Febrero 2023 A pregunta 3

3. (1 PUNTO) Sean $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ las aplicaciones lineales definidas por $f(x) = (0, 5x, x)$ y $g(x, y) = 2x + y$. Halle la representación matricial de la aplicación compuesta $f \circ g$.

Solución:

Comentario: Cuando se definen funciones, las variables que aparece son “muda”. Hay que interpretar las definiciones como reglas.

Escribimos la definición de las funciones lineales del enunciado en forma matricial

La función f

$$f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} (x)$$

La matriz asociada a la aplicación lineal f es

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La función g

$$g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x + y = (2 \quad 1) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a la aplicación lineal es g

$$M_g = (2 \quad 1)$$

Si aplicamos directamente el significado de la composición de dos aplicaciones tenemos

$$f \circ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \left(g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = f(2x + y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5(2x + y) \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10x + 5y \\ 2x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

El esquema de la composición de funciones a la que se refiere la pregunta es este

$$\begin{array}{ccccc}
 & g & & f & \\
 \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & 2x + y & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ 5(2x + y) \\ 2x + y \end{pmatrix} \\
 M_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} & & & & M_f = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

La composición de dos aplicaciones lineales es otra aplicación lineal. La matriz de la aplicación composición es el producto de las matrices de las aplicaciones

$$M_{f \circ g} = M_f \cdot M_g = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando la composición de aplicaciones con notación matricial resulta el mismo resultado

$$f \circ g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f \left(g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Comentario: El significado del producto de matrices, es la composición de aplicaciones. El producto de matrices no es conmutativo.

```
(%i23) Mf:=matrix([0],[5],[1]) ;  
Mg:=matrix([2,1]);
```

```
(%o22) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```

```
(%o23) 
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i24) Mf.Mg;
```

```
(%o24) 
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 10 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```

```
(%i19) f(x):=matrix([0],[5*x],[x]);
```

```
(%o19) 
$$f(x) := \begin{pmatrix} 0 \\ 5x \\ x \end{pmatrix}$$

```

```
(%i20) g(x,y):=2*x+y;
```

```
(%o20) 
$$g(x,y) := 2x+y$$

```

```
(%i21) f(g(x,y));
```

```
(%o21) 
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5(y+2x) \\ y+2x \end{pmatrix}$$

```