Febrero 2023 B pregunta 1

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Siendo A y B las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -6a_{11} & -6a_{12} & -6a_{13} \end{pmatrix},$$

determine la matriz M que verifica $MA = B$, sean cuales sean los coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$, con $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 3$.

Solución:

Estudiaremos las transformaciones elementales de filas que llevan la matriz A la matriz B.

Cada una de las transformaciones elementales equivale a premultiplicar por una matriz elemental. Esta matriz elemental es la que se obtiene aplicando la transformación elemental de filas a la matriz identidad.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} A_1 = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

La matriz elemental que se corresponde con esta transformación elemental de filas es

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De este modo

$$A_1 = E_1 A$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Una nueva transformación elemental de filas nos lleva A_1 a B

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xrightarrow{-6F_3 \leftrightarrow F_3} B = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{pmatrix}$$

La matriz elemental que se corresponde con esta transformación elemental de filas es

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-6F_3 \leftrightarrow F_3} E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

De modo que

$$B = E_2 A_1 = E_2 E_1 A$$

Por consiguiente, la matriz *M* tal que *MA*=*B* es

$$M = E_2 E_1$$

Una manera de obtener la matriz *M* es efectuar el producto

$$M = E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma más directa para calcular la matriz $M = E_2 E_1$, es aplicar sucesivamente a la matriz identidad las transformaciones elementales que llevan de la matriz *A* a la matriz *B*.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-6F_3 \leftrightarrow F_3} E_2 E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} = M$$

Comprobación:

$$MA = B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ -6a_{31} & -6a_{32} & -6a_{33} \end{pmatrix} =$$

(%i1) E1:matrix([0,0,1],[0,1,0],[1,0,0]);

(%o1)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i10) E2:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,-6]);

(%o10)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

(%i11) M:E2.E1;

(%o11)
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i16) A:matrix([a11,a12,a13],[a21,a22,a23],[a31,a32,a33]);

(%o16)
$$\begin{pmatrix} a11 & a12 & a13 \\ a21 & a22 & a23 \\ a31 & a32 & a33 \end{pmatrix}$$

(%i17) A1:E1.A;

(%o17)
$$\begin{pmatrix} a31 & a32 & a33 \\ a21 & a22 & a23 \\ a11 & a12 & a13 \end{pmatrix}$$

(%i18) A2:E2.A1;

(%o18)
$$\begin{pmatrix} a31 & a32 & a33 \\ a21 & a22 & a23 \\ -6\ a11 & -6\ a12 & -6\ a13 \end{pmatrix}$$

(%i19) M.A;

(%o19)
$$\begin{pmatrix} a31 & a32 & a33 \\ a21 & a22 & a23 \\ -6\ a11 & -6\ a12 & -6\ a13 \end{pmatrix}$$