

# Capítulo 3. PROBABILIDAD

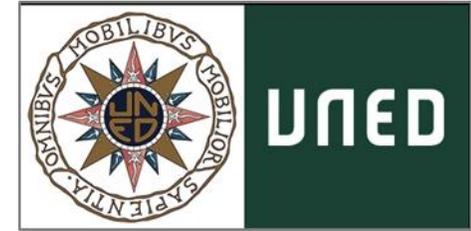
Julia Torralba Cano [jultorralba@Madrid.uned.es](mailto:jultorralba@Madrid.uned.es)

***· Problemas Resueltos de Estadística Básica, de Alfonso García Pérez. (1998). Editorial UNED, colección Educación Permanente (código 84011EP31A01).***

***Ejercicios propuestos página 103***

***3.11 Ejercicios de autoevaluación***

# Capítulo 3. PROBABILIDAD



**Fenómeno determinista:** cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales se obtienen siempre los mismos resultados.

**Fenómeno aleatorio o estocástico:** cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales no se obtienen siempre los mismos resultados.

**EXPERIMENTO ALEATORIO:** Operación que repetimos bajo idénticas condiciones iniciales y no se obtienen siempre los mismos resultados (no necesariamente).

**SUCESO ELEMENTAL:** Cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio.

**ESPACIO MUESTRAL ( $\Omega$ ):** Conjunto donde están los sucesos que se originan a partir de un experimento aleatorio.

**ESPACIOS DE SUCESOS  $\mathcal{A}$ :** Conjunto formado por todas las colecciones de sucesos de un espacio muestral. Conjunto de todos los subconjuntos de  $\Omega$  denominado  $\sigma$ -Álgebra de sucesos.

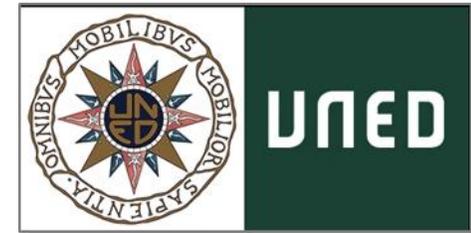
**FUNCIÓN DE PROBABILIDAD ( $P$ ):**  $P$  es una función/ $P: \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$  que asigna a cada suceso del  $\sigma$ -álgebra un número en el intervalo  $[0,1]$  como medida de su incertidumbre en el experimento aleatorio.

**ESPACIO DE PROBABILIDAD:**  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Suceso imposible  $\phi$  Suceso seguro  $\Omega$

Sucesos incompatibles  $A \cap B = \phi$  Sucesos complementarios  $A \cap A^c = \phi$  y  $A \cup A^c = \Omega$

# Capítulo 3. PROBABILIDAD



Probabilidad (Kolgomorov):  $P$  es la aplicación que va del  $\sigma$ -álgebra de sucesos al intervalo  $[0,1]$ , de modo que asigna a cada elemento de  $A$  un número entre 0 y 1

$$P: A \rightarrow [0,1]$$

$$\omega \rightarrow P(\omega)$$

Verifica:

Axioma 1. Para todo suceso  $\omega$  de  $A$  se cumple  $P(\omega) \geq 0$

Axioma 2.  $P(\Omega) = 1$

Axioma 3. Dados  $\{\omega_i\}$  con  $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset$   $i \neq j$  se verifica:  $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i)$

# Capítulo 3. PROBABILIDAD



PROPIEDADES:

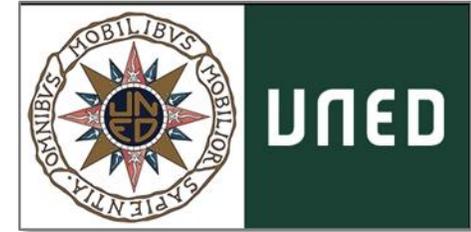
- ✓  $P(\phi) = 0$
- ✓ *Aditividad de sucesos incompatibles: si  $A_i \cap A_j = \phi \quad \forall i \neq j \rightarrow (U_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$*
- ✓  $P(A^c) = 1 - P(A)$
- ✓ *Si  $A \subset B \rightarrow P(A) \leq P(B)$*
- ✓ *Si dos sucesos no son incompatibles, entonces  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*

	<b>UNION</b>	<b>INTERSECCION</b>
1. Asociativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
2. Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
3. Idempotente	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$
4. Simplificativa	$A \cup (B \cap A) = A$ $A \cap (B \cup A) = A$	
5. Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	
Todo suceso A del espacio de sucesos tiene otro llamado contrario, $\bar{A}$ tal que: $A \cup \bar{A} = E$ $A \cap \bar{A} = \phi$		

*Teoría de conjuntos:*

- $\Omega = A \cup A^c$
  - $B = A \cup (B - A)$
- *conjuntos disjuntos*
- *Al complementario de A se le denota por  $A^c$  o  $A^*$  o  $\bar{A}$  es simplemente  $\Omega - A$*

# Capítulo 3. PROBABILIDAD



## PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dado  $(\Omega, A, P)$  y un par de sucesos  $A, B \in A$  tal que  $P(B) > 0$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

## INDEPENDENCIA DE SUCESOS

A es independiente de B  $\leftrightarrow P(A/B) = P(A)$

Dos sucesos A y B de un mismo espacio probabilístico  $(\Omega, A, P)$  se dicen independientes cuando

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

## TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Dado  $(\Omega, A, P)$  y  $\{A_n\} \subset A$  una partición de sucesos de  $\Omega$  (por tanto,  $\bigcup_n A_n = \Omega$  y  $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$ )

$$\forall B \in A \quad P(B) = \sum_n P(B/A_n) P(A_n)$$

## TEOREMA DE BAYES:

Dado  $(\Omega, A, P)$  y  $\{A_n\} \subset A$  una partición de sucesos de  $\Omega$ ,  $\forall B \in A \quad P(B) > 0$ , entonces

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{\sum_n P(A_n)P(B/A_n)}$$

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$