PEC 2020

PEC 2020

PRUEBA DE EVALUACIÓN (PEC)

1.- Considere la ecuación

$$\left[y\cos(xy)+e^{x}\right]dx+Q(x,y)\,dy=0$$

a) Halle la forma más general de la función $Q(x,y)$, de manera que la ecuación sea diferencial exacta, y obtenga aquella que verifique $Q(0,y)=1$.

b) Resuelva la ecuación para la función $Q(x,y)$ hallada.

2.- Considere el operador diferencial

$$L(y)=xy''-(1+3x)y'+3y$$

a) Halle $L\left(e^{cx}\right)$ y el valor de la constante c, para el cual $L\left(e^{cx}\right)=0$.

b) Determinar la solución general de la ecuación $L(y)=xy''-(1+3x)y'+3y=0$ utilizando el método de reducción de orden.

3.- Aplicando la transformada de Laplace, resuelva el problema de valores iniciales:

$$\frac{dy}{dx}-2y=e^{5x}$$

$$y(0)=3$$

VALORACIÓN

Ej. 1: (3´25 ptos.) Aptdo, a) 1.5 ptos.(1+0,5) b) 1,75.

Ej. 2; (3,5 ptos.) Aptdo, a) 1,25ptos.(0,5+0,75). b) 2,25 ptos.

Ej. 3: (3.25 ptos.)

Tiempo de realización: **Hasta el lunes 20 de Abril a las 23 horas.**

$\boxed{\text{PEC 2020}}$

1) Considere la ecuación

$$[y\cos(xy)+e^x]\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

a) Halle la forma más general de la función $Q(x,y)$ de manera de la ecuación sea diferencial exacta, y obtenga aquella que verifique $Q(0,y)=1$

b) Resuelva la ecuación para la función $Q(x,y)$ hallada.

Respuesta.

Para que sea una diferencial exacta

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[y\cos(xy)+e^x\right] = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

$$\cos(xy) - xy\sin(xy) = \frac{\partial}{\partial x}Q(x,y)$$

$$\Rightarrow Q(x,y) = \int \cos(xy) - xy\sin(xy)\,dx$$

$$= \frac{1}{y}\sin(xy) - \frac{\sin(xy)}{y} + x\cos(xy)$$

$$= x\cos(xy) + \varphi(y)$$

Si $Q(0,y)=1$

$$Q(0,y) = 0\cos 0 + \varphi(y) = 1 \Rightarrow \varphi(y) = 1$$

de este modo $\boxed{Q(x,y) = x\cos(xy) + 1}$

b) $\left[y\cos(xy) + e^x\right]dx + \left[x\cos(xy) + 1\right]dy = 0$

Es una diferencial exacta. Buscamos la correspondiente función ~~potencial~~

$$\frac{\partial P}{\partial x} = y\cos(xy) + e^x$$

$$P = \int \left[y\cos(xy) + e^x\right]dx =$$

$$= \sin(xy) + e^x + \varphi(y)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \cancel{x\cos(xy)} + \varphi'(y) = \cancel{x\cos(xy)} + 1$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 1 \Rightarrow \varphi(y) = y$$

Por tanto

$$P(x,y) = \sin(xy) + e^x + y$$

solución $P(x,y) = cte$

$$\boxed{\sin(xy) + e^x + y = cte}$$

PEC 2020

2) Considerese el operador diferencial

$$L(y) = x y'' - (1+3x)y' + 3y$$

a) Halle $L(e^{cx})$ y el valor de la constante c para la cual $L(e^{cx}) = 0$

b) Determinar la solución general de la ecuación $L(y) = x y'' - (1+3x)y' + 3y = 0$ utilizando el método de REDUCCIÓN de ORDEN

Respuesta

a)

$$\begin{cases} y = e^{cx} \\ y' = c e^{cx} \\ y'' = c^2 e^{cx} \end{cases}$$

$$L(e^{cx}) = x c^2 e^{cx} - (1+3x) c e^{cx} + 3 e^{cx} =$$

$$e^{cx}\left[c^2 x - c - 3cx + 3 \right] =$$

$$= \underbrace{e^{cx}}_{\text{Este término nunca es cero}} \left[c^2 x \underbrace{- (3x+1)c + 3}_{\text{tiene que anularse este término para cualquier } x} \right] = 0$$

para $x=0$) $-c+3=0 \Rightarrow \boxed{c=3}$

Comprobación: $e^{3x}\left[9x - 9x - 3 + 3\right] = 0$

La función $y_1 = e^{3x}$ es una solución particular de $L(y) = 0$ (Ec. diferencial lineal homogénea de segundo orden)

Método de reducción de orden: (pag 88)

(Ecuaciones lineales de coeficientes variables)

Si $y_1(x)$ es una solución particular de una ecuación lineal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

El cambio de variable

$$y = y_1(x) \cdot u(x)$$

rebajo en 1 el grado de la ecuación y queda $\boxed{y_1 u'' + (2y_1' + p y_1)u' = 0}$ (*)

Luego se hace $w = u'$; $u'' = w'$

En nuestro caso

$$\begin{cases} y = e^{3x} \cdot u(x) \\ y' = 3e^{3x} u(x) + e^{3x} u'(x) \\ y'' = 9e^{3x} u(x) + 3e^{3x} u'(x) + 3e^{3x} u'(x) + e^{3x} u''(x) \\ \quad = 9e^{3x} u(x) + 6e^{3x} u'(x) + e^{3x} u'' \end{cases}$$

(*) Demostración

$$\left.\begin{cases} y = y_1 u \\ y' = y_1' u + y_1 u' \\ y'' = y_1'' u + y_1' u' + y_1' u' + y_1 u'' \\ \quad = y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'' \end{cases}\right\}$$ sustituyendo en la ecuación

$$y_1'' u + 2y_1' u' + y_1 u'' + p y_1' u + p y_1 u' + q y_1 u = 0$$

$$y_1 u'' + (2y_1' + p y_1) u' + u[\underbrace{y_1'' + p y_1' + q y_1}_{0}] = 0$$

$$y_1 u'' + (2y_1' + p y_1) u' = 0$$

lo hacemos directamente

$$x\left[9e^{3x}u+6e^{3x}u'+e^{3x}u''\right]-(1+3x)(3e^{3x}u+e^{3x}u')$$
$$+3e^{3x}u=0$$

dividimos todos los términos por e^{3x}

$$9xu+6xu'+xu''-3u-u'-9xu-3xu'+3u=0$$

$$xu''+[6x-1-3x]u'+[\underbrace{9x-3-9x+3}_{0}]u=0$$

$$xu''+(3x-1)u'=0$$

haciendo el cambio $u'=w$

$$xw'+(3x-1)w=0$$

Es una ecuación lineal de 1er orden

$$x\frac{dw}{dx}+(3x-1)w=0$$

$$x\frac{dw}{dx}=-(3x-1)w$$

$$\int\frac{dw}{w}=\int\frac{1-3x}{x}dx=\int\frac{1}{x}dx-\int 3dx$$

$$\ln(w)=\ln(x)-3x+C=\ln(x)+\ln(e^{-3x})+C$$

$$\ln(w)=\ln\left(\frac{x}{e^{3x}}\right)+C$$

$$w=C_1xe^{-3x}$$

ahora se deshacen los cambios

$$u' = w \Rightarrow u = \int w$$

$$u = \int c_1 x e^{-3x} dx =$$

$$= c_1 \int x e^{-3x} dx = c_1 \left[-\frac{1}{9} e^{-3x} (3x+1) \right] + c_1$$

$$u = c_1 e^{-3x} (3x+1) + c_2$$

Deshaciendo el cambio

$$y = e^{3x} u(x) =$$

$$= e^{3x} \left[c_1 e^{-3x} (3x+1) + c_2 \right] =$$

$$= c_1 (3x+1) + c_2 e^{3x}$$

$$\boxed{y = c_1 (3x+1) + c_2 e^{3x}}$$

Comprobación $y = 3x+1$ $\quad y' = 3 \quad y'' = 0$

$$x \cdot 0 - (1+3x) \cdot 3 + 3(3x+1) = 0$$

$y = e^{3x} \quad y' = 3e^{3x} \quad y'' = 9e^{3x}$

Esto ya lo comprobamos.

3 7

Aplicando la transformada de Laplace, resuelva el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{5x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Respuesta

Tomando la transformada de Laplace de los dos miembros de la ecuación

$$\mathcal{L}(y' - 2y) = \mathcal{L}(e^{5x})$$

$$\mathcal{L}(y') - \mathcal{L}(2y) = \mathcal{L}(e^{5x})$$

$$sY - 3 - 2Y = \frac{1}{s-5}$$

$$(s-2)Y = \frac{1}{s-5} + 3 = \frac{1+3s-15}{s-5} = \frac{3s-14}{s-5}$$

$$Y = \frac{3s-14}{(s-5)(s-2)} = \frac{A}{s-5} + \frac{B}{s-2} =$$

$$= \frac{A(s-2) + B(s-5)}{(s-5)(s-2)} = \frac{1/3}{s-5} + \frac{8/3}{s-2}$$

$$y = \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-5}\right) + \frac{8}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) =$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}e^{5x} + \frac{8}{3}e^{2x}}$$

Comprobación

$$\frac{5}{3}e^{5x} + \cancel{\frac{16}{3}e^{2x}} - \frac{2}{3}e^{5x} - \cancel{\frac{16}{3}e^{2x}} = e^{5x}$$

9

Esta ecuación también se puede hacer directamente

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 2y = e^{5x} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$ Es una ecuación lineal

1) Solución general de la homogénea

$$\frac{dy}{dx} - 2y = 0 \to \frac{dy}{dx} = 2y \to \int \frac{dy}{y} = \int 2\,dx$$

$$\ln(y) = 2x + C \Rightarrow \boxed{y = Ce^{2x}}$$ (solución general de la homogénea)

2) Solución particular de la completa $\begin{cases} y = Ae^{5x} \\ y' = 5Ae^{5x} \end{cases}$

$$5Ae^{5x} - 2Ae^{5x} = e^{5x}$$

$$5A - 2A = 1 \Rightarrow 3A = 1 \Rightarrow \boxed{y_p = \frac{1}{3} e^{5x}}$$ solución particular de la completa

3) $$\boxed{y = Ce^{2x} + \frac{1}{3} e^{5x}}$$

$$y(0) = C + \frac{1}{3} = 3 \Rightarrow C = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\boxed{y = \frac{8}{3} e^{2x} + \frac{1}{3} e^{5x}}$$

Comprobación: $\cancel{\frac{16}{3} e^{2x}} + \frac{5}{3} e^{5x} - \cancel{\frac{16}{3} e^{2x}} - \frac{2}{3} e^{5x} = e^{5x}$