

Ejemplo

GEOMETRÍA de
la superficie

esférica

cilindro

allave@madrid.uned.es

GEOMETRÍA de la SUPERFICIE ESFÉRICA

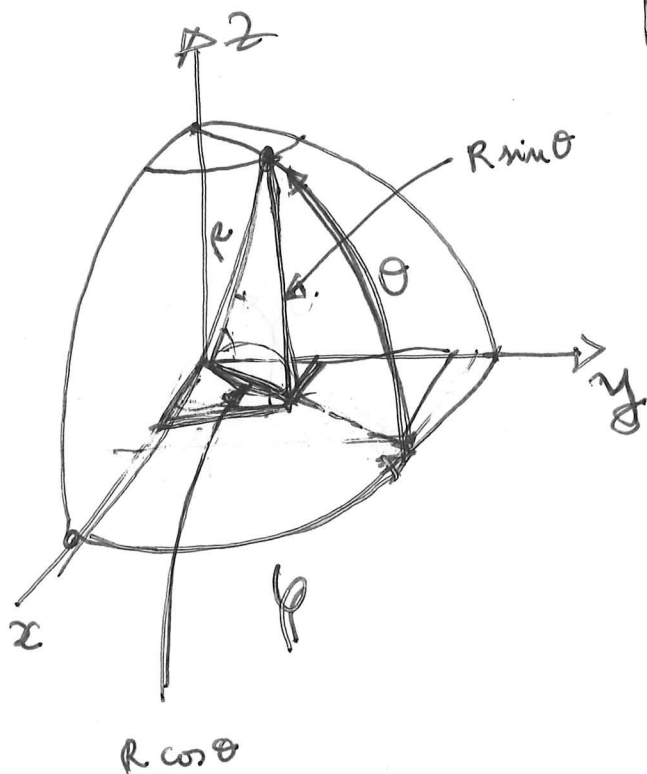
Parametrización geográfica de la esfera

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \cos \varphi \\ y = R \cos \theta \sin \varphi \\ z = R \sin \theta \end{cases}$$

(θ = latitud)
(φ = longitud)

$$\vec{x}(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} : \underbrace{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]}_{\mathbb{R}^2} \rightarrow \mathbb{R}^3$$



Otras formas: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (implícita)

Primera forma fundamental

$$\vec{x}_\theta = (-R \sin \theta \cos \varphi, -R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta)$$

$$\vec{x}_\varphi = (-R \cos \theta \sin \varphi, R \cos \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\begin{aligned} E = \vec{x}_\theta \cdot \vec{x}_\theta &= R^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + R^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta = \\ &= R^2 [\sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \cos^2 \theta] = \\ &= R^2 [\sin^2 \theta + \cos^2 \theta] = R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F = \vec{x}_\theta \cdot \vec{x}_\varphi &= R^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi - \\ &- R^2 \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G = \vec{x}_\varphi \cdot \vec{x}_\varphi &= R^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + 0 = \\ &= R^2 \cos^2 \theta [\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi] = R^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

con lo cual la métrica del plano
tangente

$$I(d\theta, d\varphi) = (d\theta, d\varphi) \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= I(d\theta, d\varphi) = \\ &= R^2 (d\theta)^2 + R^2 \cos^2 \theta (d\varphi)^2 \end{aligned}$$



cuando $F=0$ se dice
que las líneas de coordenadas
 $\theta = \text{cte}$ $\varphi = \text{cte}$ forman
un sistema de referencia geodésico

Segunda forma fundamental

(3)

$$\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -R \sin \theta \cos \varphi & -R \sin \theta \sin \varphi & R \cos \theta \\ -R \cos \theta \sin \varphi & R \cos \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-R^2 \omega^2 \cos \varphi, R^2 \omega^2 \sin \varphi, -R^2 \sin \theta \cos \theta \cos^2 \varphi - R^2 \cos \theta \sin^2 \varphi)$$

$$= (-R^2 \cos^2 \varphi, R^2 \sin^2 \varphi, -R^2 \sin \theta \cos \theta)$$

Normalizando $\|\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\varphi\| = R^2 \cos \theta$

$$\vec{n} = (-\cos \varphi, \sin \varphi, -\sin \theta) = -\vec{e}$$

$$\vec{x}_{\theta\theta} = (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, -R \sin \theta)$$

$$\vec{x}_{\theta\varphi} = (R \sin \theta \sin \varphi, -R \sin \theta \cos \varphi, 0)$$

$$\vec{x}_{\varphi\varphi} = (-R \cos \theta \cos \varphi, -R \cos \theta \sin \varphi, 0)$$

$$e = L = \vec{n} \cdot \vec{x}_{\theta\theta} = R \cos \theta$$

$$f = M = \vec{n} \cdot \vec{x}_{\theta\varphi} = 0$$

$$g = N = \vec{n} \cdot \vec{x}_{\varphi\varphi} = R \cos^2 \theta$$

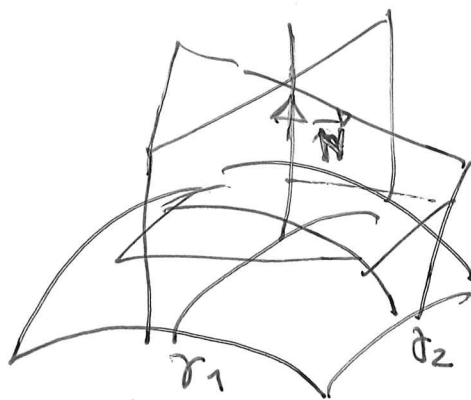
$$II(d\theta, d\varphi) = (d\theta, d\varphi) \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix}$$

$$II(d\theta, d\varphi) = R(d\theta)^2 + R \cos^2 \theta (d\varphi)^2$$

Líneas de curvatura

En un punto de la esfera, todas las secciones normales son círculos máximos (Tienen la misma curvatura $= \frac{1}{R}$)

La curvatura normal en una dirección $(d\theta, d\varphi)$ del plano tangente es.



$$K_n(d\theta, d\varphi) = \frac{II}{I}(d\theta, d\varphi)$$

$$K_n(d\theta, d\varphi) = \frac{R(d\theta)^2 + R \cos^2 \theta (d\varphi)^2}{R^2(d\theta)^2 + R^2 \cos^2 \theta (d\varphi)^2} = \frac{1}{R}$$

lo que coincide con la intuición

Recordatorio

$$K_n = \frac{II}{I}(d\theta, d\varphi)$$

$$\frac{e(d\theta)^2 + 2f d\theta d\varphi + g(d\varphi)^2}{E(d\theta)^2 + 2F d\theta d\varphi + G(d\varphi)^2}$$

(5)

Las líneas de curvatura
 son las soluciones de la ecuación

$$\begin{vmatrix} (dx)^2 & -dxdy & (dy)^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (d\theta)^2 & -d\theta dr & (dr)^2 \\ R^2 & 0 & R^2 \omega^2 \theta \\ R & 0 & R \omega^2 \theta \end{vmatrix} = 0$$

lo cual se verifica para
 cualquier dirección

(Son las líneas en las que las
 curvaturas normales son máximas
 y mínimas) en nuestro caso
 $K_1 = \frac{1}{R}$; $K_2 = \frac{1}{R}$

La curvatura media

$$\frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \frac{eG + gE - 2fF}{2(EG - F^2)} = \frac{R^3 \omega^2 \theta + R^3 \omega^2 \theta - 0}{2(R^4 \omega^2 \theta - 0)} = \frac{1}{2R}$$

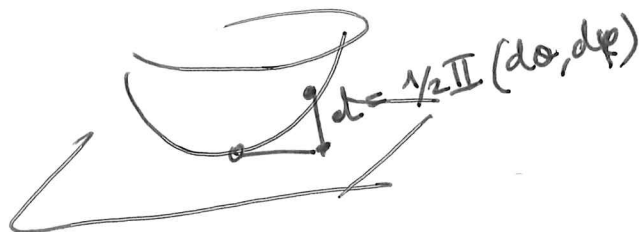
La curvatura total (o de Gauss)

$$K_1 \cdot K_2 = \frac{f^2 - eg}{F^2 - EG} = \frac{0 - R^2 \omega^2 \theta}{0 - R^4 \omega^2 \theta} = \frac{1}{R^2}$$

(6)

Las líneas asintóticas

Todos los puntos de la esfera
son de tipo elíptico



$$LN - M^2 = R \cdot R \omega^2 \theta - \theta^2 =$$

$$= R^2 \omega^2 \theta > 0$$

Todos los puntos están del mismo
lado del plano tangente.
Intuitivamente en una
esfera no hay líneas asintóticas.

$$II(d\theta, d\phi) = 0$$

$$R(d\theta)^2 + R \omega^2 \theta (d\phi)^2 = 0$$

$$R + R \omega^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 = 0$$

$$1 + \omega^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 \Rightarrow \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right)^2 = -\frac{1}{\omega^2 \theta}$$

No tiene soluciones reales
NO HAY LÍNEAS ASINTÓTICAS

Los puntos umbilicos

7

Don
Un punto es umbilico si las curvaturas normales son iguales en todas las direcciones

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = \text{cte}$$

Es el caso de la esfera, en la que todos los puntos son umbilicos

$$\frac{R}{R^2} = \frac{0}{0} = \frac{R \cos \theta}{R^2 \cos^2 \theta} = \frac{1}{R} = \text{cte}$$

líneas geodésicas sobre la superficie esférica

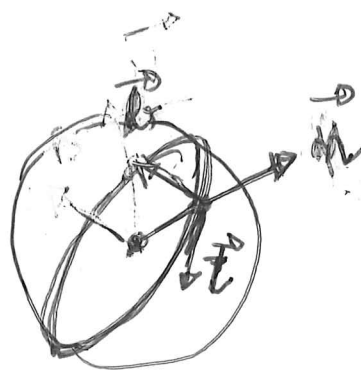
En la superficie esférica son líneas geodésicas los círculos máximos

Es decir, las circunferencias que se obtienen al cortar la esfera por un plano que contiene al centro.

En un círculo máximo el vector normal, $\vec{N}$,

a la curva tiene la dirección del radio

y, por tanto, coincide con el vector normal, $\vec{N}$, a la superficie



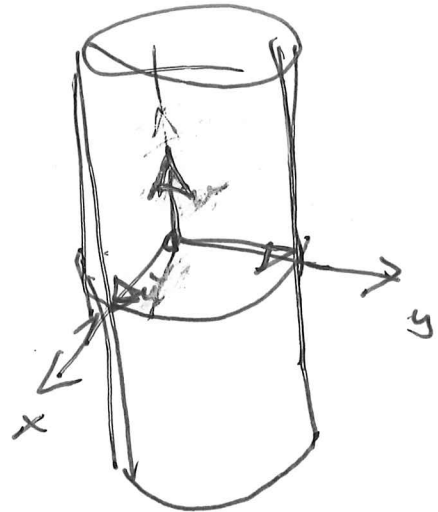
Un círculo máximo es una curva plana por tanto, está contenida en el plano osculador

ESTUDIO DE LA superficie de un cilindro

1

Ecuaciones

$$\vec{r}(u, v) = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ v \end{pmatrix}$$



$$\vec{x}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0)$$

$$\vec{x}_v = (0, 0, 1)$$

Primer forma fundamental

$$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = \sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$$

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = 0$$

$$G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = 1$$

$$I(du, dv) = (du \ dv) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

vector normal a la superficie $\vec{N}$:

$$\vec{N} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos u, \sin u, 0)$$

$$\vec{x}_{uu} = (-\cos(u), -\sin(u), 0); \vec{x}_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{x}_{vv} = (0, 0, 0)$$

Segunda forma fundamental

(2)

$$L = e = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uu} = -\cos^2 u - \sin^2 u = -1$$

$$M = f = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uv} = 0$$

$$N = g = \vec{N} \cdot \vec{x}_{vv} = 0$$

$$II(du, dv) = (du, dv) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Curvaturas principales

Son las soluciones de

$$(EG - F^2) \chi^2 - (Eg - 2Ff + Ge) \chi + (LN - M^2) = 0$$

$$1 \chi^2 + \chi + 0 = 0$$

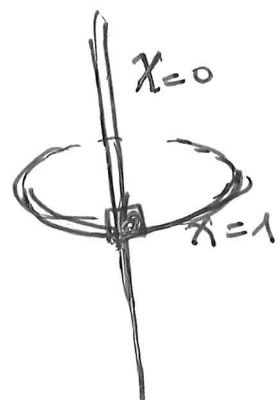
$$\chi(\chi + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \chi_1 = 0 \\ \chi_2 = -1 \end{cases}$$

Las líneas de curvatura

$$\begin{vmatrix} (du)^2 & du dv & (dv)^2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$0(du)^2 + du dv + 0(dv)^2 = 0$$

$$- du dv = 0 \Rightarrow \begin{cases} du = 0 \rightarrow u = cte \\ dv = 0 \rightarrow v = cte \end{cases}$$



Curvatura media y total

Curvatura media $(K_m = \frac{K_1 + K_2}{2})$

$E = 1$	$e = -1$
$F = 0$	$f = 0$
$G = 1$	$g = 0$

3

$$X_m = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} = \frac{0 \cdot -0 + (-1)}{2(1 - 0)} = -\frac{1}{2}$$

Curvatura total $(K_1 \cdot K_2)$

$$X_k = K_1 \cdot K_2 = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0}{1 - 0} = 0$$

[Comprobación $K_m = \frac{K_1 + K_2}{2} = \frac{0 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$ $K_g = K_1 \cdot K_2 = 1 \cdot 0 = 0$]

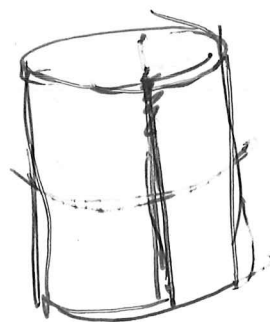
Direcciones asintóticas

$$II(du, dv) = 0 \Leftrightarrow e(du)^2 + 2f du dv + g(dv)^2 = 0$$

$$-(du)^2 + 0 du dv + 0 (dv)^2 = 0$$

$$(du)^2 = 0 \Rightarrow du = 0 \Rightarrow u = \text{cte}$$

Son las generatrices del cilindro



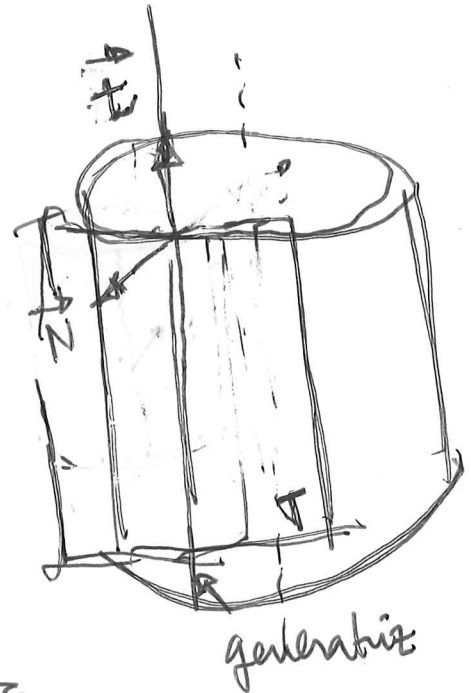
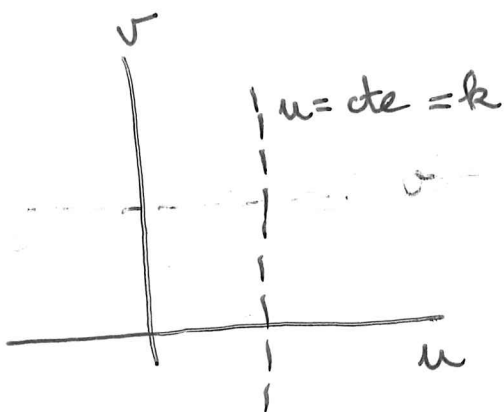
Geodésicas

En un cilindro son líneas geodésicas

(4)

- a) las generatrices
- b) los paralelos
- c) las hélices

a)



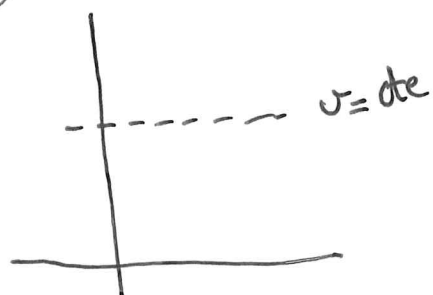
Se transforma en la curva

$$\alpha(t) = (\cos(k), \sin(k), t) \quad [k = ct]$$

que es una recta (y por tanto $\vec{n}(s) = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = (0, 0, 0)$)

Una recta es una geodésica.

b)



$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$$

$$\alpha''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

$$[\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \times \alpha'(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ -\sin t & \cos t & 0 \end{vmatrix} = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$\vec{n} = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$\vec{N}^0 = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

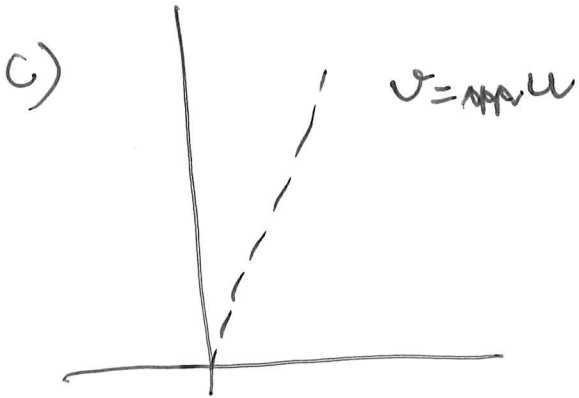
$$\vec{N}^0 \cdot \vec{n} = -\cos^2(t) - \sin^2(t) = -1$$

$\vec{N}^0$ y $\vec{n}$ forman un ángulo de $-\pi$ (misma dirección)

no tienen curvatura geodésica
ya que están alineados



(6)



$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), mt)$$

$$\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), m)$$

$$\alpha''(t) = (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

$$\alpha' \times \alpha'' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin t & \cos t & m \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = (m \sin t, -m \cos t, 1)$$

$$(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ m \sin t & -m \cos t & 1 \\ -\sin t & \cos t & m \end{vmatrix} =$$

$$= (-m^2 \cos t - \cos t, -m^2 \sin t - \sin t, 0)$$

$$\|(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'\| = \sqrt{(m^2 \cos t - \cos t)^2 + (m^2 \sin t - \sin t)^2}$$

$$= \sqrt{m^4 \cos^2 t + \cos^2 t - 2m^2 \cos^2 t + m^4 \sin^2 t + \sin^2 t - 2m^2 \sin^2 t} =$$

$$= \sqrt{m^4 + 1 - 2m^2} = \sqrt{(m^2 + 1)^2} = m^2 + 1$$

$$\vec{n} = \frac{(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'}{\|(\alpha' \times \alpha'') \times \alpha'\|} = \frac{1}{m^2 + 1} \cdot (-m^2 \cos t - \cos t, -m^2 \sin t - \sin t, 0)$$

$$= (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

(7)

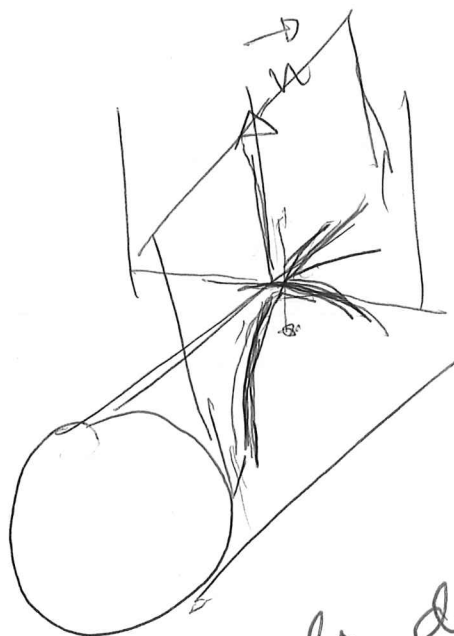
Si medimos el ángulo que forman
 $\vec{N}$ y $\vec{n}$

$$\vec{N} \cdot \vec{n} = (-\cos(t), -\sin(t), 0) \cdot (\cos(t), \sin(t), 0) =$$

$$= -\cos^2(t) - \sin^2(t) = -1$$

luego el ángulo que forman $\vec{n}$ y $\vec{N}$
 (están alineados)

No hay curvatura geodésica



secciones
normales

Las secciones normales de un
 cilindro son elipses

