

Emanadas diferenciales

PEC 2019

PEC 2018

PEC 2017

PEC 2019

① a) Compruebe que

$$f(x, y) = -\frac{2x^3}{3x^2y + y^3}$$

es una función homogénea de grado cero.

b) Resuelva la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$, donde $f(x, y)$ es la función del apartado anterior

Recordatorio

a) se dice que f es homogénea si

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

En efecto

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= -\frac{2\lambda^3 x^3}{2\lambda^3 x^2 y + \lambda^3 y^3} = -\frac{2x^3}{2x^2 y + y^3} \\ &= f(x, y) \end{aligned}$$

(3)

b) Como $y' = f(x, y)$ es una ecuación homogénea se puede escribir como una función de $\left(\frac{y}{x}\right)$. Dividiendo numerador y denominador por x^3 , resulta

$$y' = f(x, y) = - \frac{2 \frac{x^3}{x^3}}{3 \frac{x^2 y}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}} = - \frac{2}{3\left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^3}$$

Se hace el cambio de variable

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \\ \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} x + u \end{cases}$$

de modo que la ecuación se reduce a una de variables separables

$$\frac{du}{dx} x + u = - \frac{2}{3u + u^3}$$

$$\frac{du}{dx} x = - \frac{2}{3u + u^3} - u$$

$$\frac{du}{dx} x = - \frac{2 + 3u^2 + u^4}{3u + u^3}$$

$$\frac{u^3 + 3u}{u^4 + 3u^2 + 2} du = - \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{u^3 + 3u}{u^4 + 3u^2 + 2} du = - \int \frac{dx}{x}$$

(4)

La primera integral es una integral racional, que hay que escribirla como suma de fracciones elementales

Para hallar las raíces de $u^4 + 3u^2 + 2 = 0$ observamos que es una ecuación bicuadrada

$$\text{Si } z = u^2$$

$$z^2 + 3z + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} z_1 = -1 \\ z_2 = -2 \end{cases}$$

Por tanto, las raíces son $\begin{cases} u = \pm \sqrt{-1} = \pm i \\ u = \pm \sqrt{-2} = \pm \sqrt{2}i \end{cases}$

Recordatorio

Si $z = \alpha + \beta i$ y $\bar{z} = \alpha - \beta i$ son dos raíces complejas conjugadas de un polinomio, la factorización del polinomio es

$$\begin{aligned} (x-z)(x-\bar{z}) &= x^2 - (z+\bar{z})x + z\bar{z} \\ &= x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2) \end{aligned}$$

5

luego el denominador se factoriza

$$u^4 + 3u^2 + 2 = (u^2 + 1)(u^2 + 2)$$

De donde

$$\frac{u^3 + 3u}{u^4 + 3u^2 + 2} = \frac{Au + B}{u^2 + 1} + \frac{Cu + D}{u^2 + 2}$$

$$= \frac{(u^2 + 2)(Au + B) + (u^2 + 1)(Cu + D)}{(u^2 + 1)(u^2 + 2)} =$$

$$= \frac{(A + C)u^3 + (B + D)u^2 + (2A + C)u + (2B + D)}{(u^2 + 1)(u^2 + 2)}$$

Identificando coeficientes

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B + D = 0 \\ 2A + C = 3 \\ 2B + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 0 \\ C = -1 \\ D = 0 \end{cases}$$

de donde resulta

(6)

$$\frac{u^3+3u}{u^4+3u^2+2} = \frac{2u}{u^2+1} + \frac{-u}{u^2+2}$$

Así pues

$$\int \frac{u^3+3u}{u^4+3u^2+2} du = \int \frac{2u}{u^2+1} du + \int \frac{-u}{u^2+2} du =$$

$$= \ln(u^2+1) - \frac{1}{2} \ln(u^2+2) =$$

$$= \ln\left(\frac{u^2+1}{\sqrt{u^2+2}}\right)$$

Por otro lado, la segunda integral

$$-\int \frac{dx}{x} = -\ln(x) + C = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

Igualando las dos integrales

$$\ln\left(\frac{u^2+1}{\sqrt{u^2+2}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

Tomando exponenciales en ambos miembros

$$\frac{u^2+1}{\sqrt{u^2+2}} = \frac{C}{x} \Leftrightarrow \frac{(u^2+1)^2}{u^2+2} = \frac{C}{x^2}$$

Desahaciendo el cambio $u = \sqrt{y/x}$

7

$$\frac{\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)^2}{\frac{y^2}{x^2} + 2} = \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)^2}{\frac{y^2 + 2x^2}{x^2}} = \frac{C}{x^2}$$

$$\frac{(y^2 + x^2)^2 / x^4}{y^2 + 2x^2 / x^2} = \frac{C}{x^2} \Leftrightarrow \frac{\frac{(y^2 + x^2)^2}{x^2}}{y^2 + 2x^2} = \frac{C}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{(y^2 + x^2)^2}{y^2 + 2x^2} = C}$$

$\nearrow$
 familia de curvas en forma
 implícita
 (solución general de la ecuación)

2) En la ecuación lineal no homogénea
 $H(D)y = 2e^x$

donde $H(D) = D^2 + pD + 6$.

Se pide:

- Hallar el valor de p y la solución general de la ecuación homogénea asociada, sabiendo que $r=3$ es raíz de la ecuación característica.
- Una solución particular de la ecuación completa, utilizando el método de variación de las constantes.
- Solución general de la ecuación completa.

a) La ecuación diferencial completa es
 $y'' + py' + 6y = 2e^x$

la ecuación homogénea es

$$y'' + py' + 6y = 0$$

[1]

Si $r=3$ es una raíz del polinomio característico $y = e^{3x}$ es una solución y, por tanto satisface la ecuación homogénea. Sustituyendo en [1]

$$9e^{3x} + 3pe^{3x} + 6e^{3x} = 0$$

$$(9 + 3p + 6)e^{3x} = 0$$

$$9 + 3p + 6 = 0 \Rightarrow p = -5$$

(9)

De esta manera el polinomio característico es

$$p(r) = r^2 - 5r + 6 = (r - 3)(r - 2)$$

con lo cual las soluciones fundamentales son $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = e^{3x}$

La solución general de la homogénea es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

b) Para buscar una solución particular de la completa

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^x$$

por el método de variación de las constantes, ensayamos

$$y_{op} = C_1(x) e^{2x} + C_2(x) e^{3x}$$

Con las condiciones

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = F(x) \end{cases}$$

En nuestro caso

$$\begin{cases} C_1' e^{2x} + C_2' e^{3x} = 0 \\ C_1' 2e^{2x} + C_2' 3e^{3x} = 2e^x \end{cases}$$

Resolvemos este sistema usando la regla de Cramer

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 2e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{-2e^{4x}}{e^{5x}} = -2e^{-x}$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 2e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{2e^{3x}}{e^{5x}} = 2e^{-2x}$$

Integrando

$$C_1 = \int -2e^{-x} dx = 2e^{-x}$$

$$C_2 = \int 2e^{-2x} dx = -e^{-2x}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned}
 y_p &= c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x} = \\
 &= 2e^x e^{2x} - e^{-2x} e^{3x} = \\
 &= 2e^x - e^x \\
 &= e^x
 \end{aligned}$$

Con lo cual la solución general de la ecuación es

$$y = \underbrace{c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}}_{y_H} + \underbrace{e^x}_{y_p}$$

Observación: La solución particular de la completa se podría haber hecho ensayando $y_p = A e^x$

También se podría haber hecho teniendo en cuenta que si $F(x) = 2e^{mx}$

$$y_p = 2 \frac{1}{H(m)} e^{mx} = 2 \frac{1}{1^2 - 5 \cdot 1 + 6} e^x = e^x$$

3) a) Recordando que las funciones hiperbólicas

$$\cosh(bx) = \frac{1}{2} (e^{bx} + e^{-bx})$$

$$\sinh(bx) = \frac{1}{2} (e^{bx} - e^{-bx})$$

halle sus respectivas transformadas de Laplace

$$L[\cosh(bx)], L[\sinh(bx)] \quad (b \in \mathbb{R})$$

b) Resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' - y = \cosh(ax) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Recordatorio

$$\begin{aligned} L(e^{ax}) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} dx = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)x} dx = \\ &= \frac{1}{s-a} \quad s > a \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[\cosh(bx)] = \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{bx}] + \mathcal{L}[e^{-bx}]) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s+b} \right] = \frac{1}{2} \frac{s+b+s-b}{s^2-b^2} = \frac{s}{s^2-b^2}$$

$$\mathcal{L}[\sinh(bx)] = \frac{1}{2}[\mathcal{L}(e^{bx}) - \mathcal{L}(e^{-bx})] =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s+b} \right) = \frac{1}{2} \frac{s+b-s+b}{s^2-b^2} =$$

$$= \frac{b}{s^2-b^2}$$

b) Recordatorio

$$\mathcal{L}[y'] = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy(0) - y'(0)$$

Aplicando el operador $\mathcal{L}$ a la ecuación

$$\begin{cases} \mathcal{L}[y' - y] = \mathcal{L}[\cosh(x)] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

substituyendo

$$sY - 0 - Y = \frac{s}{s^2 - 1}$$

$$(s-1)Y = \frac{s}{s^2-1}$$

$$Y = \frac{s}{(s^2-1)(s-1)} \stackrel{(*)}{=} \frac{s}{(s+1)(s-1)(s-1)}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+1)(s-1)^2}\right]$$

Para hallar la transformada inversa hay que descomponer en fracciones elementales

$$\frac{s}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s-1)^2}$$

$$= \frac{A(s-1)^2 + B(s+1)(s-1) + C(s+1)}{(s+1)(s-1)^2}$$

(15)

$$= \frac{A(s^2 - 2s + 1) + B(s^2 - 1) + C(s + 1)}{(s + 1)(s - 1)^2} =$$

$$= \frac{(A + B)s^2 + (-2A + C)s + (A - B + C)}{(s + 1)(s - 1)^2}$$

Igualando los coeficientes

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ -2A + C = 1 \\ A - B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ 2B + C = 1 \\ 2C = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1/4 \\ B = 1/4 \\ C = 1/2 \end{cases}$$

con lo que

$$\frac{s}{(s + 1)(s - 1)^2} = \frac{-1/4}{s + 1} + \frac{1/4}{s - 1} + \frac{1/2}{(s - 1)^2}$$

(16)

Así que

$$y = -\frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] + \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] + \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^2}\right]$$

Para hallar $\mathcal{L}^{-1}$ consultamos la tabla de transformadas

y	$Y = \mathcal{L}(y)$
1	$\frac{1}{s}$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$e^{ax} f(x)$	$F(s-a)$
$x f(x)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$

y	$Y = \mathcal{L}(y)$
$x e^x$	$-\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-1} \right) = \frac{1}{(s-1)^2}$

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-x} \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) = e^x \\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) = x e^x \end{cases}$$

Sustituyendo

$$y = -\frac{1}{4} e^{-x} + \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{2} x e^x$$

de otro modo

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right] + \frac{1}{2} x e^x$$

$$= \frac{1}{2} \sinh(x) + \frac{1}{2} x e^x =$$

$$= \frac{1}{2} [\sinh(x) + x e^x]$$

PEC 2018

- 1) a) Halle la solución singular $f(x, y) = 0$ de la ecuación diferencial

$$(y')^2 - y = 0$$

y compruebe que no está incluida en la solución general.

- b) Halle el haz de trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$x = f(x, y) - 1 + e e^{-y}$$

donde $f(x, y)$ es la solución singular hallada en el apartado anterior.

- a) Si despejamos y' en la ecuación

$$y' = \pm \sqrt{y}$$

lo que nos da dos familias de curvas

$$y' = \sqrt{y} \quad ; \quad y' = -\sqrt{y}$$

Veamos la solución de estas ecuaciones

1) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} dy = dx$

$$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = x + C$$

2) $\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} = -dx$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = -x + C$$

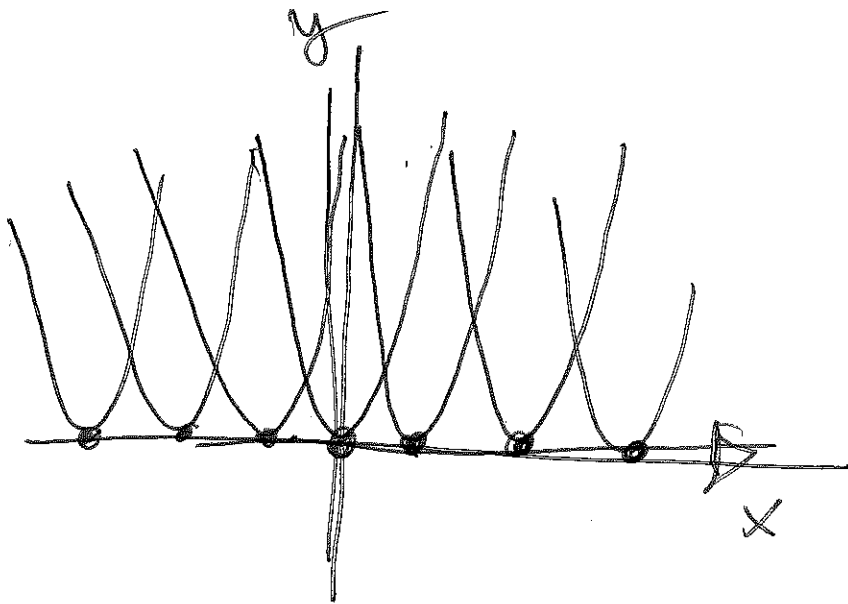
Ambas soluciones se combinan en

$$(2\sqrt{y})^2 = (x+C)^2$$

$$4y = (x+C)^2$$

$$y = \frac{1}{4} (x+C)^2$$

Esta es una familia de parábolas que tienen su vértice en $(0, -C)$



b) Una solución singular será la envolvente de esta familia de curvas

$$\begin{cases} 4y = (x+c)^2 \\ 2(x+c) = 0 \end{cases}$$

Envolvente
de $\Phi(x, y, c) = 0$

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \boxed{y=0} \leftarrow$ solución singular

Comprobamos que, efectivamente, la solución singular (que no está en la solución general) verifica la ecuación

$$(0)^2 - 0 = 0$$

b) Para hallar el haz de trayectorias ortogonales de una familia de curvas $F(x, y, C) = 0$ hay que

1) Hallar la ecuación diferencial que tiene por solución $F(x, y, C) = 0$

2) Cambiar (y') por $(-\frac{1}{y'})$

3) Resolver esta nueva ecuación diferencial.

En nuestro caso la familia de curvas es :

$$x = f(x, y) - 1 + C e^{-y}$$

$$x = y - 1 + C e^{-y}$$

la solución singular es
 $y = 0$
 $f(x, y) = 0$

La ecuación diferencial que tiene esta familia de curvas por solución es (derivando respecto de x los dos miembros)

$$1 = y' - C e^{-y} y'$$

②

Eliminamos C entre estas dos ecuaciones

$$\begin{cases} x = y - 1 + Ce^{-y} \\ 1 = y' - Ce^{-y} y' \end{cases}$$

despejamos Ce^{-y} en la primera ecuación

$Ce^{-y} = x - y + 1$
y sustituimos en la segunda ecuación

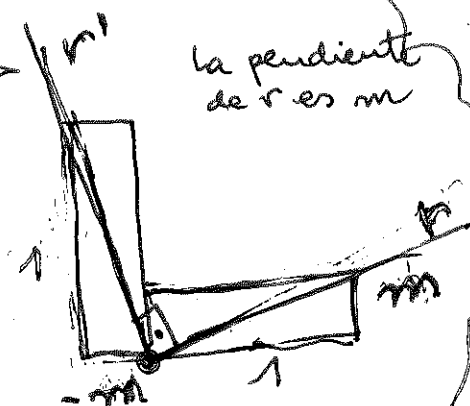
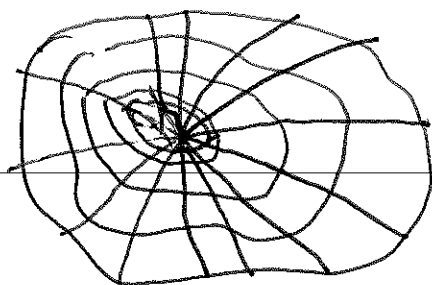
$$1 = y' - (x - y + 1) y'$$

$$1 = y' - xy' + yy' - y'$$

$$1 = (y - x) y'$$

2) Cambiamos y' por $\left(-\frac{1}{y'}\right)$

Las trayectorias ortogonales sirven para hallar caminos óptimos de máxima pendiente



La pendiente de r' es

$$m' = \frac{1}{-m} = -\frac{1}{m}$$

(7)

$$1 = (y-x) \frac{1}{y'}$$

$$y' = y - x$$

$$y' + y = x$$

Es una ecuación lineal de coeficientes constantes de 1er orden

Buscamos la solución general de la homogénea

$$y' + y = 0$$

polinomio característico $m+1=0 \Rightarrow m=-1$

$$y_H = C e^{-x}$$

Buscamos una solución particular de la completa. Ensayamos $y_p = Ax + B$

$$A + Ax + B = x \rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \end{cases}$$

Con lo cual

$$y_p = x - 1$$

La solución general de la completa

$$y = \underbrace{C e^{-x}}_{y_H} + \underbrace{x - 1}_{y_p}$$

PEC - 2018

- 2) a) Hallense los coeficientes a y b de la ecuación diferencial no homogénea

$$y''' + y'' + ay' + by = x^2 + 10 \sin(x)$$

$$(a, b \in \mathbb{R})$$

de coeficientes constantes sabiendo que

$y_1 = e^{-x} \cos(x)$ es solución de la ecuación homogénea asociada

- b) Halle otras dos soluciones reales y_2, y_3 tales que $\{y_1, y_2, y_3\}$ sea un sistema fundamental de soluciones de la misma ecuación homogénea

- c) Halle una solución particular de la ecuación completa y su solución general

Respuesta

- a) La ecuación homogénea es

$$y''' + y'' + ay' + by = 0$$

Substituyendo la solución y_1 en la ecuación homogénea

$$y_1 = e^{-x} \cos(x)$$

$$y_1' = -e^{-x} \cos(x) + e^{-x} \sin(x) = -e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))$$

$$y_1'' = e^{-x}(\cos(x) + \sin(x)) - e^{-x}(\sin(x) + \cos(x)) = 2e^{-x} \sin(x)$$

$$y_1''' = -2e^{-x} \sin(x) + 2e^{-x} \cos(x) = 2e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))$$

Substituyendo estas funciones en la ecuación original

$$2e^{-x}(\cos(x) - \sin(x)) + 2e^{-x} \sin(x) + a(-e^{-x}(\cos(x) + \sin(x))) + b e^{-x} \cos(x) = 0$$

$$\Rightarrow e^{-x} ((2-a+b)\cos(x) - a\sin(x)) = 0$$

$$\Rightarrow a=0, \quad b=-2$$

con lo cual, la ecuación queda

$$y''' + y'' - 2y = x^2 + 10 \sin(x)$$

b) Resolvemos

$$y''' + y'' - 2y = x^2 + 10 \sin(x)$$

1º) Buscamos la solución general de la homogénea

$$y''' + y'' - 2y = 0$$

Hallamos las raíces del polinomio característico

$$m^3 + m^2 - 2 = 0$$

tanteamos usando la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & \\ 1 & 1 & 2 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$m^3 + m^2 - 2 = (m-1)(m^2 + 2m + 2)$$

$$m^2 + 2m + 2 = 0 \Rightarrow m = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm 2i}{2}$$

$$m = -1 \pm i$$

Luego las soluciones fundamentales son

$$\begin{cases} y_1 = e^x \\ y_2 = e^{-x} \cos(x) \\ y_3 = e^{-x} \sin(x) \end{cases}$$

(11) (21)

Recordatorio

$$m = a \pm bi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0 = e^{ax} \cos(bx) \\ y = e^{ax} \sin(bx) \end{cases}$$

La solución general de la homogénea es

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \cos(x) + C_3 e^{-x} \sin(x)$$

(*) También se puede hacer de otra manera. Ver al final

2º/ Para hallar la solución particular de la completa usaremos el principio de superposición

El término forzado es

$$\begin{aligned} F(x) &= F_1(x) + F_2(x) \\ &= x^2 + 10 \sin(x) \end{aligned}$$

Buscamos la solución particular para $F_1(x)$ y luego para $F_2(x)$ y luego sumamos las dos soluciones particulares

Para hallar y_{P1} ensayamos un polinomio de grado dos

$$y_{P1} = Ax^2 + Bx + C$$

Se calculan las derivadas y se sustituye en la ecuación original

$$y'_{p1} = 2Ax + B,$$

$$y''_{p1} = 2A$$

$$y'''_{p1} = 0$$

Substituyendo en la ecuación

$$0 + 2A - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A = 1 \\ -2B = 0 \\ 2A - 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = 0 \\ C = -1/2 \end{cases}$$

con lo cual

$$y_{p1} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Para $F_2(x) = 10 \sin(x)$, se busca una solución particular de la forma

$$y_{p2} = A \cos(x) + B \sin(x)$$

$$y'_{p2} = -A \sin(x) + B \cos(x)$$

$$y''_{p2} = -A \cos(x) - B \sin(x)$$

$$y'''_{p2} = A \sin(x) - B \cos(x)$$

Substituyendo en la ecuación

$$A \sin(x) - B \cos(x) - A \cos(x) - B \sin(x) +$$

$$-2A \cos(x) - 2B \sin(x) = 10 \sin(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A - B - 2B = 10 \\ -B - A - 2A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - 3B = 10 \\ -3A - B = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = -3 \end{cases}$$

$$y_{p2} = \cos(x) - 3 \sin(x)$$

con lo cual la solución general

$$y = y_H + y_{p1} + y_{p2}$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \sin(x) + c_3 e^{-x} \cos(x) + \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + (\cos(x) - 3 \sin(x))$$

OTRA MANERA de hacer a)

Otra manera de resolver el apartado a) ⁽¹⁴⁾ ⁽²⁴⁾
es hacer el siguiente razonamiento

$$\text{Si } y_1 = e^{-x} \cos(x)$$

entonces, $m = -1 \pm i$ son dos raíces
del polinomio característico

$$p(m) = m^3 + m^2 + am + b$$

Si $m = -1 \pm i$ son raíces del
polinomio característico, entonces

$$(m^2 + 2m + 2)$$

es un factor del
polinomio característico.

Para hallar el factor
que falta, efectuamos
la división

Si $z = \alpha + \beta i$ y $\bar{z} = \alpha - \beta i$ son
raíces de un polinomio,
entonces es un factor

$$\begin{aligned} (m - z)(m - \bar{z}) &= \\ &= m^2 - (z + \bar{z})m + z \cdot \bar{z} \\ &= [m^2 - 2\alpha m + (\alpha^2 + \beta^2)] \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} m^3 + m^2 + am + b \\ - m^2 - 2m^2 - 2m \\ \hline \end{array}$$

$$= m^2 + (a-2)m + b$$

$$+ m^2 + 2m + 2$$

$$\hline am + b + 2$$

$$\begin{array}{r} m^2 + 2m + 2 \\ m - 1 \\ \hline \end{array}$$

Para que el resto de la división sea cero $\Rightarrow a=0, b=-2$

- 3) a) Demuestre, resolviendo la ecuación, que una solución de

$$x^2 y'' + x y' - n^2 y = 0$$

que satisface $y(a) = 0$ es

$$y = C \left[\left(\frac{x}{a} \right)^n - \left(\frac{a}{x} \right)^n \right], \text{ para } n=1, 2, 3 \dots \text{ con } C = \text{cte}$$

$$y = C \ln\left(\frac{x}{a}\right), \text{ para } n=0 \text{ con } C = \text{cte}$$

- b) Resuelve el problema de valor inicial

$$\begin{cases} x^2 y'' + x y' - n^2 y = 0 \\ y(-1) = 0 \end{cases} \quad (n \neq 0)$$

- a) La ecuación

$$x^2 y'' + x y' - n^2 y = 0$$

es una ecuación lineal de segundo orden de coeficientes variables de tipo EULER

$$\{ x^2 y'' + a x y' + b y = F(x) \}$$

Haciendo el cambio $x = e^t$ se reduce a una ec. de coeficientes constantes

Cambio

$$x = e^t$$

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$$

Primera derivada

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}}$$

Segunda derivada

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{dy}{dt} e^{-t} \right] =}$$

$$= \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dt} e^{-t} \right] = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{dy}{dt} e^{-t} \right] =$$

$$= \frac{dt}{dx} \left[\frac{d^2y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t} \right] =$$

$$= e^{-t} \left[\frac{d^2y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t} \right] =$$

$$= e^{-2t} \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right]$$

Haciendo los cambios en la ecuación dada

$$x^2 y'' + x y' - n^2 y = 0$$

$$\underbrace{e^{2t}}_{x^2} \underbrace{e^{-2t} \left[\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right]}_{y''} + \underbrace{e^t}_{x} \underbrace{\frac{dy}{dt} e^{-t}}_{y'} - n^2 y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} - n^2 y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - n^2 y = 0$$

Es una ecuación lineal con coeficientes constantes homogénea

Polinomio característico ($n \neq 0$)

$$P(r) = r^2 - n^2 = 0$$

raíces del polinomio característico

$$r^2 - n^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = n \\ r_2 = -n \end{cases}$$

Luego la solución general es

$$y = c_1 e^{nt} + c_2 e^{-nt}$$

desahaciendo el cambio $e^t = x$

$$y = C_1 x^n + C_2 x^{-n} \quad \leftrightarrow \text{Solución general}$$

Si $y(a) = 0$

$$y = C_1 a^n + C_2 a^{-n} = 0$$

Con esta relación podemos eliminar uno de los parámetros

$$C_2 a^{-n} = -C_1 a^n$$

$$C_2 = -C_1 a^{2n}$$

Sustituyendo en la solución general

$$y = C_1 x^n - C_1 a^{2n} x^{-n}$$

Intentaremos llegar a la forma que nos proponen en el enunciado

$$y = C_1 a^n \left(\frac{x^n}{a^n} \right) - C_1 a^{2n} \cdot \frac{1}{a^n} \left(\frac{a^n}{x^n} \right)$$

$$y = C_1 a^n \left(\frac{x^n}{a^n} \right) - C_1 a^n \left(\frac{a^n}{x^n} \right)$$

haciendo $C = C_1 a^n$, resulta
la forma deseada

$$y = C \left[\left(\frac{x^n}{a^n} \right) - \left(\frac{a^n}{x^n} \right) \right]$$

Cuando $n=0$

la ecuación es

$$x^2 y'' + x y' = 0$$

haciendo el cambio $x = e^t$
siguiendo los pasos anteriores llegamos
a

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

Integrando dos veces

$$\frac{dy}{dt} = C_1 t \Rightarrow y = C_1 t + C_2$$

des haciendo el cambio $x = e^t \Rightarrow t = \ln(x)$

$$y = C_1 \ln(x) + C_2$$

Si añadimos la condición $y(a)=0$, resulta que

$$y(a) = C_1 \ln(a) + C_2 = 0$$

con lo cual podemos eliminar una de las constantes

$$C_2 = -C_1 \ln(a)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación

$$y = C_1 \ln(x) - C_1 \ln(a) = C_1 \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

Intentamos poner esta expresión de la forma pedida

$$y = C_1 [\ln(x) - \ln(a)] = C_1 \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

haciendo $C = C_1$ resulta

$$y = C \ln\left(\frac{x}{a}\right)$$

como queríamos

Es un caso particular del apartado anterior cuando $a = -1$

21

Así pues la respuesta es

$$y = C \left[\left(\frac{x}{-1} \right)^n - \left(\frac{-1}{x} \right)^n \right]$$

por tanto, si n es par

$$y = C [x^n - x^{-n}]$$

si n es impar

$$y = C [-x^n + x^{-n}]$$

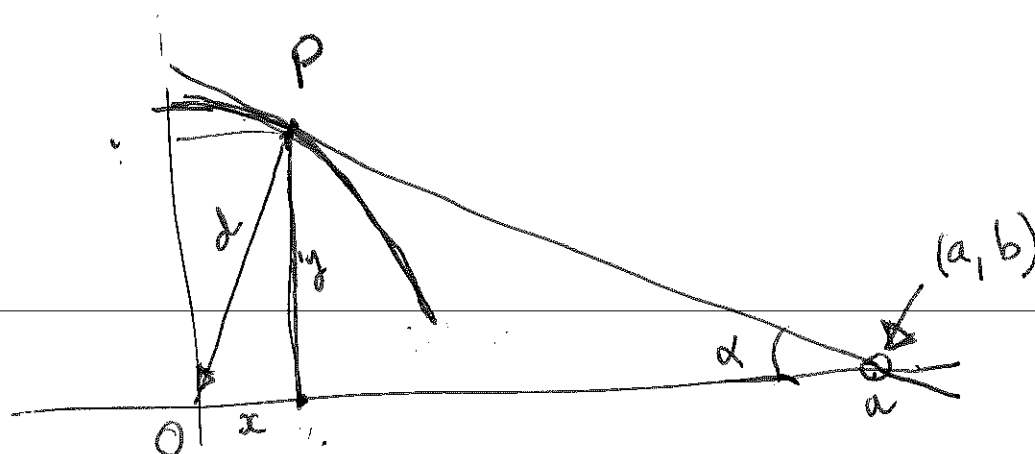
$$= C [x^{-n} + x^n]$$

PEC 2017

- ① a) Compruebe que la ecuación diferencial de la familia de curvas tales que el producto de la abscisa del punto $P(x, y)$ de cualquiera de ellas, con la abscisa del punto de corte de la recta tangente a la curva en ese punto con el eje X , es el doble del cuadrado de la distancia del punto P al origen de coordenadas, es

$$y' = - \frac{xy}{x^2 + 2y^2}$$

- b) Halle la ecuación de la familia, y de la curva que contiene al punto $(1, 1)$



tenemos que calcular cuánto vale a (3)

$$y' = -\tan(\alpha) = -\frac{y}{a-x} = \frac{y}{x-a}$$

$$y'x - y'a = y$$

$$y'a = y'x - y$$

$$a = \frac{y'x - y}{y'}$$

★ (abscisa del punto de corte de la tangente con el eje X)

distancia del punto P al origen de coordenadas

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Traducimos la condición del enunciado que define las curvas de la familia de curvas

"El producto de la abscisa del punto P(x,y) de cualquiera de ellas, con la abscisa del punto de corte de la recta tangente a la curva en ese punto con el eje X"

$$x \cdot \frac{y'x - y}{y'} = 2(x^2 + y^2)$$

★
"Es el doble del cuadrado de la distancia del punto P al origen de coordenadas"

(4)

Buscamos escribir la ecuación diferencial de la forma pedida (despejando y')

$$x \cdot \left(x - \frac{y}{y'} \right) = 2x^2 + 2y^2$$

$$x^2 - \frac{xy}{y'} = 2x^2 + 2y^2$$

$$-\frac{xy}{y'} = x^2 + 2y^2$$

$$y' = -\frac{xy}{x^2 + 2y^2}$$

Ecuación diferencial de primer orden

b) Resolvemos la ecuación diferencial observando que es una ecuación homogénea ya que

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

Hacemos el cambio $\begin{cases} y = ux \rightarrow u = \frac{y}{x} \\ y' = u'x + u \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$\frac{du}{dx} x + u = - \frac{u}{1+2u^2}$$

$$\frac{du}{dx} x = - \frac{u}{1+2u^2} - u$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{-u - u - 2u^3}{1+2u^2}$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{-2u^3 - 2u}{2u^2 + 1}$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{-2u(u^2+1)}{2u^2+1}$$

← Ec. de variables separables

$$\frac{2u^2+1}{u(u^2+1)} du = - \frac{2}{x} dx$$

$$\int \frac{2u^2+1}{u(u^2+1)} du = -2 \int \frac{1}{x} dx$$

La primera integral es una racional que se hace descomponiéndola en fracciones elementales. La segunda integral es inmediata $-2 \int \frac{1}{x} dx = -2 \ln(x) + C = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$

Descomposición en fracciones
elementales

(6)

$$\begin{aligned}\frac{2u^2+1}{u(u^2+1)} &= \frac{A}{u} + \frac{Bx+C}{u^2+1} \\ &= \frac{Au^2+A+Bu^2+Cu}{u(u^2+1)} = \\ &= \frac{(A+B)u^2+Cu+A}{u(u^2+1)} =\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=1 \\ C=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2u^2+1}{u(u^2+1)} = \frac{1}{u} + \frac{u}{u^2+1}$$

Así pues

$$\begin{aligned}\int \frac{2u^2+1}{u(u^2+1)} du &= \int \frac{1}{u} du + \int \frac{u}{u^2+1} du \\ &= \ln(u) + \frac{1}{2} \ln(u^2+1) = \ln(u\sqrt{u^2+1})\end{aligned}$$

Con lo cual, igualando los dos
integrales

$$\ln(u\sqrt{u^2+1}) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$$

(7)

$$u \sqrt{u^2 + 1} = \frac{C}{x^2}$$

Desahaciendo el cambio $u = \frac{y}{x}$

$$\frac{y}{x} \sqrt{\frac{y^2}{x^2} + 1} = \frac{C}{x^2}$$

$$y x \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2}} = C$$

$$y \sqrt{y^2 + x^2} = C$$

$$y^2 (y^2 + x^2) = C$$

Familia de curvas solución de la ecuación

Si se impone la condición $y(1) = 1$

$$1^2 (1^2 + 1^2) = C \Rightarrow C = 2$$

luego, la curva que pasa por $(1, 1)$ es

$$y^2 (y^2 + x^2) = 2$$

2

De la ecuación diferencial de coeficientes constantes

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + a_1 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_2 \frac{dy}{dx} + a_3 y = 3x^2 + 2 \sin(x) \cos(x)$$

Se pide

- Hallar los coeficientes a_1, a_2 y a_3 sabiendo que $\{1, \cos(x), \sin(x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada
- Utilizando el principio de superposición y el método de los coeficientes indeterminados buscar la solución particular de la ecuación completa y su solución general

- a) Se trata de una ecuación diferencial de tercer orden de coeficientes constantes

Método 1

Sabiendo que $y_1 = 1$, $y_2 = \cos(x)$, $y_3 = \sin(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea satisfacen la ecuación:

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = 0$$

Para $y_1=1, y_1'=0, y_1''=0, y_1'''=0$

(9)

$$0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 = 0$$

$$\Rightarrow a_3 = 0$$

Para $y_2 = \cos(x), y_2' = -\sin(x), y_2'' = -\cos(x)$

$$y_2''' = \sin(x)$$

Substituyendo en la ecuación

$$\sin(x) - a_1 \cos(x) - a_2 \sin(x) + a_3 \cos(x) = 0$$

$$(1 - a_2) \sin(x) + (a_3 - a_1) \cos(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - a_2 = 0 \\ a_3 - a_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ a_1 = a_3 \end{cases}$$

Sabiendo que $a_3 = 0$, tenemos

$$\boxed{a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0}$$

No hace falta verificarlo para y_3 , pero lo hacemos como comprobación

$$y_3 = \sin(x), y_3' = \cos(x), y_3'' = -\sin(x)$$

$$y_3''' = -\cos(x)$$

Substituyendo en la ecuación

$$-\cos(x) - a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x) + a_3 \sin(x) = 0$$

$$(a_3 - a_1) \sin(x) + (a_2 - 1) \cos(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 - a_1 = 0 \\ a_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = a_3 \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

que coincide con lo ya obtenido antes

Método 2

Si $\{1, \cos(x), \sin(x)\}$ son soluciones fundamentales de la ec. homogénea, Son raíces del polinomio característico

$$r = 0$$

$$r_1 = i$$

$$r_2 = -i$$

! Si $\alpha \pm \beta i$ son raíces de $p(r)$

$$y_2 = e^{\alpha x} \cos(\beta x) \quad y_3 = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

son las soluciones fundamentales

Si $r = 0$ es una raíz de $p(r)$

$$e^{0x} = 1$$

Con lo cual, el polinomio característico ¹¹
es

$$p(r) = r(r^2 + 1) = r^3 + r$$

Identificando los coeficientes del polinomio característico de la ecuación del enunciado

$$p(r) = r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

La ecuación homogénea queda $y''' + y' = 0$

b) El método de superposición dice que si

$$H(D)y = F_1 + F_2$$

la solución particular es

$$y_{p1} + y_{p2}$$

siendo y_{p1} la solución particular de $H(D)y = F_1$
 y_{p2} la solución particular de $H(D)y = F_2$

Así pues, busquemos una solución particular y_{p1} para la ecuación

$$y''' + y' = 3x^2$$

Se ensaya un polinomio
Como falta el término en y
en la ecuación para buscar
la solución particular ensayamos
un polinomio de un grado superior
al término forzado

$$\begin{cases} y_{p1} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D \\ y'_p = 3Ax^2 + 2Bx + C \\ y''_p = 6Ax + 2B \\ y'''_p = 6A \end{cases}$$

$$6A + 3Ax^2 + 2Bx + C = 3x^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A = 3 \\ 2B = 0 \\ 6A + C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_{p1} = x^3 - 6x$$

Buscamos la solución particular y_{p2} para la ecuación

$$y''' + y' = 2 \sin(x) \cos(x)$$

Como $F_2 = 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$

ensayamos

$$\left\{ \begin{array}{l} y_{p2} = A \sin(2x) + B \cos(2x) \\ y'_{p2} = 2A \cos(2x) - 2B \sin(2x) \\ y''_{p2} = -4A \sin(2x) - 4B \cos(2x) \\ y'''_{p2} = -8A \cos(2x) + 8B \sin(2x) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} -8A \cos(2x) + 8B \sin(2x) + 2A \cos(2x) - 2B \sin(2x) \\ = \sin(2x) \end{aligned}$$

$$(8B - 2B) \sin(2x) + (-8A + 2A) \cos(2x) = \sin(2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6B = 1 \\ -6A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{6} \end{cases}$$

Con lo cual

$$y_{p2} = -\frac{1}{6}\cos(2x)$$

Por aplicación del principio de superposición la solución particular de la completa

$$y''' + y' = 3x^2 + \sin(2x)$$

es

$$\begin{aligned} y_p &= y_{p1} + y_{p2} = \\ &= x^3 - 6x - \frac{1}{6}\cos(2x) \end{aligned}$$

Con lo cual la solución general de la ecuación

$$y = \underbrace{C_1 + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x)}_{y_H} + \underbrace{x^3 - 6x - \frac{1}{6}\cos(2x)}_{y_p}$$

3) Utilizando transformadas de Laplace, resuelva el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' + (1 * y) = e^{2x} \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$*$ = convolución de funciones

Tomando la transformada de Laplace en los dos miembros

$$\mathcal{L}(y') + \mathcal{L}(1 * y) = \mathcal{L}(e^{2x})$$

Recordatorio

$$\mathcal{L}(y') = sY - y_0$$

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f) \cdot \mathcal{L}(g) \quad (\text{Teorema de convolución})$$

$$f * g(x) = \int_0^x f(x-v)g(v)dv$$

En nuestro caso

$$1 * y(x) = \int_0^x 1 \cdot g(v)dv$$

$$\mathcal{L}(1 * y) = \mathcal{L}\left[\int_0^x g(t)dt\right] = \frac{Y}{s}$$

$$\mathcal{L}[e^{ax}] = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

$$sy + 1 + \frac{1}{s} \cdot y = \frac{1}{s-2}$$

despejamos y

$$\left(s + \frac{1}{s}\right)y = \frac{1}{s-2} - 1 \rightarrow \left(\frac{s^2+1}{s}\right)y = \frac{1-s+2}{s-2}$$

$$y = \frac{s(3-s)}{(s-2)(s^2+1)}$$

$$y = \frac{-s^2+3s}{(s-2)(s^2+1)}$$

haciendo la $\mathcal{L}^{-1}$

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-s^2+3s}{(s-2)(s^2+1)}\right)$$

Para calcularlo o descomponemos en fracciones elementales

$$\frac{-s^2+3s}{(s-2)(s^2+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{Bs+C}{s^2+1} =$$

$$= \frac{As^2 + A + (s-2)(Bs+C)}{(s-2)(s^2+1)}$$

$$= \frac{As^2 + A + Bs^2 + Cs - 2Bs - 2C}{(s-2)(s^2+1)}$$

$$\rightarrow \begin{cases} A+B = -1 \\ C-2B = 3 \\ A-2C = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{array} \right) \sim \begin{cases} A = \frac{1}{5} \\ B = -\frac{7}{5} \\ C = \frac{1}{5} \end{cases}$$

Así pues

$$y = \frac{2/5}{s-2} + \frac{(-7/5)s + (1/5)}{s^2+1} =$$

$$= \left(\frac{2}{5}\right) \frac{1}{s-2} + \left(-\frac{7}{5}\right) \frac{s}{s^2+1} + \left(\frac{1}{5}\right) \frac{1}{s^2+1}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \frac{2}{5} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \left(-\frac{7}{5}\right) \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \left(\frac{1}{5}\right) \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$= \frac{2}{5} e^{2x} - \frac{7}{5} \cos(x) + \frac{1}{5} \sin(x)$$

Recordatorio:

y	Y
$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$