Septiembre 2023 Pregunta 2

2. (1 PUNTO) Determine el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el vector $(1, 1, -2, k)$ sea combinación lineal de los vectores $(0, 3, 0, -2)$, $(1, 2, -1, -5)$ y $(1, 0, 0, 0)$.

Solución:

Que el vector $(1, 1, -2, k)$ sea combinación lineal de $\{(0, 3, 0, -2), (1, 2, -1, -5), (1, 0, 0, 0)\}$ se puede expresar diciendo que

$$\text{ran} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & k \end{pmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Recordamos que la manera de estudiar el rango de un sistema de vectores es reduciendo la matriz que tiene por fila los vectores del sistema a su forma escalonada mediante transformaciones elementales de fila. Las transformaciones elementales de fila no alteran el rango.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} F_2 - F_1 \rightarrow F_2 \\ F_4 - F_1 \rightarrow F_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & k \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 2F_3 - 3F_2 \rightarrow F_3 \\ 2F_4 - F_2 \rightarrow F_4 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & -3 & 2k + 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4 + F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2k + 16 \end{pmatrix}$$

Para estudiar el rango de la forma escalonada recordamos que el rango de una matriz escalonada es igual al número de cabeceras de línea distintos de cero.

En nuestro caso, ocurre que

$$\text{ran} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & k \end{pmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 2k + 16 \end{pmatrix} = \text{ran} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

cuando $k = -8$

(%i3) `A:matrix([0,3,0,-2],[1,2,-1,-5],[1,0,0,0]);`

(%o3)
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i2) `rank(A);`

(%o2) 3

(%i6) `B:matrix([0,3,0,-2],[1,2,-1,-5],[1,0,0,0],[1,1,-2,k]);`

(%o6)
$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & k \end{pmatrix}$$

(%i10) `determinant(B);`

(%o10) $6-3(k+10)$

(%i11) `solve(determinant(B)=0,k);`

(%o11) $[k=-8]$

(%i17) `triangularize(B);`

(%o17)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -3k-24 \end{pmatrix}$$