

EJEMPLOS DE APLICACIONES LINEALES

- Definición de aplicación lineal entre espacios vectoriales

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \rightarrow & W \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \end{array}$$

La función f se dice que es una *aplicación lineal* si verifica que:

$$1) f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$$

$$2) f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$$

La característica más importante de las aplicaciones lineales es que una aplicación lineal está perfectamente determinada si se conoce cómo actúa sobre los elementos de una base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ del espacio original, ya que

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \dots + x_n \mathbf{e}_n) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2) + \dots + x_n f(\mathbf{e}_n)$$

Fijadas una base en el espacio inicial y una base en el espacio final, la expresión analítica de una aplicación lineal f son unas ecuaciones (en notación matricial)

$$Y = AX$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

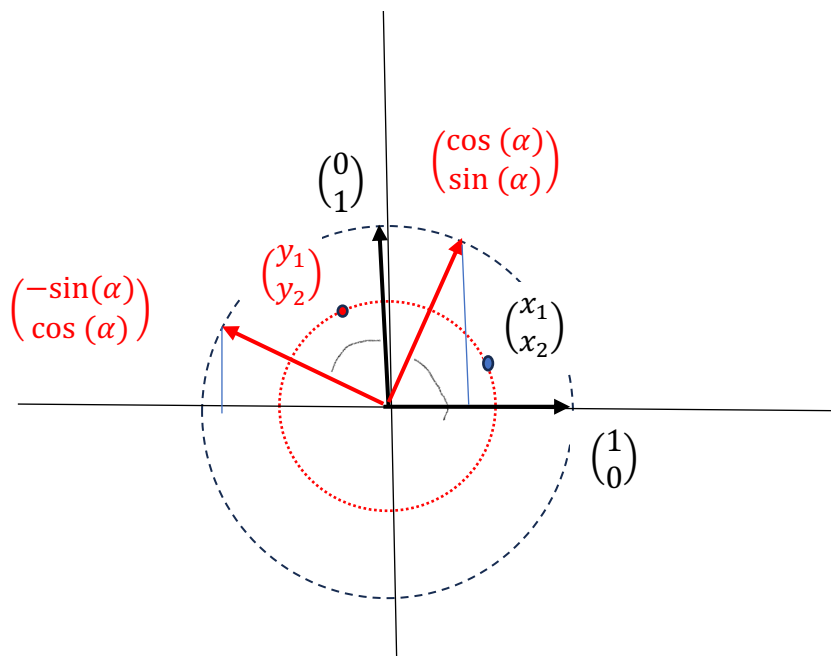
Las columnas de la matriz A son los transformados de los elementos de la base.

- Un giro en $\mathbb{R}^2$

Un giro en $\mathbb{R}^2$ de ángulo α es una aplicación lineal

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{y} = g_\alpha(\mathbf{x}) \end{array}$$

Dado un punto $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ queremos calcular el punto $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$ que resulta de girarlo un ángulo α



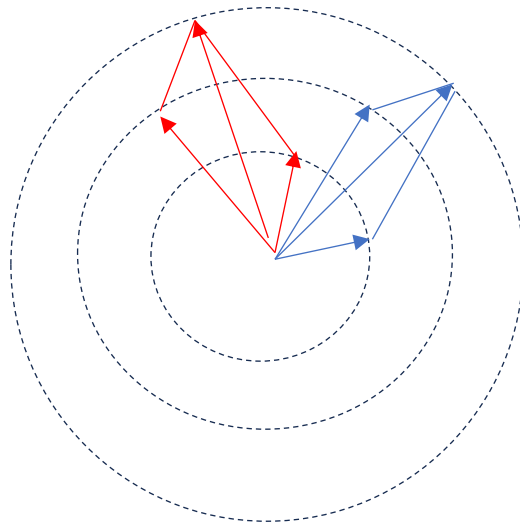
$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left(x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x_1 f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + x_2 f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

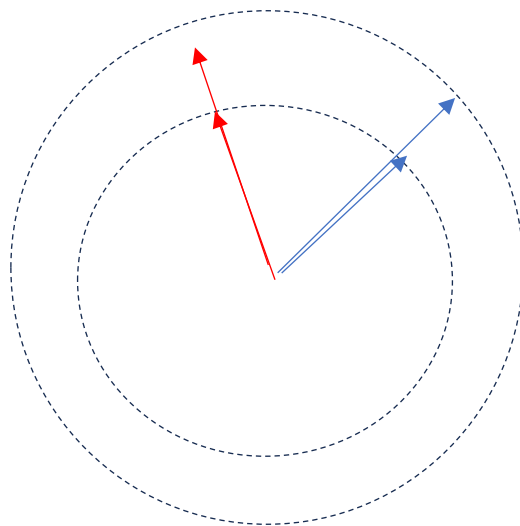
En efecto, un giro de ángulo α es una aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Comprobaremos con este dibujo que

$$1) f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$$



$$2) f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$$



- La derivada en $\mathcal{P}_3$ (los polinomios de grado menor o igual que 3)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_3 & \xrightarrow{D} & \mathcal{P}_3 \\ ax^3 + bx^2 + cx + d & \mapsto & 3ax^2 + 2bx + c \end{array}$$

Si consideramos la base canónica de $\mathcal{P}_3$

$$B = \{x^3, x^2, x, 1\}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$3ax^2 + 2bx + c \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$$

Resulta que

$$D \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$$

Observación: Las columnas son los transformados de los elementos de la base

Veremos en este ejemplo cuáles son los espacios vectoriales $\text{Nuc}(D)$ e $\text{Im}(D)$

- El Núcleo de D es el conjunto de todos los polinomios cuya derivada es el polinomio nulo

$$\text{Nuc}(D) = \{p \in \mathcal{P}_3 \text{ tal que } D(p) = \mathbf{0}\}$$

Intuitivamente, el núcleo de la derivada son el subespacio de los polinomios formado por las constantes.

Analíticamente, el Núcleo de D son las soluciones del sistema

$$D \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ 3a = 0 \\ 2b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\text{Nuc}(D) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Imagen de $(D) \subset \mathcal{P}_3$ es el conjunto de todos los polinomios que se pueden expresar como la derivada de un polinomio de grado menor o igual que 3

$$\text{Im}(D) = \{ q \in \mathcal{P}_3 \text{ tal que } q = D(p) \text{ para algún } p \in \mathcal{P}_3 \}$$

$\text{Im}(D)$ es el subespacio del espacio final que está generado por los transformados de una base del espacio original

Analíticamente, una vez establecidas las bases de referencia en los espacios original y final, $\text{Im}(D)$ es el subespacio generado por los vectores columna de la matriz asociada a la aplicación D .

$$\text{Im}(D) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Se trata del conjunto de los polinomios que son de grado menor o igual que 2.