Soluciones PEA 3 diciembre 2020

$\boxed{\textbf{Ejercicio 1}}$ Dado el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3)$, definido mediante las ecuaciones:

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3; \quad y_2 = x_1 + x_2 - x_3; \quad y_3 = x_3.$$

Calcular una base del núcleo y una base de la imagen.

Comentario:

La función $f: R^3 \rightarrow R^3$ tiene la siguiente expresión escrita en notación matricial

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

- Núcleo de *f*

Recordando la definición del Núcleo de *f*

$$\text{Nuc}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in R^3 \text{ tal que } f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Las ecuaciones implícitas del Núcleo de *f* son:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Buscamos la solución general del sistema. Para ello lo reducimos a forma escalonada por el método de reducción de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

La solución general dependerá de un parámetro. Por ejemplo, si $x_2 = \lambda$ resulta

$$\begin{cases} x_1 = -\lambda \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así pues,

$$\text{Nuc}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Imagen de *f*

El subespacio Im(*f*) está generado por los vectores transformados de los elementos de la base del espacio original

$$\text{Im}(f) = < f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)>$$

Es decir, Im(*f*) está generado por los vectores columna de la matriz asociada a la aplicación. Así pues,

$$\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Si reducimos el sistema de vectores de generadores a su forma escalonada, resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Con los cual, un sistema de generadores linealmente independiente de Im(*f*) es

$$\text{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \right\rangle$$

Comentario: Aunque no lo piden en el enunciado del ejercicio, la forma imnplícita del subespacio Im(*f*) , se obtiene eliminando parámetros

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & x_1 - x_2 - 2x_3 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, las ecuaciones implícitas de Im(f) son

$$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

Comentario: La eliminación de parámetros en las ecuaciones de Im (f) se podría haber hecho de una manera fácil usando el método de sustitución.

Para eliminar los parámetros en las ecuaciones

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda - 2\mu \\ x_3 = \mu \end{cases}$$

Basta sustituir en la segunda ecuación los valores de λ y μ, de manera que resulta

$$x_2 = x_1 - 2x_3$$

Comentario: Se cumple la igualdad de las dimensiones

$$\dim(\text{Nuc}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Espacio inicial})$$

wxMaxima 13.04.2 [soluciones PEA3 2020_21.wxm]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayud

PEA 3 Diciembre de 2020

EJERCICIO 1

```
(%i11) solve([x1+x2+x3=0, x1+x2-x3=0, x3=0],[x1,x2,x3]);
solve: dependent equations eliminated: (1)
(%o11) [[x1=%r3,x2=-%r3,x3=0]]
```

```
(%i2) A:matrix([1,1,1],[1,1,-1],[0,0,1]);
```

$$(\%o2)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i3) B:transpose(A);
```

$$(\%o3)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i4) triangularize(B);
```

$$(\%o4)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
(%i13) eliminate([x1=m, x2=m-2*n, x3=n],[m,n]);
(%o13) [2 x3+x2-x1]
```

Ejercicio 2 Si $B' = \{1, x-1, (x-1)^2, -x^3\}$ y $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ son bases del espacio vectorial de polinomios en una variable de grado menor que cuatro, calcular la matriz de cambio de la base, de la base B' a la base B.

Un mismo vector **x** tiene dos expresiones de coordenadas diferentes respecto a dos bases. La relación que hay entre ambas expresiones de coordenadas se piuede ver en este esquema

$$
\begin{tikzcd}
 & X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x} \arrow[ur, "B"] \arrow[dr, "B'"'] & \\
 & X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}
\end{tikzcd}
\qquad \boxed{X = PX'}
$$

En donde $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}$ es la <u>*matriz de paso*,</u> que tiene por columnas las coordenadas de los elementos de la nueva base B' referidos a la base B.

Por consiguiente, las ecuaciones del cambio de base de B' a B es

$$X = PX'$$

(Ver página 132 del Libro de Teoría)

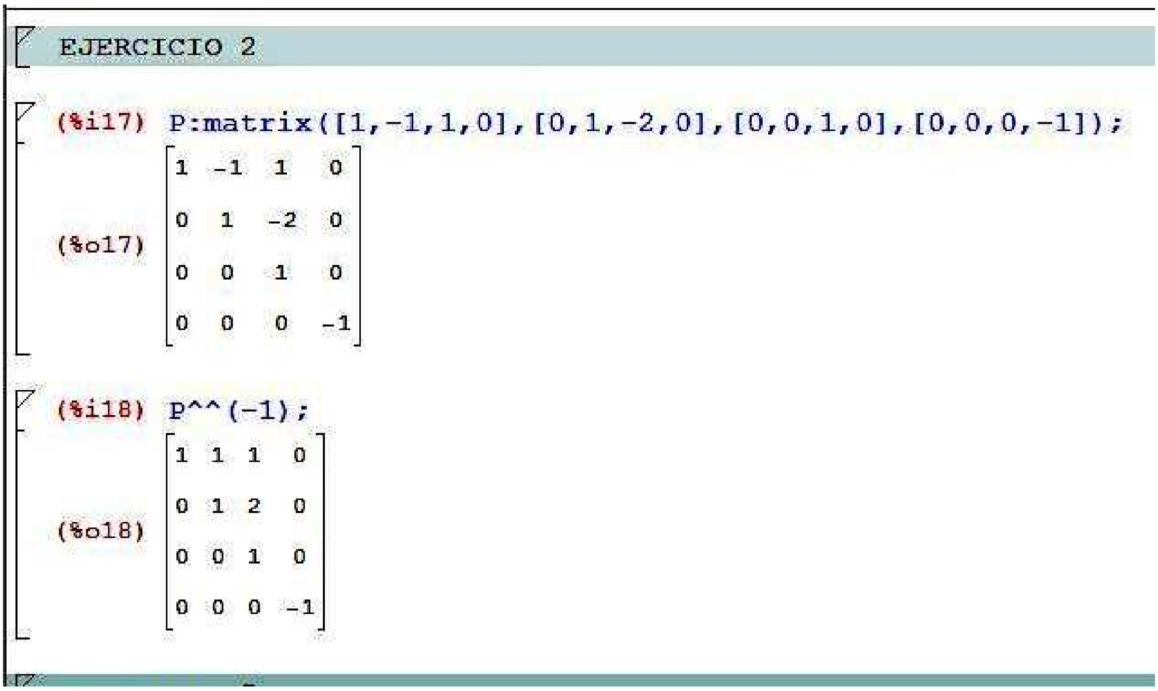
Así pues,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix}$$

Comentario: Aunque no se pide en el enunciado del ejercicio, las ecuaciones del cambio de base de B a B' son

$$X' = P^{-1}X$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ x'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$



Ejercicio 3 Si f es un endomorfismo de E y $\bar{x} \in E$ verifica $f(\bar{x}) = 5\bar{x}$ comprobar si el conjunto

$$\{\bar{x} \in E \colon f(\bar{x}) = 5\bar{x}\}$$

es un subespacio vectorial de E.

Para comprobar que el conjunto

$$L = \{\bar{x} \in E : f(\bar{x}) = 5\bar{x}\}$$

es un subespacio vectorial de E hay que demostrar que

Si $\bar{x}_1 \in L$ y $\bar{x}_2 \in L$, entonces $\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2 \in L$, para cualquier par de escalares $\alpha \in R$ y $\beta \in R$

(Ver página 66 del Libro de Teoría)

En efecto,

$$f\left(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2\right) = \alpha f\left(\bar{x}_1\right) + \beta f\left(\bar{x}_2\right) = \alpha 5\bar{x}_1 + \beta 5\bar{x}_2 = 5\left(\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2\right)$$

Con lo cual

$$\alpha\bar{x}_1 + \beta\bar{x}_2 \in L$$

Ejercicio 4 Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $f(1,1) = (0,0,1)$ y $f(2,0) = (4,8,4)$. Se pide calcular, si es posible,

$$f(0,1).$$

Una aplicación lineal está perfectamente definida cuando se conocen los transformados de los elementos de una base del espacio inicial. Por tanto, sí es posible calcular *f*(0,1) ya que {(1, 1), (2,0)} forman una base.

Tenemos que expresar el vector (0, 1) como combinación lineal de {(1, 1), (2,0)}

$$(0, 1) = \alpha(1, 1) + \beta(2, 0)$$

Esta expresión es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} 0 = \alpha + 2\beta \\ 1 = \alpha \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Así pues,

$$f(0, 1) = f((1, 1) - ½\,(2, 0)) = = f((1, 1) - ½\,(2, 0)) = (0, 0, 1) - ½\,(4, 8, 4)$$

En definitiva,

$$f(0, 1) = (-2, -4, -1)$$

Ejercicio 5 Estudiar si es lineal, la siguiente aplicación $f = g \circ h$ siendo $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x, y, z, t) = (x - z, 2 - y)$$

y $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$h(x, y) = (2x, 3y - 2, x - y, 0).$$

El esquema de esta composición de aplicaciones es este:

$$f = g \circ h$$

$$\begin{array}{ccccc} & \boldsymbol{h} & & \boldsymbol{g} & \\ \boldsymbol{R}^2 & \rightarrow & \boldsymbol{R}^4 & \rightarrow & \boldsymbol{R}^2 \\ \mathbf{x} & \mapsto & h(\mathbf{x}) & \mapsto & g(h(\mathbf{x})) \end{array}$$

Comentario: La función *g* NO es lineal. La función *h* NO es lineal. Sin embargo, puede que su composición sí o no lo sea.

Aplicando la definición de composición de funciones:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \circ h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\left(h\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} 2x \\ 3y-2 \\ x-y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-(x-y) \\ 2-(3y-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 4-3y \end{pmatrix}$$

Así resulta que la función *f* NO es una función lineal.

Comentario: Las ecuaciones de *f* no son expresiones homogéneas de primer grado.
El cero del espacio inicial no se transforma en el vector cero del espacio final.

f(0, 0) = g(h(0, 0))= g(0, –2, 0, 0) = (0, 4)

```
EJERCICIO 5

(%i5) G(x,y,z,t):=[x-z,2-y];
(%o5) G(x,y,z,t):=[x-z,2-y]

(%i6) H(a,b):=[2*a,3*b-2,a-b,0];
(%o6) H(a,b):=[2 a,3 b-2,a-b,0]

(%i9) G(2*x,3*y-2,x-y,0);
(%o9) [y+x,4-3 y]
```