

PROBLEMAS de CURVAS

allave@madrid.uned.es

Junio 2018

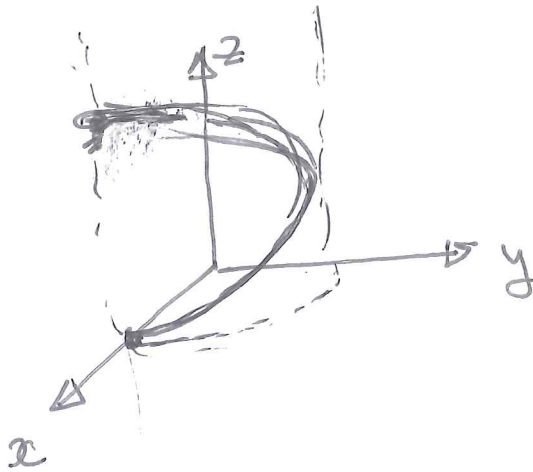
Calcule la longitud de la porción de hélice para $t \in [0, 2\pi]$, dada por las ecuaciones

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

Respuesta

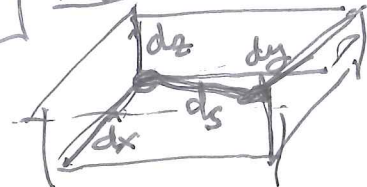
$$\alpha: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$



$$l_{ab} = \int_a^b ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

Diferencial de arco



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}$$

$$s = \sum \Delta s = \sum \frac{\Delta s}{\Delta t} \Delta t$$

$$s = \int ds = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

$$\alpha'(t) \sim \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

(3)

Teniendo en cuenta que

$$\alpha'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{[-\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2 + 1^2} = \\ &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Resulta que

$$L = \int_0^{2\pi} \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt =$$

$$= \sqrt{2} t \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2} = 0 = \boxed{2\sqrt{2}\pi}$$

Junio 2018

4

Sea la curva dada por la ecuación

$$\vec{r}(t) = (e^t, t^2 + t, t + 1), \quad t \in \mathbb{R}$$

Determinese el vector normal
a la curva en el punto $\vec{r}(0)$

Recordatorio:

En una curva $\vec{r}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

El vector tangente es el vector
unitario en la dirección de $\vec{r}'(t)$

$\vec{T}$ tiene la dirección de $\vec{r}'(t)$

El vector normal es el vector unitario per-
pendicular a $\vec{T}$ y está en el plano

$$\langle \vec{r}'(t), \vec{r}''(t) \rangle$$

$\vec{N}$ tiene la dirección de $[\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)] \times \vec{r}'(t)$

El vector binormal es vector unitario
perpendicular a $\vec{T}$ y $\vec{N}$

$\vec{B}$ tiene la dirección de $\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)$

(5)

Calculamos

$$\vec{\alpha}'(t) = (e^t, 2t+1, 1)$$

$$\vec{\alpha}''(t) = (e^t, 2, 0)$$

En el punto $\vec{\alpha}(0) = (1, 0, 1)$

$$\vec{\alpha}'(0) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{\alpha}''(0) = (1, 2, 0)$$

El vector normal $\vec{n}$ es el vector unitario que lleva la dirección

$$[\vec{\alpha}'(0) \times \vec{\alpha}''(0)] \times \vec{\alpha}'(0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (1, 1, 1) = (-2, 1, 1) \times (1, 1, 1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 3, -3)$$

Para hallar $\vec{n}$ normalizamos este vector

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{0^2+3^2+3^2}} (0, 3, -3) = \frac{1}{3\sqrt{2}} (0, 3, -3)$$

$$\boxed{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, -1)}$$

Junio 2018

6

Sea la curva de ecuaciones

$$\vec{x}(t) = (x, y, z)$$

donde

$$x = t^2 - t; \quad y = t^3 + t; \quad z = t - 1$$

para $t \in \mathbb{R}$

- Determine la curvatura y la torsión en el punto $\vec{x}(0)$.
- Determine el triedro de Frenet en el punto $\vec{x}(0)$.
- Determine las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante en el punto $\vec{x}(0)$.

La curva es $\vec{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 + t \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

calculamos las derivadas

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 3t^2+1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{x}''(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \vec{x}'''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Consultando las fórmulas apropiadas

■ La curvatura

$$K(0) = \frac{\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\|}{\|\vec{x}'(0)\|^3} = \frac{\|(0, 2, -2)\|}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

Hacemos

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (-1, 1, 1) \times (2, 0, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (0, 2, -2)$$

$$\|\vec{x}'(0)\| = \|(-1, 1, 1)\| = \sqrt{3}$$

Recordatorio:

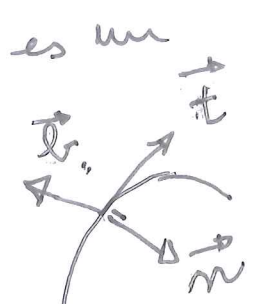
$$K(t) = \frac{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|}{\|\vec{x}'(t)\|^3} ; \quad \tau(t) = \frac{\det[\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)]}{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|^2}$$

La torsión

$$\tau(t) = \frac{\det [\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)]}{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|^2} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\|(0, 2, -2)\|^2} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

b) El triédro de Frenet $\{\vec{T}, \vec{n}, \vec{b}\}$ es un sistema de referencia local



$\vec{T}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t)$
 $\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)$
 $\vec{n}$ tiene la dirección de $[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t)$
 $[\vec{n} = \vec{b} \times \vec{T}]$

$\vec{T}$
 $\vec{x}'(0) = (-1, 1, 1) \Rightarrow \vec{T} = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$\vec{b}$
 $\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2, -2)$

$\Rightarrow \vec{b} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (0, 2, -2) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Comentario: $\vec{n}$ es el vector perpendicular a $\vec{T}$ en el plano $\langle \vec{x}', \vec{x}'' \rangle$

(9)

 $\vec{n}$

$$[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t) = (0, 2, -2) \times (-1, 1, 1)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4, 2, 2)$$

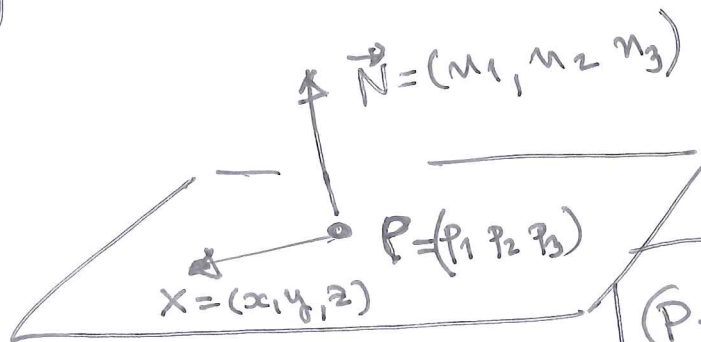
$$\vec{n} = \frac{1}{2\sqrt{6}} (4, 2, 2) = \frac{1}{\sqrt{6}} (2, 1, 1)$$

Recordatorio

- c) El plano osculador es perpendicular a $\vec{b}$
 El plano normal es perpendicular a $\vec{t}$
 El plano rectificador es perpendicular a $\vec{n}$

Recordatorio

La ecuación de un plano conocido un punto de apoyo $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)$ y vector ortogonal $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$



$$(\vec{P-X}) \cdot \vec{N} = 0$$

$$n_1(x-p_1) + n_2(y-p_2) + n_3(z-p_3) = 0$$

Plano osculador ($\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle$) ($\perp \vec{b}$)

(10)

$$0(x-0) + 1(y-0) - 1(z+1) = 0$$

$$y - z - 1 = 0$$

Plano normal ($\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle$) ($\perp \vec{t}$)

$$-1(x-0) + 1(y-0) + 1(z+1)$$

$$-x + y + z + 1 = 0$$

$$x - y - z - 1 = 0$$

Plano rectificante ($\langle \vec{t}, \vec{b} \rangle$) ($\perp \vec{n}$)

$$2(x-0) + 1(y-0) + 1(z+1) = 0$$

$$2x + y + z + 1 = 0$$

Septiembre 2018

Sea C la curva dada por

$$\vec{x}(t) = (t^3 + 2t, t^2 - t, t^2 - 1)$$

para $t \in [-2, 2]$

- Estudie si es una curva regular y si $\vec{x}(0)$ es un punto múltiple.
- Determine la torsión de C en $\vec{x}(0)$.
- Calcule las ecuaciones de las rectas tangente y normal que pasan por $\vec{x}(0)$.
- Calcule la ecuación del plano osculador que pasa por $\vec{x}(0)$.

Recordatorio

- a) Definición: $\vec{x}(t)$ es un punto regular si

$$\vec{x}'(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(t), \frac{\partial y}{\partial t}(t), \frac{\partial z}{\partial t}(t) \right) \neq (0, 0, 0)$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + 2 \\ 2t - 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Un punto es singular si $\begin{cases} 3t^2 + 2 = 0 \\ 2t - 1 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$

Como estas tres ecuaciones no se pueden dar simultáneamente para ningún t , resulta que la curva es regular $\forall t \in [-2, 2]$

Recordatorio

Un punto $\vec{x}(t_1)$ es múltiple si

$$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$$

para dos o más valores de $t \in I$

¿ $\vec{x}(0) = (0, 0, -1)$ es múltiple?

¿ $\vec{x}(t) = (0, 0, -1)$ para algún otro $t \neq 0$?

Buscamos las posibles soluciones de

$$\begin{cases} t^3 + 2t = 0 \\ t^2 - t = 0 \\ t^2 - 1 = -1 \end{cases}$$

Empezamos por la tercera condición

$$t^2 - 1 = -1 \Rightarrow t^2 = 0, \text{ sólo se}$$

verifica cuando $t = 0$

Por tanto, $\vec{x}(0)$ no es un punto múltiple

b) Recordatorio

Torsión

$$\tau(t) = \frac{\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t))}{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|^2}$$

Explicación significado geométrico de la torsión

La torsión es una medida del cambio de dirección del vector binormal; cuanto más rápido cambia, más rápido gira el vector binormal alrededor del vector tangente y más retorcida aparece la curva. Para una curva plana, la torsión es nula, ya que el vector binormal es constantemente perpendicular al plano que la contiene.

Hacemos

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 + 2 \\ 2t - 1 \\ 2t \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}''(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'''(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}'''(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -4, 4)$$

$$\det(\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0)) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

De modo que

$$\begin{aligned} \tau_0(0) &= \frac{\det(\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0))}{\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\|^2} = \frac{-12}{\|(2, -4, 4)\|^2} = \\ &= \frac{-12}{4+16+16} = -\frac{12}{36} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

c) Recordatorio

$\vec{T}$ tiene la dirección de $\vec{x}'$
 $\vec{n}$ tiene la dirección de $[\vec{x}' \times \vec{x}'] \times \vec{x}'$
 $\vec{b}$ tiene la dirección de $(\vec{x}' \times \vec{x}'')$

$\vec{T}(0)$ lleva la dirección de $\vec{x}'(0) = (-2, -1, 0)$

La recta tangente en $\vec{x}(0) = (0, 0, -1)$ es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ec. paramétrica de la recta}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+1}{0}}_{\text{Ecuación continua de la recta}}$$

$\vec{n}(0)$ lleva la dirección de
 $[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)] \times \vec{x}'(0) =$

$$= (-2, -4, 4) \times (2, -1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4, 8, 10) = 2(2, 4, 5)$$

La recta normal que $\vec{x}(0) = (0, 0, -1)$ es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{Ec. paramétrica}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{4} = \frac{z+1}{5}}_{\text{Ec. continua}}$$

k) El plano osculador es el plano contiene a $\vec{t}$ y $\vec{n}$ y es perpendicular a $\vec{b}$

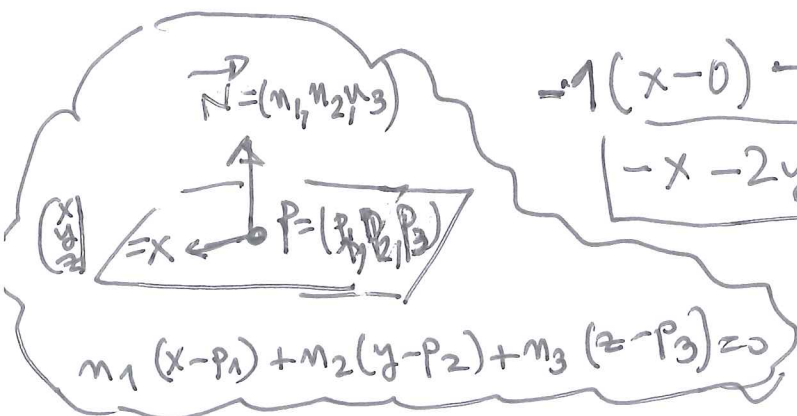
El vector $\vec{b}(0)$ lleva la dirección de

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (-2, -4, 4) = 2(-1, -2, 2)$$

La ecuación del plano normal

$$-1(x-0) - 2(y-0) + 2(z+1) = 0$$

$$\boxed{-x - 2y + 2z + 2 = 0}$$



Junio 2019

Sea la curva C la curva dada por

$$\vec{x}(t) = (t^3 - t, \cos(\pi t), t^2 - 1)$$

para $t \in [-2, 2]$

- Estudie si la curva es regular y si $(0, -1, 0)$ es un punto múltiple de la curva.
- Determine la curvatura en $\vec{x}(0)$
- Determine la torsión de C en $\vec{x}(0)$
- Determine el triedro de Frenet en $\vec{x}(0)$

a) Estudiamos

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ -\pi \sin(\pi t) \\ 2t \end{pmatrix}$$

Son puntos singulares de la curva C aquellos para los que $\vec{x}'(t) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 3t^2 - 1 = 0 \\ -\pi \sin(\pi t) = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$$

La tercera ecuación solamente se verifica cuando $t=0$.

Pero, para $t=0$ no se verifica la primera.
Por tanto, la curva es regular para $t \in [-2, 2]$

¿Es $(0, -1, 0)$ un punto múltiple?
¿ $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) = (0, -1, 0)$?



¿El sistema

$$\begin{cases} t^3 - t = 0 \\ \cos(\pi t) = -1 \\ t^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

tiene más de una solución?

De la tercera ecuación $t^2 = 1$, deducimos que puede haber dos posibles soluciones $t=1$ y $t=-1$. Comprobamos si se verifican para las otras dos ecuaciones

$$\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$$

$$1^3 - 1 = (-1)^3 - (-1) = 0$$

En consecuencia,

$$\vec{x}(1) = \vec{x}(-1) = (0, -1, 0)$$

por tanto $(0, -1, 0)$ es un punto múltiple



b) La curvatura de una curva alabeada

es una medida del cambio de dirección del vector $\vec{T}$ tangente a la curva. Cuanto más rápido cambia este a medida que nos desplazamos a lo largo de la curva, se dice que es más grande la curvatura.

parametrización: $\kappa(t) = \frac{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|}{\|\vec{x}'(t)\|^3}$

$\kappa(t) = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|$, en cualquier

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ -\pi \sin(\pi t) \\ 2t \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}''(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ -\pi^2 \cos(\pi t) \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 2 \end{vmatrix} = (0, 2, \pi^2)$$

$$\kappa(0) = \frac{\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\|}{\|\vec{x}'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{\pi^4 + 4}}{1} = \sqrt{\pi^4 + 4}$$

c) La torsión de una curva en paramétricas

$$\tau(t) = \frac{\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t))}{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|^2}$$

$$\tau(0) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{4 + \pi^2}} = \frac{0}{\sqrt{4 + \pi^2}} = 0$$

Recordatorio

(20)

d) El triedro de Frenet $\{\vec{T}, \vec{n}, \vec{b}\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T}^2 = \vec{n}^2 = \vec{b}^2 = 1 \quad (\text{son vectores unitarios}) \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{T} = \vec{T} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{ortogonales}) \\ \vec{T} = \vec{n} \times \vec{b} ; \vec{n} = \vec{b} \times \vec{T} ; \vec{b} = \vec{T} \times \vec{n} \\ \det(\vec{T}, \vec{n}, \vec{b}) = 1 \quad (\text{orientados positivamente}) \end{array} \right.$$

Es una referencia local.
Derivando respecto al arco

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{T}}{ds} = \kappa \vec{n} \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{T} + \tau \vec{b} \\ \frac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \end{array} \right.$$

Ecuaciones diferenciales
que permiten
reconstruir la
curva conociendo
la curvatura, la
torsión y una
posición inicial

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{T} \text{ tiene la dirección de } \vec{x}'(t) \\ \vec{n} \text{ tiene la dirección de } [\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t) \\ \vec{b} \text{ tiene la dirección de } \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \end{array} \right.$$

• $\vec{T}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(0) = (-1, 0, 0)$

Como es unitario

$$\vec{T} = (-1, 0, 0)$$

• $\vec{N}$ tiene la dirección de

$$[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)] \times \vec{x}'(0) =$$

$$= [(-1, 0, 0) \times (0, -R^2, 2)] \times (-1, 0, 0) =$$

$$= (0, 2, R^2) \times (-1, 0, 0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & R^2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -R^2, 2)$$

Para hallar $\vec{n}$ normalizamos este vector

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + 4}} (0, -R^2, 2)$$

• $\vec{b}$ tiene la dirección

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (0, 2, R^2)$$

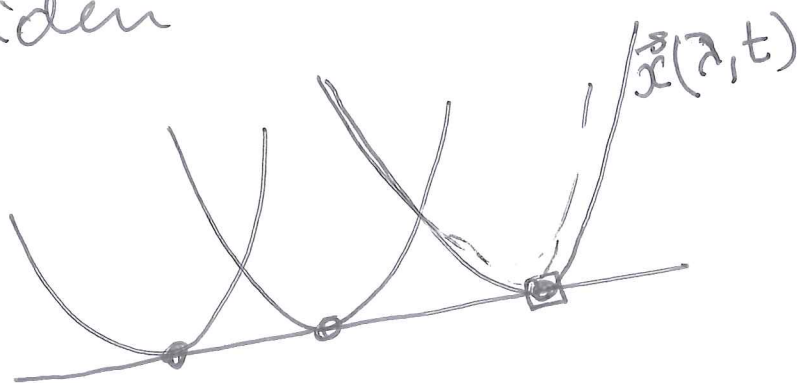
normalizando, para hacerlo unitario

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{4 + R^2}} (0, 2, R^2)$$

Junio 2019

Sea $\{ \vec{x}(\lambda, t) \}_{\lambda \in [a, b]}$ una familia de curvas planas regulares.
 Defina su envolvente.

Se dice que una curva es envolvente de una familia de curvas siando en cada punto es tangente a alguna de las curvas de la familia y en ese punto común la recta tangente de ambas curvas coinciden.



La condición analítica es

$$\det \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right) = 0$$

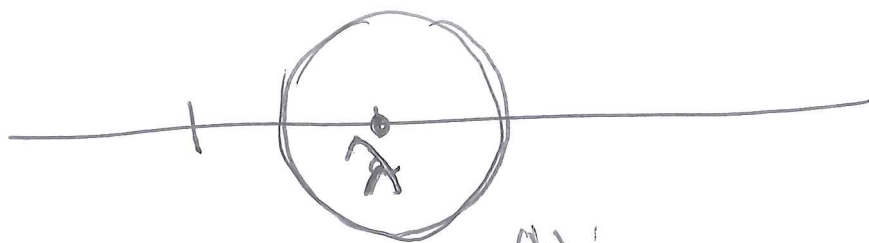
$$\begin{cases} x = x(t, \lambda) \\ y = y(t, \lambda) \\ \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Si, la familia de curvas está dada en forma implícita, la envolvente es la solución de

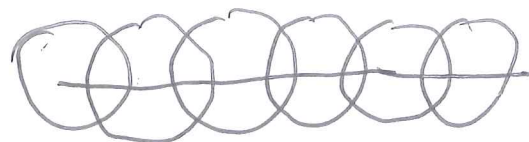
$$\begin{cases} \Phi(x, y, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

Circunferencia de centro $(\lambda, 0)$ y radio 1



$$\gamma_\lambda = \begin{cases} x = \lambda + \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$$



Envelope

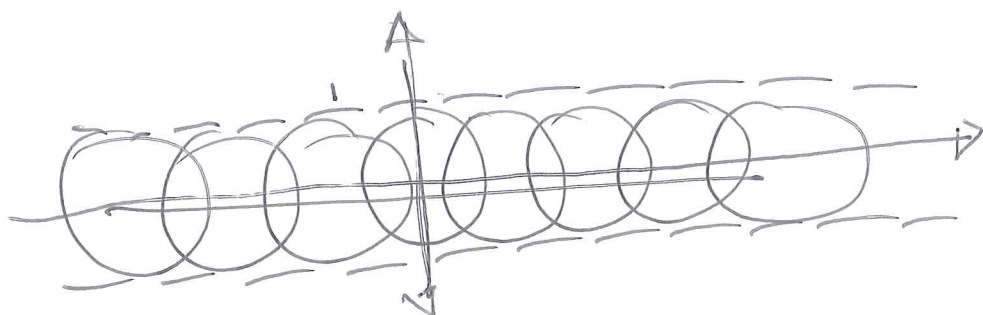
$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} x = \lambda + \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -\sin(t); \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \cos(t); \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Envelope: $\det \begin{pmatrix} -\sin(t) & 1 \\ \cos(t) & 0 \end{pmatrix} = -\cos(t) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \pm \sqrt{1 - \underbrace{\cos^2(t)}_0} = \pm \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$



En implicites

$$\Phi(x, y, \lambda) \equiv (x - \lambda)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -2(x - \lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \end{cases}$$

Junio 2019

Determinese el vector tangente y la recta tangente en $\vec{x}(0)$ a la curva de ecuaciones paramétricas

$$\vec{x}(t) = (t^2, e^t, t+t^3)$$

El vector

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \\ 1+3t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector tangente $\vec{T}$ es el vector unitario en la dirección $\vec{x}'$

$$\vec{T}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, 1, 1)$$

La recta tangente pasa por $\vec{x}(0) = (0, 1, 0)$ con dirección

$$\vec{x}'(0) = (0, 1, 1)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-0}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{1}$$

Ec. continua

Ec. paramétricas

Junio 2019

26

Demuéstrase que la curvatura de una recta es 0

La ecuación de una recta referida a la longitud de arco es

$$\vec{x} = \vec{p} + s \vec{v}$$

↗
• punto de apoyo

↖
vector de dirección unitario

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{v}$$

$$\text{como } \|\vec{v}\| = 1$$

$\vec{v}$ es un vector constante unitario

$$\vec{T}(s) = \vec{v}$$

La definición de curvatura.

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\vec{T}}{ds} \right\| = 0$$

De otra manera usando
la fórmula

$$\kappa = \frac{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|}{\|\vec{x}'(t)\|^3}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} p_1 + t v_1 \\ p_2 + t v_2 \\ p_3 + t v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(t) = \frac{0}{\|\vec{v}\|^3} = 0$$

$$\forall t \in \mathbb{R}$$

Junio 2019

Sea C la curva dada por

$$\vec{x}(t) = (t^2 - 1, t^3 - t, \sin(2\pi t))$$

para $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Se pide estudiar si $(0, 0, 0)$ es un punto múltiple,

$$c' \quad \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} t_1^2 - 1 \\ t_1^3 - t_1 \\ \sin(2\pi t_1) \end{pmatrix} = \vec{x}(t_2) = \begin{pmatrix} t_2^2 - 1 \\ t_2^3 - t_2 \\ \sin(2\pi t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Vamos a estudiar si

$$\begin{cases} t^2 - 1 = 0 \\ t^3 - t = 0 \\ \sin(2\pi t) = 0 \end{cases}$$

tiene varias soluciones en $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
De la primera ecuación

$$t^2 = 1 \Rightarrow t = 1 \text{ ó } t = -1$$

Comprobamos que ambos valores satisfacen también las otras dos ecuaciones. Por tanto,

$$\vec{x}(1) = \vec{x}(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por eso, $(0,0,0)$ es un punto múltiple



Comprobamos que estos valores de t están en el rango de definición

$$1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Junio 2022

30

3

Estudie si la curva C dada por la expresión

$$\vec{x}(t) = (t^5 - t^3 - t, \cos t, t^3 + t)$$

para $t \in \mathbb{R}$, tiene todos sus puntos regulares.

Que los puntos sean regulares significa que $\vec{x}'(t) \neq (0, 0, 0)$

$$\vec{x}'(t) = (5t^4 - 3t^2, -\sin(t), 3t^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5t^4 - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2(5t^2 - 3) = 0 \Rightarrow t = 0, t = \pm\sqrt{3/5} \\ -\sin(t) = 0 \Rightarrow t = k\pi \\ 3t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{1/3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

No hay ningún valor de t que anule simultáneamente las tres componentes de $\vec{x}'(t)$. Por consiguiente todos sus puntos son regulares

Junio 2022

4. Sea C la curva regular dada para $t \in \mathbb{R}$ por la parametrización

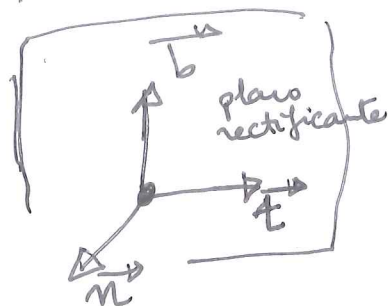
$$\vec{x}(t) = (t^5 - t^3 - t, \cos(t), t^3 + t)$$

Determine el plano rectificante en el punto $\vec{x}(0)$

Recordatorio:

* El plano rectificante es el plano que es normal al vector $\vec{n}$

* El vector $\vec{n}$ es el vector unitario en la dirección de $[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t)$



En nuestro caso

$$\vec{x}'(t) = (5t^4 - 3t^2 - 1, -\sin(t), 3t^2 + 1) \rightarrow \vec{x}'(0) = (-1, 0, 1)$$

$$\vec{x}''(t) = (20t^3 - 6t, -\cos(t), 6t) \rightarrow \vec{x}''(0) = (0, -1, 0)$$

La dirección del vector normal [que es la dirección ortogonal del plano rectificante]

$$[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)] \times \vec{x}'(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \times (-1, 0, 1) =$$

$$= (1, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 0)$$

El plano pedido, es el que se apoya en el pto $\vec{x}(0) = (0, 1, 0)$ con vector ortogonal $(0, -1, 0)$

$$0(x-0) + (-1)(y-1) + 0(z-0) = 0$$

$$\boxed{y-1=0}$$