Capítulo 3. PROBABILIDAD

Julia Torralba Cano jultorralba@Madrid.uned.es

· Problemas Resueltos de Estadística Básica, de Alfonso García Pérez. (1998). Editorial UNED, colección Educación Permanente (código 84011EP31A01).

Ejercicios propuestos página 103

3.11 Ejercicios de autoevaluación

Capítulo 3. PROBABILIDAD

Fenómeno determinista: cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales se obtienen siempre los mismos resultados.

Fenómeno aleatorio o estocástico: cuando al repetirlo bajo idénticas condiciones iniciales no se obtienen siempre los mismos resultados.

EXPERIMENTO ALEATORIO: Operación que repetimos bajo idénticas condiciones iniciales y no se obtienen siempre los mismos resultados (no necesariamente).

SUCESO ELEMENTAL: Cada uno de los resultados posibles del experimento aleatorio.

ESPACIO MUESTRAL (Ω): Conjunto donde están los sucesos que se originan a partir de un experimento aleatorio.

ESPACIOS DE SUCESOS A: Conjunto formado por todas las colecciones de sucesos de un espacio muestral. Conjunto de todos los subconjuntos de Ω denominado σ-Álgebra de sucesos.

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD (P): P es una función/$P\colon \mathrm{A} \rightarrow [0,1]$ que asigna a cada suceso del σ-álgebra un número en el intervalo [0,1] como medida de su incertidumbre en el experimento aleatorio.

ESPACIO DE PROBABILIDAD: (Ω,A,P)

Suceso imposible ϕ Suceso seguro Ω

Sucesos incompatibles $A \cap B = \phi$ Sucesos complementarios $A \cap A^c = \phi$ y $A \cup A^c = \Omega$

Capítulo 3. PROBABILIDAD

Probabilidad (Kolgomorov): P es la aplicación que va del σ-álgebra de sucesos al intervalo [0,1], de modo que asigna a cada elemento de A un número entre 0 y 1

$$P\colon \mathrm{A} \to [0,1]$$

$$\omega \to P(\omega)$$

Verifica:

Axioma 1. Para todo suceso ω de A se cumple $P(\omega) \geq 0$

Axioma 2. $P(\Omega) = 1$

Axioma 3. Dados $\{w_i\}$ con $w_i \cap w_j = \phi \ i \neq j$ se verifica: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} \omega_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i)$

Capítulo 3. PROBABILIDAD

PROPIEDADES:

- ✓ $P(\phi) = 0$
- ✓ *Aditividad de sucesos incompatibles: si* $A_i \cap A_j = \phi \;\; \forall i \neq j \;\rightarrow\; (\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$
- ✓ $P(A^c) = 1 - \mathrm{P(A)}$
- ✓ *Si* $A \subset B \;\rightarrow P(A) \leq P(B)$
- ✓ *Si dos sucesos no son incompatibles, entonces* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

	UNION	INTERSECCION
1. Asociativa	(AUB)UC=AU(BUC)	$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$
2. Conmutativa	AUB=BUA	$A\cap B = B\cap A$
3. Idempotente	AUA=A	$A\cap A = A$
4. Simplificativa	$A\cup(B\cap A)=A$ $A\cap(B\cup A)=A$	
5. Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	

Todo suceso A del espacio de sucesos tiene otro llamado contrario, $\bar{A}$ tal que:

$A\cup\bar{A}=E$ $\qquad$ $A\cap\bar{A}=\phi$

Teoría de conjuntos:

- $\Omega = A \cup A^c$
- $B = A \cup (B - A)$

conjuntos disjuntos

- *Al complementario de A se le denota por* A^c *o* A^* *o* $\bar{A}$ *es simplemente* Ω–A

Capítulo 3. PROBABILIDAD

PROBABILIDAD CONDICIONADA

Dado $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *y un par de sucesos* $A,B \in \mathcal{A}$ *tal que* $P(B)>0$

$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(b)}$

$$P\left({}^{A}/_{B}\right)=\frac{P\left({}^{B}/_{A}\right)P(A)}{P(B)}$$

INDEPENDENCIA DE SUCESOS

A es independiente de B $\leftrightarrow P\left({}^{A}/_{B}\right)=P(A)$

Dos sucesos A y B de un mismo espacio probabilístico *(*$\Omega,\mathcal{A},P$*) se dicen independientes cuando*

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

Dado $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *y* $\{A_n\}\subset \mathcal{A}$ *una partición de sucesos de* Ω *(por tanto,* $\bigcup_n A_n=\Omega$ *y* $A_i\cap A_j=\phi\ \forall i\neq j$*)*

$$\forall B\in \mathrm{A}\ \ P(B)=\sum_n P\left({}^{B}/_{A_n}\right)P(A_n)$$

TEOREMA DE BAYES:

Dado $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *y* $\{A_n\}\subset \mathcal{A}$ *una partición de sucesos de* Ω*,* $\forall B\in \mathrm{A}\ \ P(B)>0$*, entonces*

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P\left({}^{B}/_{A_i}\right)}{\sum_n P(A_n)P\left({}^{B}/_{A_n}\right)}$$