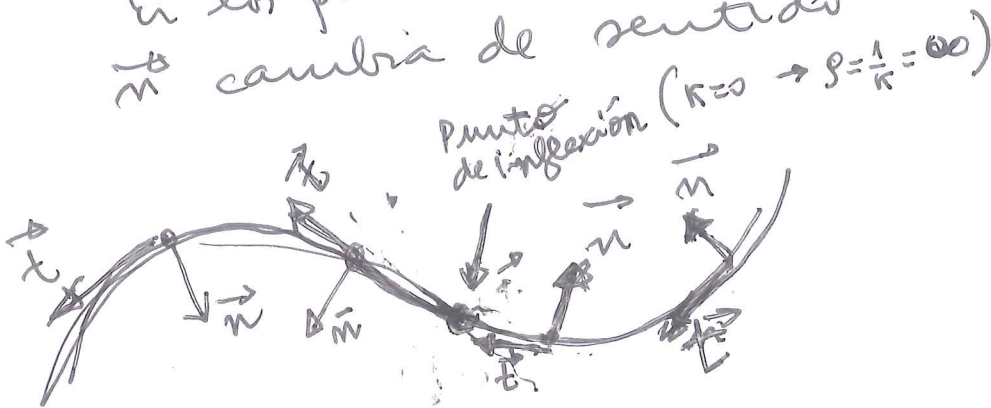


$\vec{t}$ varía poco
 κ es pequeña

$\frac{1}{\kappa} = \rho = \text{radio de curvatura}$



En los puntos de inflexión el vector $\vec{n}$ cambia de sentido

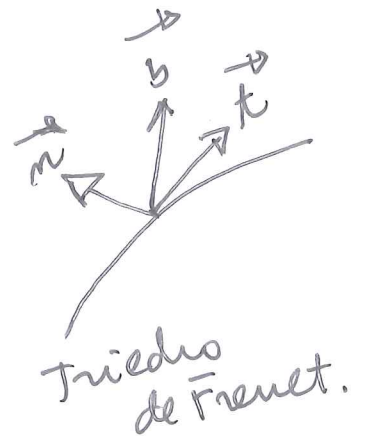


IV VECTOR BINORMAL (en $\mathbb{R}^3$)

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

Como $\vec{n} = \vec{t} \times \vec{b}$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}}{ds} &= \frac{d\vec{b}}{ds} \times \vec{t} + \vec{b} \frac{d\vec{t}}{ds} \\ &= -\underbrace{\tau \vec{n} \times \vec{b}}_{\vec{b}} + \kappa \underbrace{\vec{b} \times \vec{n}}_{\vec{t}} \end{aligned}$$



Triédro de Frenet.

Si se deriva

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d}{ds} [\vec{t} \times \vec{n}] = \frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} =$$

$$= \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds}$$

Por tanto $\frac{d\vec{b}}{ds}$ es perpendicular a $\vec{t}$
 Como $\|\vec{b}\|=1 = \text{cte}$, entonces $\frac{d\vec{b}}{ds}$ también
 es perpendicular a $\vec{b}$, y, por tanto,
 paralelo a $\vec{n}$. Así resultan
 las fórmulas de FRENET

FÓRMULAS DE FRENET

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}(s) \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t}(s) + \tau \vec{b}(s) \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n}(s) \end{cases}$$

Para curvas
alabeadas
en $\mathbb{R}^3$

Esto significa, intuitivamente, que
 si de una curva se conoce la curvatura
 y la torsión, se puede reconstruir la
 forma de la curva [salvo movimientos rígidos] resolviendo
 unas ecuaciones diferenciales

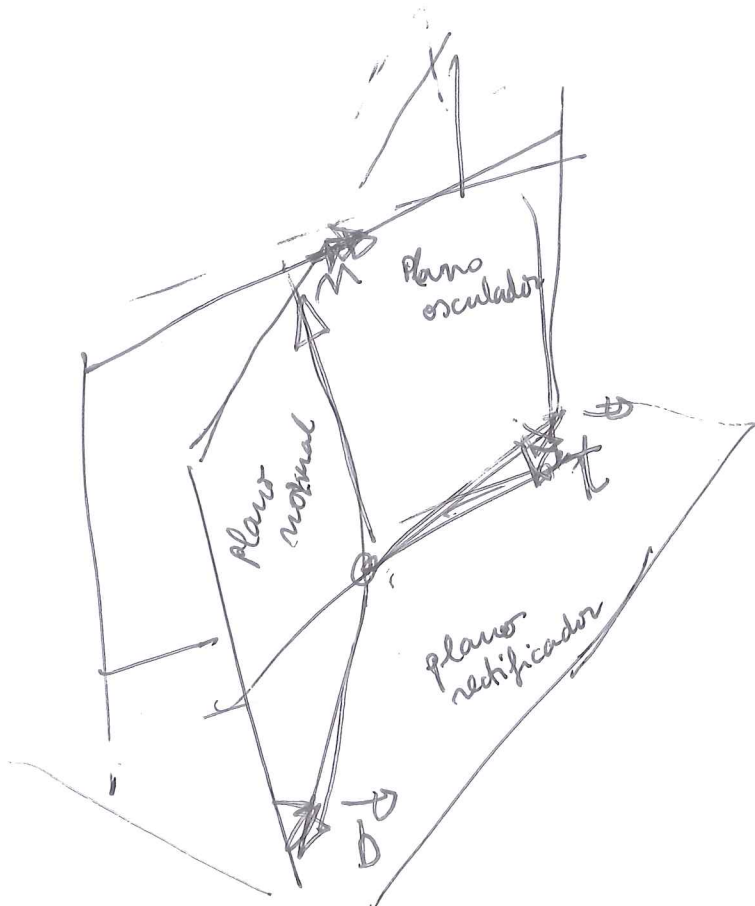
$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}(s) \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t}(s) \end{cases}$$

Para curvas planas ($\tau=0$)
 como caso particular de las curvas
 alabeadas

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{|\dot{x}^2 + \dot{y}^2|^{3/2}}$$

8

Triedro de Frenet



Plano perpendicular a t $\rightarrow$ PLANO NORMAL
Plano perpendicular a n $\rightarrow$ PLANO RECTIFICADOR
Plano perpendicular a b $\rightarrow$ PLANO OSCULADOR

En ecuaciones paramétricas marque 9

- $\left\{ \begin{array}{l} \vec{t} \text{ tiene la dirección de } \vec{x}'(t) \\ \vec{b} \text{ tiene la dirección de } \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \\ \vec{n} \text{ tiene la dirección de } [\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t) \end{array} \right.$

$$\kappa = \frac{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|}{\|\vec{x}'(t)\|^3}$$

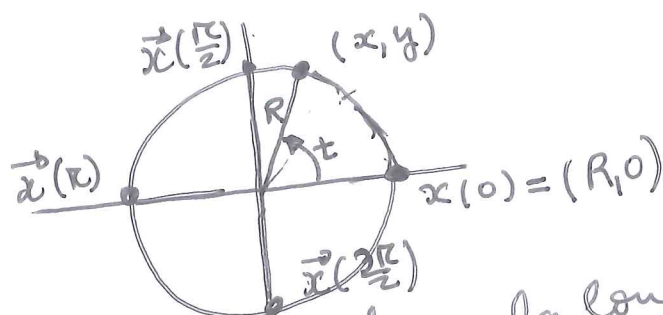
$$\tau = \frac{[\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)]}{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|^2} \leftarrow \text{determinante}$$

Ejemplo: CIRCUNFERENCIA (curva plana)

(10)

Equación paramétrica de la circunferencia C

$$\vec{x}(t) = (R \cos(t), R \sin(t)) \quad t \in [0, 2\pi)$$



Utilizando como parámetro la longitud de arco $s = Rt \Rightarrow t = \frac{s}{R}$. La ecuación de C es

$$\vec{x}(s) = \left(R \cos\left(\frac{s}{R}\right), R \sin\left(\frac{s}{R}\right) \right)$$

Vector tangente $\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{x}}{ds}}_{\vec{t}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_R = R \vec{t}$$

comprobamos haciendo de diferentes maneras

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (-R \sin(t), R \cos(t)) = R \underbrace{(-\sin(t), \cos(t))}_{\vec{t}}$$

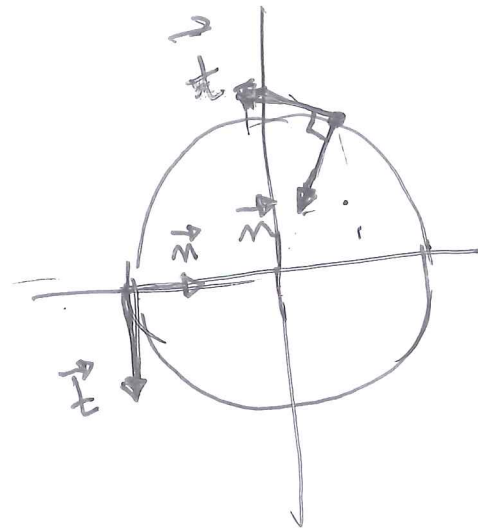
$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}}{ds} &= \left(-R \frac{1}{R} \sin\left(\frac{s}{R}\right), R \frac{1}{R} \cos\left(\frac{s}{R}\right) \right) = \\ &= (-\sin(t), \cos(t)) = \vec{t} \end{aligned}$$

Vector normal

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{R}} = \underbrace{\frac{1}{R}}_{\kappa} \underbrace{(-\cos(t), -\sin(t))}_{\vec{n}}$$

$\uparrow$ curvatura

$$\text{Radio de curvatura} = \frac{1}{\kappa} = R$$



Fórmula de Frenet

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n}(s)$$

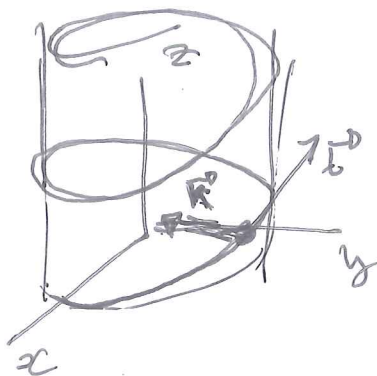
$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t}(s)$$

Comprobación para la circunferencia

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{n}}{ds} &= \frac{d\vec{n}}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{R}} = \frac{1}{R} (\sin t, -\cos t) = \\ &= -\underbrace{\frac{1}{R}}_{-\kappa} \underbrace{(-\sin t, \cos t)}_{\vec{t}} \end{aligned}$$

Ejemplo LA HÉLICE

$$\begin{cases} x(t) = a \cos(t) \\ y(t) = a \sin(t) \\ z(t) = b t \end{cases}$$



$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (-a \sin(t), a \cos(t), b)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| &= \sqrt{[-a \sin(t)]^2 + [a \cos(t)]^2 + b^2} \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2(t) + a^2 \cos^2(t) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

vector tangente

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{x}}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin(t), a \cos(t), b)$$

longitud de arco

$$\begin{aligned} s(\alpha) &= \int_0^\alpha \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| dt = \int_0^\alpha \sqrt{a^2 + b^2} dt = \left[\sqrt{a^2 + b^2} t \right]_0^\alpha = \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \alpha. \end{aligned}$$

cuando $\alpha = t$

$$s(0, t) = \sqrt{a^2 + b^2} t \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} s$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Si escribimos la curva parametrizada por la longitud de arco comprobamos lo anterior (13)

$$x(s) = \left(a \cos\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right), a \sin\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right), b \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s \right)$$

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-a \sin(t), a \cos(t), b)$$

comprobamos también que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \Rightarrow \vec{t}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\vec{t}} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{\sqrt{a^2+b^2}}$

Vector curvatura

$$\vec{k} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \underbrace{(-a \cos(t), -a \sin(t), 0)}_{\frac{d\vec{t}}{dt}} \cdot \frac{1}{\frac{dt}{ds}}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2} (-a \cos(t), -a \sin(t), 0)$$

Observación: $\vec{k}$ es paralelo al eje XY y dirigido hacia el origen

La curvatura es constante

$$\vec{k} = \frac{-a}{a^2+b^2} (\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$k = |\vec{k}| = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(curvatura no depende de t)

El vector normal es el vector unitario en la dirección de

(14)

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{\frac{d}{ds}(\vec{r})}{\|\frac{d}{ds}(\vec{r})\|} = \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}\vec{x}(s)\right)}{\left\|\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}\vec{x}(s)\right)\right\|}$$

en nuestro caso

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{\frac{-a}{a^2+b^2}(\cos(t), \sin(t), 0)}{\left\|\frac{-a}{a^2+b^2}(\cos(t), \sin(t), 0)\right\|} = \frac{\frac{-a}{a^2+b^2}(\cos(t), \sin(t), 0)}{\frac{a}{a^2+b^2}} \\ &= (-\cos(t), -\sin(t), 0)\end{aligned}$$

El vector binormal

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(t) & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(t) & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin(t) & a\cos(t) & b \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} =$$

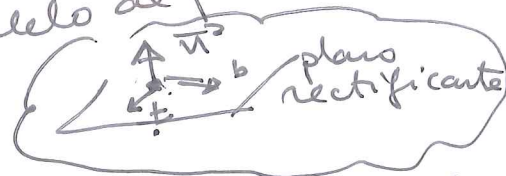
$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (b\sin(t), -b\cos(t), a\sin^2(t) + a\cos^2(t)) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (b\sin(t), -b\cos(t), a)$$

Vamos a calcular la torsión

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{b}}{ds} &= \frac{d}{ds} (\vec{t} \times \vec{n}) = \\ &= \frac{d}{ds} \vec{t} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d}{ds} \vec{n} = \\ &= \cancel{\kappa \vec{n} \times \vec{n}} + \vec{t} \times \frac{d}{ds} \vec{n} = \\ &= \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds}\end{aligned}$$

Como $\vec{n}$ es un vector unitario, su derivada es perpendicular a $\vec{n}$ y por consiguiente es paralelo al plano rectificante,



$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \lambda \vec{t} + \tau \vec{b}$$

($\frac{d\vec{n}}{ds}$ es una combinación lineal de $\vec{t}$ y $\vec{b}$)

Sustituyendo

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{b}}{ds} &= \vec{t} \times [\lambda \vec{t} + \tau \vec{b}] = \cancel{\lambda \vec{t} \times \vec{t}} + \tau \vec{t} \times \vec{b} \\ &= -\tau \vec{n}\end{aligned}$$

(ya que $\vec{b} \times \vec{t} = -\vec{n}$)

Para calcular $\vec{n}$ hacemos el producto escalar de los dos miembros

$$\vec{n} \cdot \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n})}_1$$

$$\tau = - \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n}$$

En nuestro caso

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \underbrace{\frac{d\vec{b}}{dt}}_{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}} \cdot \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{1}{a^2+b^2} (b \cos(t), b \sin(t), 0)$$
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (b \cos(t), b \sin(t), 0)$$

$$\tau = - \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n} =$$
$$= - \frac{1}{a^2+b^2} (b \cos(t), b \sin(t), 0) \cdot (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$
$$= - \frac{1}{a^2+b^2} (-b \cos^2(t) - b \sin^2(t) + 0) =$$
$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

concluimos: la torsión es constante
a lo largo de toda la curva

En resumen

$$\vec{r}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$$

Triado de Frenet

$$\begin{cases} \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (-a \sin(t), a \cos(t), b) \\ \vec{n} = (-\cos(t), -\sin(t), 0) \\ \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} (b \sin(t), -b \cos(t), a) \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} \quad ; \quad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Comprobamos que

$$\begin{cases} \vec{t} = \vec{n} \times \vec{b} \\ \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \\ \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \|\vec{t}\| = 1 \\ \|\vec{n}\| = 1 \\ \|\vec{b}\| = 1 \end{cases}$$

$$\det(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) = 1$$

FORMULAS DE FRENET

$$\begin{cases} \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{a^2+b^2} (-a \cos(t), -a \sin(t), 0)$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{n}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = (\sin(t), -\cos(t), 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{a^2+b^2} (b \cos(t), b \sin(t), 0)$$