Complementos de Matemáticas

PEC-1 (abril 2021)

Pec 1 (abril 2021)

Sea A el conjunto dado por

$$A=\{(1,y^2)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } y\in\mathbb{R}\}$$

elija la opción correcta

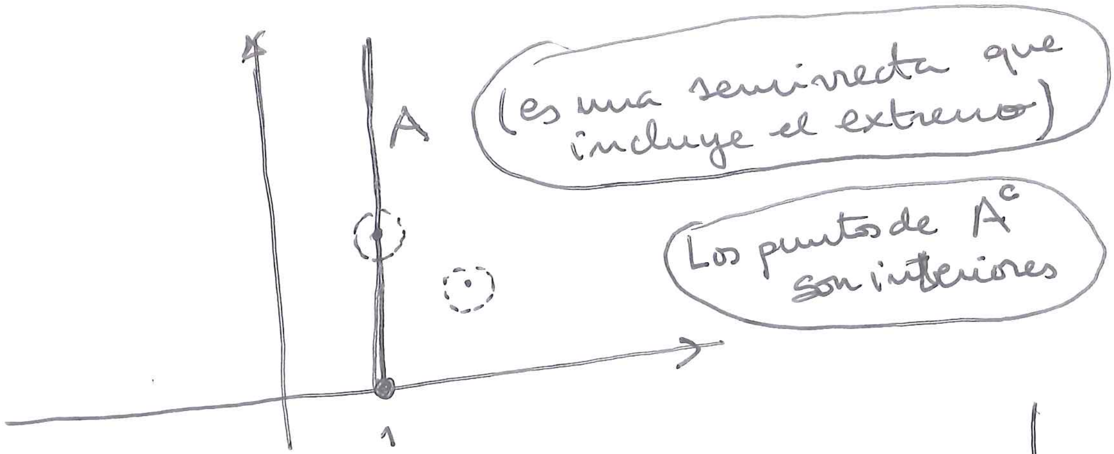
a) A es un conjunto compacto

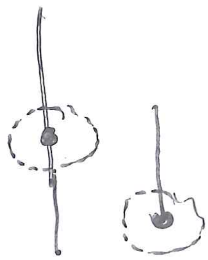
b) A es un conjunto cerrado

c) A es un conjunto abierto

d) No es correcta ninguna de las anteriores

¿Cómo es el conjunto A?





A <u>No</u> es acotado

Los puntos de A <u>no</u> son interiores

Todos los puntos de A son de la frontera

Por tanto $\text{int}(A)=\emptyset$

$\text{Front}(A)=A$

$\text{adherencia}(A)=\text{Int}(A)\cup\text{Fron}(A)=A$

$\Rightarrow$ A No es Abierto $\boxed{\text{A sí es cerrado}}$

Pec 1 (abril 2021)

Sean $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada tal que

$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

y sea A el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |x| \leq 1 \,,\ |y| \leq 1\}$$

Elija la correcta

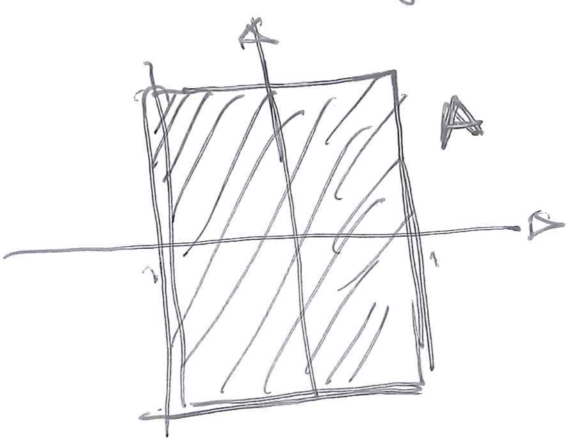
a) Para encontrar dónde se alcanza el mínimo absoluto, resolvemos exclusivamente un problema de extremos condicionados

b) La función no alcanza un mínimo absoluto en ese conjunto

c) Para encontrar dónde se alcanza el mínimo absoluto tenemos que resolver un problema de extremos relativos

d) No es correcta ninguna de las opcions

¿Cómo es el conjunto A?



Es un cuadrado incluyendo los bordes

Es un cerrado y acotado

Es un conjunto COMPACTO

¿Cómo es la función f?

$$z = f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

Es una forma cuadrática, que podemos expresar de varias formas

$$f(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}$$

Los autovalores de $\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ son $\begin{cases} \lambda_1 = \frac{3}{2} \\ \lambda_2 = 1/2 \end{cases}$

Los autovectores $\vec{v}_1 = (-1,1)$ $\vec{v}_2 = (1,1)$

Luego $f(x,y)$ es una forma cuadrática

<u>definida positiva</u>

Está claro, que en $(0,0) \in A$ hay un mínimo absoluto para f.

$$f(0,0) = 0$$

Por otro lado $(0,0)$ es un punto crítico que anula la diferencial

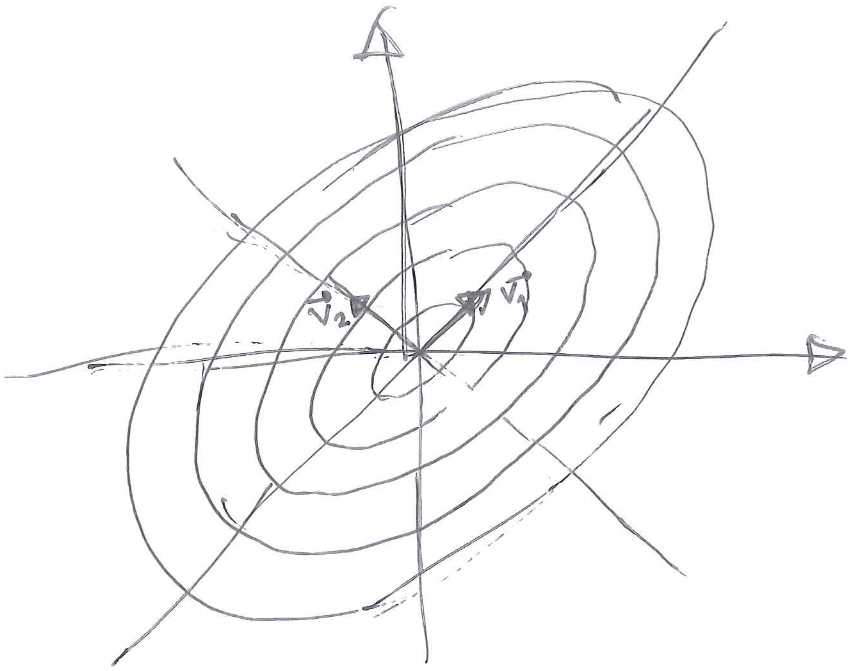
$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = 0$$

Es $(0,0)$ un mínimo relativo

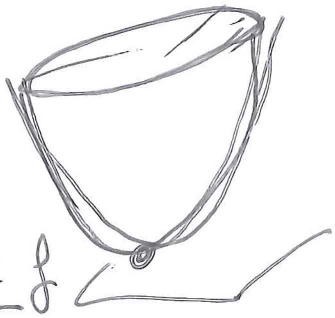
Las curvas de nivel

$$k = x^2 - xy + y^2 \iff (1,x,y)\begin{pmatrix}-k & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$$

Son elipses de semiejes $\vec{v}_1 = (-1,1)$ y $\vec{v}_2 = (1,1)$

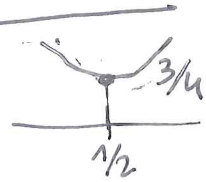


La gráfica de $z = f(x,y)$ es un paraboloide elíptico



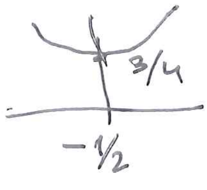
Si estudiamos el valor de f a lo largo de la frontera

$f(1,y) = 1 - y + y^2$

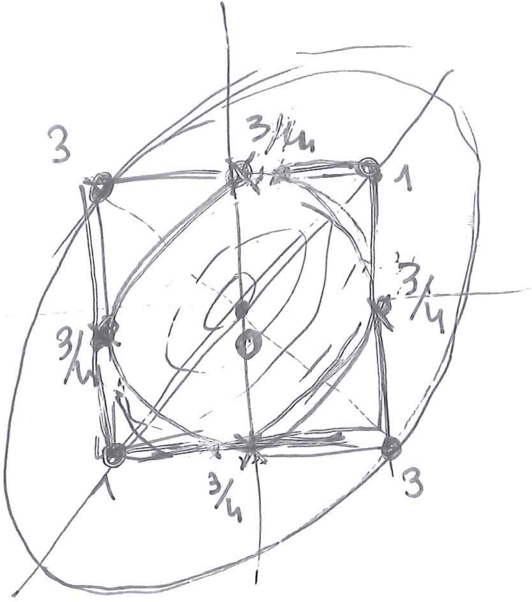


$f(x,1) = 1 - x + x^2$

$f(-1,y) = 1 + y + y^2$



$f(x,-1) = 1 + x + x^2$



Estudio de la función en el borde de A

6

La función f alcanza su mínimo absoluto (y relativo) en $(0,0) \in A$

$[f(0,0) = 0]$

Y alcanza su máximo absoluto en $(-1,1) \in A$, $(1,-1) \in A$

$[f(-1,1) = f(1,-1) = 3]$.

---

teorema Si una función $f: B \to \mathbb{R}$ es continua y B es compacto, entonces f alcanza sus máximos y sus mínimos absolutos en B

teorema Si además f es diferenciable en un abierto que contiene a B ~~entonces~~ los extremos absolutos de f ocurren en

1) en los puntos interiores de B que anulan la diferencial o en

2) en la frontera de B.

El límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sin(x)}{x} y,\ (1+x)^{1/x} \right)$$

es

a) $(0,0)$

b) $(0,e)$

c) No existe

d) ninguna de las anteriores

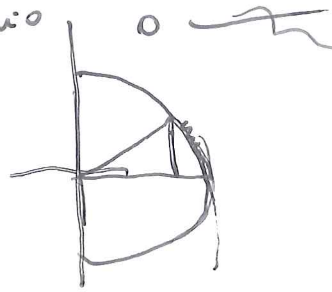
$$\lim_{(x,y)\to 0,0} \left(\frac{\sin(x)}{x} y,\ (1+x)^{1/x} \right) =$$

$$= \left(\lim_{(x,y)\to 0} \frac{\sin(x)}{x} y,\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x)^{1/x} \right)$$

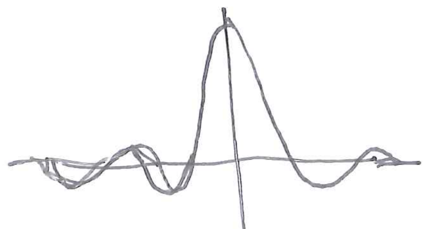
$$= (1\cdot 0,\ e) = (0,e)$$

Ojo: los límites iterados no tienen porqué ser el límite.
un razonamiento extra es necesario

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} y \right| < y$$



$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right|$ es una cantidad acotada por 1



Se tiene la ecuación

$$x^4+x^2y^3-y^2=1$$

a) Ninguna de las otras opciones es correcta

b) Esta ecuación define a x como una función de y en un entorno de $(1,1)$

c) Si g define a x como función implícita de y

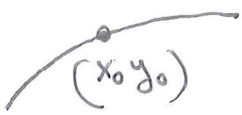
$x=g(y)$ en un entorno de $(1,1)$,

entonces $g'(1)=\frac{1}{6}$; $g''(1)=\frac{43}{108}$

d) Esta ecuación define a x como función implícita de y en un entorno de $(0,1)$

Tenemos una relación implícita entre $x-y$

$$\Phi(x,y)=x^4+x^2y^3-y^2-1 \quad =0$$



$\Phi(x_0,y_0)=0$

Teorema de la función implícita

$\Phi(x,y)=0$ define una función $y=f(x)$, implícita, en un entorno de (x_0,y_0) si

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_0,y_0) \neq 0$$

$\Phi(x,y)=0$ define una función $x=g(y)$, implícita, en un entorno de (x_0,y_0) si

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$$

En nuestro caso, en el punto $(1,1)$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = 4x^3+2xy^3 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(1,1) = 4+2=6 \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$ Existe $y=f(x)$ en un entorno de $(1,1)$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2-2y \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y}(1,1)=4 \neq 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$ Existe $x=g(y)$ en un entorno de $(1,1)$

En el $\boxed{\text{punto } (0,1)}$

$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(0,1) = 0 \Rightarrow$ (no existe $y=f(x)$); $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(0,1)=0$ (no existe $x=g(y)$)

Si $x = g(y)$

$$\Phi(x,y) = x^4 + x^2y^3 - y^2 - 1 = 0$$

Derivando Φ respecto de y (suponiendo que x es una función de y) $[x = g(y)]$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 4x^3x' + 2xx'y^3 + 3x^2y^2 - 2y \ldots$$

despejamos x'

$$(4x^3 + 2xy^3)\,x' = -3x^2y^2 + 2y$$

$$x' = \frac{-3x^2y^2 + 2y}{4x^3 + 2xy^3}$$

Particularizando para $(1,1)$

$$g'(1) = \frac{-1}{4+2} = \left(-\frac{1}{6}\right)$$

(*)

Derivando otra vez respecto de y

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = (12x^2x' \cdot x' + 4x^3x'') + (2x'^2y^3 + 2xx''y^3 + 6xx'y^2) + (6xx'y^2 + 6yx^2) - 2 = 0$$

(*) De otra manera

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx = 0$$

(dividiendo por dy)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dy} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x}}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{3x^2y^2 - 2y}{4x^3 + 2xy^3}$$

Si sustituimos los valores

$x=1 \qquad y=1 \qquad x' = -1/6$

Resulta

$$12 \cdot \frac{1}{36} + 4x'' + \frac{2}{36} + 2x'' - 1 - 1 + 6 - 2 = 0$$

$$6x'' = -\frac{1}{3} - \frac{1}{18} - 2 \Rightarrow 6x'' = -\frac{43}{18}$$

$$\Rightarrow x'' = -\frac{43}{108}$$

$$g''(1) = -\frac{43}{108}$$

De otra manera (derivando como un cociente)

$$g''(1) = \frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left[-\frac{3x^2y^2 - 2y}{4x^3 + 2xy^3}\right] =$$

$$= -\left[\frac{[6xx'y^2 + 6x^2y - 2][4x^3 + 2xy^3] - [12x^2x' + 2x'y^3 + 6xy^2]\cdot[3x^2y^2 - 2y]}{[4x^3 + 2xy^3]^2}\right]$$

$$\boxed{\text{Sustituyendo} \quad x = 1 \quad y = 1 \quad x' = -\frac{1}{6}}$$

$$x'' = -\left[\frac{(-1 + 6 - 2)[4+2] - [-2 - \frac{1}{3} + 6]\cdot[3-2]}{6^2}\right]$$

$$= -\left[\frac{18 - \frac{11}{3}}{36}\right] = -\frac{43}{108}$$