<u>Factorización *LU* para matrices cuadradas</u>

©Ángel de la Llave

(Ver página 44 del libro de texto)

Para no complicar las notaciones y centrarnos en las ideas del procedimiento supondremos matrices 3×3.

► Objetivo de la factorización LU

Dada una matriz cuadrada, *A*, el objetivo de la factorización LU es descomponerla como producto de dos matrices: Una matriz triangular inferior normalizada (con unos en la diagonal), *L (lower),* y otra matriz triangular superior, *U (upper).* Así

$$A = L \cdot U$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

► Utilidad

La factorización LU proporciona un algoritmo para resolver sistemas de ecuaciones lineales. Veamos cómo.

Dado un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, una vez realizada la factorización $A = L \cdot U$, se resuelve en dos pasos,

1º. Se resuelve el sistema triangular $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$**.**

2º. Una vez hallada la solución **y** del paso anterior, se resuelve el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$**.**

Este vector **x**, así obtenido, es la solución del sistema planteado originalmente.

En efecto, la solución **x** así hallada siguiendo los dos pasos indicados es la solución del sistema original. Veamos

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad (LU)\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad L(U\,\mathbf{x}) = \mathbf{b}$$

Si $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$, resulta que $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ es el sistema original.

Comentario:
Este procedimiento es útil cuando hay que resolver muchos sistemas $A\mathrm{x} = \mathbf{b}$ cuando los coeficientes *A* son los mismos, pero varía **b**.

Esta factorización es útil para calcular determinantes. Ya que

$$\det(A) = \det(LU) = \det(L) \cdot \det(U) = \det(U)$$

► ¿Cómo se hace la factorización?

1º paso. Se construye la matriz ***U***

Dada la matriz A se hacen transformaciones elementales de fila (método de Gauss) para reducirla a forma escalonada y obtener así la matriz triangular superior U.
Para comprender mejor cómo funciona el método, haremos un inciso para recordar algunas ideas básicas sobre los conceptos de *transformación elemental de filas* y su relación con las *matrices elementales*.

Las *transformaciones elementales de filas* son de la forma, con $i > j$,

$$\mathrm{F_i} + \lambda\, \mathrm{F_j} \rightarrow \mathrm{F_i}$$

Es importante tener en consideración que realizar una transformación elemental de filas a una matriz, equivale a pre-multiplicarla por una *matriz elemental*, E.
Esta matriz elemental, E, es la que se obtiene realizando la transformación elemental de filas en cuestión a la matriz identidad, I.

Por ejemplo, la matriz elemental que se corresponde a la transformación de filas

$$F_2 + 3F_1 \rightarrow F_2$$

es el resultado de aplicar esa transformación elemental a la matriz identidad I.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2+3F_1\rightarrow F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Es decir, que aplicar a la matriz A la transformación $[F_2 + 3\, F_1 \rightarrow F_2]$ para obtener A' es equivalente a pre-multiplicar la matriz A por E.

$$A' = E\cdot A$$

Si la matriz A es de dimensión 3×3, son necesarias tres transformaciones elementales de fila para reducirla a una matriz triangular superior U usando el método de Gauss. Así resulta que

$$U = E_3\cdot E_2\cdot E_1\cdot A$$

Resumiendo. Para calcular U, se aplica el método de Gauss para reducir la matriz A a forma escalonada mediante operaciones elementales de filas.

2º paso. Se construye la matriz ***L***

En la igualdad anterior, despejando A, resulta que

$$A = E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_3^{-1}\cdot U$$

Si llamamos $L = E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_3^{-1}$, se tiene que $A = L\cdot U$.

Dada la construcción, resulta que la matriz L así obtenida es una matriz triangular inferior normalizada (con unos en la diagonal principal), que es la que buscamos. Por no complicar la exposición, no entramos aquí en detalles de por qué la matriz L tiene, en efecto, la forma deseada. Basta pensar en que las operaciones elementales de filas aplicadas a la matriz identidad no alteran los elementos de la diagonal.

En la práctica, lo que nos indica la fórmula anterior es que para construir la matriz L hay que aplicar a la matriz identidad, I, las transformaciones inversas que llevaron de A a U aplicadas en el orden inverso.

Para llevar a cabo este proceso, hay que tener en cuenta que la transformación de filas inversa de $[F_i + \lambda F_j \rightarrow F_i]$ es $[F_i - \lambda F_j \rightarrow F_i]$.Es decir

$$[F_i + \lambda F_j \rightarrow F_i]^{-1} = [F_i - \lambda F_j \rightarrow F_i]$$

Esto hace muy sencillo hallar las inversas de las matrices elementales. Volviendo al ejemplo anterior, $[F_2 + 3F_1 \rightarrow F_2]^{-1} = [F_2 - 3F_1 \rightarrow F_2]$ y su equivalente en términos de matrices elementales es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

► **Ejemplo 1**

Factorizar de forma LU la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix}$

Respuesta

1º paso. Se construye la matriz ***U***

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix} \underset{F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 6 & 18 & 22 \end{pmatrix} \underset{F_3 - 3F_1 \rightarrow F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 16 \end{pmatrix} \underset{F_3 - 4F_2 \rightarrow F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U$$

Observamos que las trasformaciones de filas que hemos utilizado se corresponden con pre-productos por sus correspondientes matrices elementales. Aunque esto no es necesario hacerlo, los exponemos aquí para ilustrar la relación entre transformaciones de filas y matrices elementales

$$[F_2 - 2F_1 \rightarrow F_2] \leftrightarrow E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[F_3 - 3\,F_1 \to F_3] \leftrightarrow\; E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[F_3 - 4\,F_2 \to F_3] \leftrightarrow\; E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues, el método de Gauss aplicado para reducir la matriz A a forma escalonada es escrito en forma de producto de matrices elementales.

$$U = E_3 \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$$

Invitamos a comprobarlo

2º paso. Se construye la matriz ***L***

Para obtener la matriz L, se aplican a la matriz I las inversas de las transformaciones que llevaron la matriz A a la matriz U, aplicadas en orden inverso. Es decir,

$$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$$

Para hacer esto usaremos en siguiente esquema de cálculo

Matriz	Transformación	Trnsformación inversa (que se aplica a la matriz anterior)	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
E_3^{-1}	$F_3 - 4F_2 \to F_3$	$F_3 + 4F_2 \to F_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
$E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$	$F_3 - 3F_1 \to F_3$	$F_3 + 3F_1 \to F_3$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
$L = E_1^{-1} \cdot E_2^{-1} \cdot E_3^{-1}$	$F_2 - 2F_1 \to F_2$	$F_2 + 2F_1 \to F_2$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = L$

De modo que

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2\\4&7&7\\6&18&22\end{pmatrix}=L\cdot U=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&2&2\\0&3&3\\0&0&4\end{pmatrix}$$

► **Ejemplo 2**
(Ejercicio 1.44 de libro de problemas. Página 44)

Calcúlese la factorización LU de la matriz $A=\begin{pmatrix}2&-2&4\\1&-3&1\\3&7&5\end{pmatrix}$ y resolver el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x}=\begin{pmatrix}0\\-5\\7\end{pmatrix}$.

Respuesta

Factorización LU

Paso 1º Construcción de la matriz ***U***

Se reduce la matriz A a forma escalonada mediante la aplicación de transformaciones de filas elementales (método de Gauss).

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&4\\1&-3&1\\3&7&5\end{pmatrix}\underset{F_2-\frac{1}{2}F_1\to F_2}{\approx}\begin{pmatrix}2&-2&4\\0&-2&-1\\3&7&5\end{pmatrix}\underset{F_3-\frac{3}{2}F_1\to F_3}{\approx}\begin{pmatrix}2&-2&4\\0&-2&-1\\0&10&-1\end{pmatrix}\underset{F_3+5F_2\to F_3}{\approx}\begin{pmatrix}2&-2&4\\0&-2&-1\\0&0&-6\end{pmatrix}=U$$

Paso 2º Construcción de la matriz ***L***

Para obtener la matriz $L = E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_3^{-1}$ usaremos en siguiente esquema de cálculo

Matriz	Transformación	Transformación inversa (que se aplica a la matriz anterior)	$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
E_3^{-1}	$F_3+5F_2\rightarrow F_3$	$F_3-5F_2\rightarrow F_3$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-5&1\end{pmatrix}$
$E_2^{-1}\cdot E_3^{-1}$	$F_3-(3/2)F_1\rightarrow F_3$	$F_3+(3/2)F_1\rightarrow F_3$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{3}{2}&-5&1\end{pmatrix}$
$L=E_1^{-1}\cdot E_2^{-1}\cdot E_3^{-1}$	$F_2-(1/2)F_1\rightarrow F_2$	$F_2+(1/2)F_1\rightarrow F_2$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{3}{2}&-5&1\end{pmatrix}=L$

De modo que

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&4\\1&-3&1\\3&7&5\end{pmatrix}=L\cdot U=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{3}{2}&-5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-2&4\\0&-2&-1\\0&0&-6\end{pmatrix}$$

Solución del sistema

1º Paso. Se resuelve el sistema $L\mathbf{y}=\mathbf{b}$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{3}{2}&-5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\7\end{pmatrix}$$

Como es un sistema triangular, se resuelve despejando en cascada, resultando

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\-18\end{pmatrix}$$

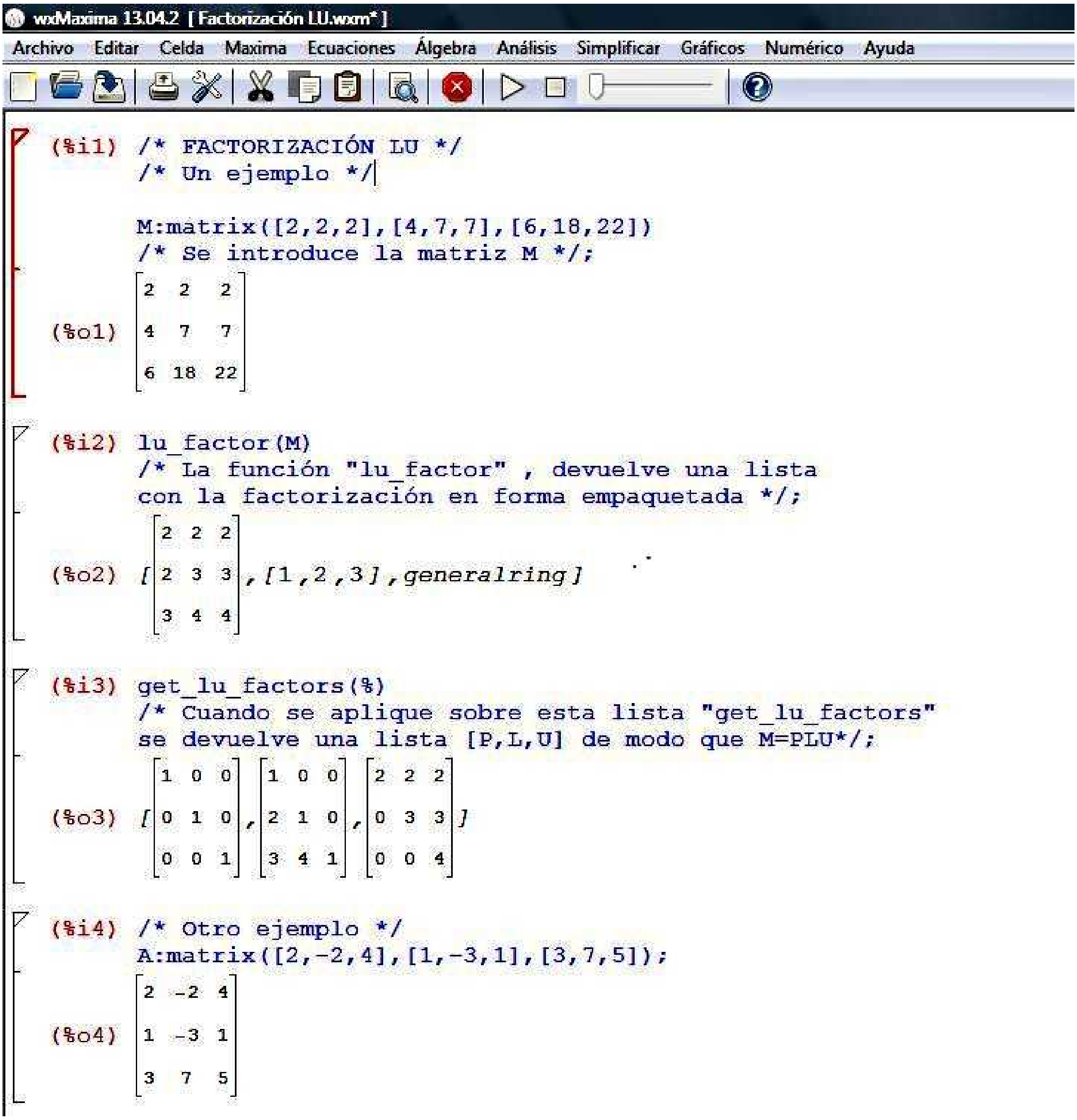
2º Paso. Se resuelve el sistema $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Como es un sistema triangular, se resuelve despejando en cascada, resultando la solución buscada del sistema original

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

► **Utilización de MAXIMA**



```
(%i5) lu_factor(A);
```

$$(\%o5)\quad [\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ \frac{1}{2} & -2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -5 & -6 \end{bmatrix}, [1,2,3], generalring]$$

```
(%i6) get_lu_factors(%);
```

$$(\%o6)\quad [\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -5 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}]$$

Comentario: Las operaciones con matrices y sistemas lineales de MAXIMA estan incluidas en el paquete `linearalgebra`. Si no se ha cargado por defecto hay que hacerlo con la instrucción

```
load(linearalgebra)$
```

La factorización LU, en realidad es, $A = PLU$, en dosnde P es la matriz de una permutación, que es necesario hacer en las filas para que los pivotes sean distintos de cero