

TEMA 3. Aplicaciones lineales y matrices

Definición de aplicación lineal entre espacios vectoriales

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ V & \rightarrow & W \\ \mathbf{x} & \mapsto & \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \end{array}$$

La función f se dice que es un aplicación lineal si verifica que:

- 1) $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2)$
- 2) $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$

Ejemplo: La aplicación que a un polinomio de grado menor o igual que n le asocia un polinomio de grado menor o igual que $n - 1$ que es su derivada

Expresión analítica de una aplicación lineal

Una vez establecidas bases en los espacios vectoriales, cada vector se identifica con sus coordenadas respecto a dicha base. La expresión que relaciona las coordenadas del vector imagen en función de las coordenadas del vector origen es

$$Y = AX$$

donde A es una matriz.

Ejemplo:

Si $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es una base V , de modo que $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$

resulta que el vector $\mathbf{x}$ de V se asocia con el vector de $\mathbb{R}^2$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Si $U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de W de modo que $\mathbf{y} = y_1 \mathbf{u}_1 + y_2 \mathbf{u}_2 + y_3 \mathbf{u}_3$

resulta que el vector $\mathbf{y}$ de W se asocia con el vector de $\mathbb{R}^3$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Si $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

La expresión analítica de la función lineal f es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{cases}$$

Las columnas de la matriz A son los transformados de los elementos de la base de V

En efecto, si llamamos C_1 y C_2 a las columnas de la matriz A .

$$C_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Subespacios importantes relacionados con una aplicación lineal

❖ Imagen de f $\subseteq W$

$$\text{Im}(f) = \{ \mathbf{y} \in W \text{ tal que } \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \text{ para algún } \mathbf{x} \in V \}$$

$\text{Im}(f)$ es el subespacio del espacio final que está generado por los transformados de una base del espacio original

$$\text{Im}(f) = \langle f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n) \rangle$$

Analíticamente, una vez establecidas las bases de referencia en los espacios original y final, $\text{Im}(f)$ es el subespacio generado por los vectores columna de la matriz asociada a la aplicación f .

En el ejemplo que estamos desarrollando

$$\text{Im}(f) = \langle C_1, C_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \right\rangle \subset R^3$$

$\text{Im}(f)$ es un subespacio de R^3 descrito en forma paramétrica.
La dimensión de $\text{Im}(f)$ es igual al rango de la matriz A .

$$\dim(\text{Im}(f)) = \text{ran}(A)$$

❖ Núcleo de f $\subseteq V$

$$\text{Nuc}(f) = \{ \mathbf{x} \in V \text{ tal que } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \}$$

Analíticamente, el $\text{Nuc}(f)$ son las soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

En el ejemplo que estamos desarrollando

$$\text{Nuc}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in R^2 \text{ tal que } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$

$\text{Nuc}(f)$ es un subespacio de R^2 descrito en forma implícita.

La dimensión de $\text{Nuc}(f)$ es igual al número de incógnitas menos el rango de la matriz A .

$$\dim(\text{Nuc}(f)) = n - \text{ran}(A)$$

[n es la dimensión de espacio original V , es decir, n es el número de incógnitas del sistema que define el núcleo]

Relación entre las dimensiones de $\text{Im}(f)$ y $\text{Nuc}(f)$:

$$\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Nuc}(f)) = \dim(V(\text{Inicial}))$$

Composición de aplicaciones lineales

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & W & \xrightarrow{g} & U \\ \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x}) & \mapsto & g(f(\mathbf{x})) \end{array}$$

Fijadas unas bases de referencia en los espacios vectoriales, cada aplicación lineal se corresponde con una matriz. si $f \leftrightarrow A$ y $g \leftrightarrow B$, entonces $g \circ f \leftrightarrow B \cdot A$,

$$g \circ f(X) = g(f(X)) = B(AX) = (B \cdot A) X$$

En resumen, la matriz de la composición de funciones es el producto de las matrices.

Fórmulas del cambio de base

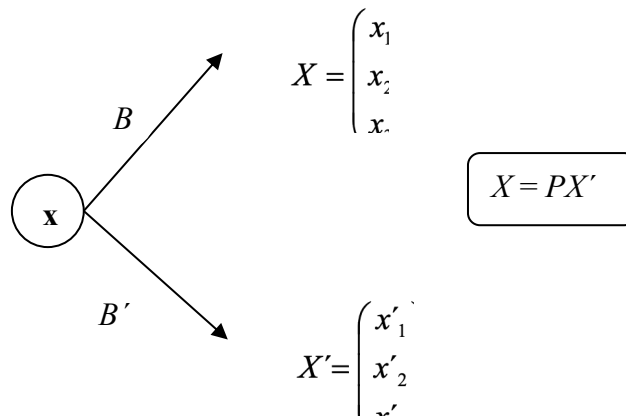
Supongamos un espacio vectorial V (por ejemplo, de dimensión 3). En este espacio vectorial consideremos dos bases diferentes:

$$B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \quad B' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$$

Un mismo vector $\mathbf{x} \in V$ tendrá asociados dos vectores de coordenadas de $\mathbb{R}^3$, según la base que consideremos

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3$$

La relación que hay entre ambas expresiones de coordenadas es $X = PX'$



En donde $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz de paso, que tiene por columnas las

coordenadas de los elementos de la nueva base B' referidos a la base B .

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= p_{11}\mathbf{e}_1 + p_{21}\mathbf{e}_2 + p_{31}\mathbf{e}_3 \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}'_2 &= p_{12}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2 + p_{32}\mathbf{e}_3 \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}'_3 &= p_{13}\mathbf{e}_1 + p_{23}\mathbf{e}_2 + p_{33}\mathbf{e}_3 \xrightarrow{B} \begin{pmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Veamos las operaciones en detalle

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x} &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3 = \\
 &= x'_1 (p_{11} \mathbf{e}_1 + p_{21} \mathbf{e}_2 + p_{31} \mathbf{e}_3) + x'_2 (p_{12} \mathbf{e}_1 + p_{22} \mathbf{e}_2 + p_{32} \mathbf{e}_3) + x'_3 (p_{13} \mathbf{e}_1 + p_{23} \mathbf{e}_2 + p_{33} \mathbf{e}_3) = \\
 &= (x'_1 p_{11} + x'_2 p_{12} + x'_3 p_{13}) \mathbf{e}_1 + (x'_1 p_{21} + x'_2 p_{22} + x'_3 p_{23}) \mathbf{e}_2 + (x'_1 p_{31} + x'_2 p_{32} + x'_3 p_{33}) \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

Identificando las coordenadas respecto de la base B

$$x_1 = x'_1 p_{11} + x'_2 p_{12} + x'_3 p_{13}$$

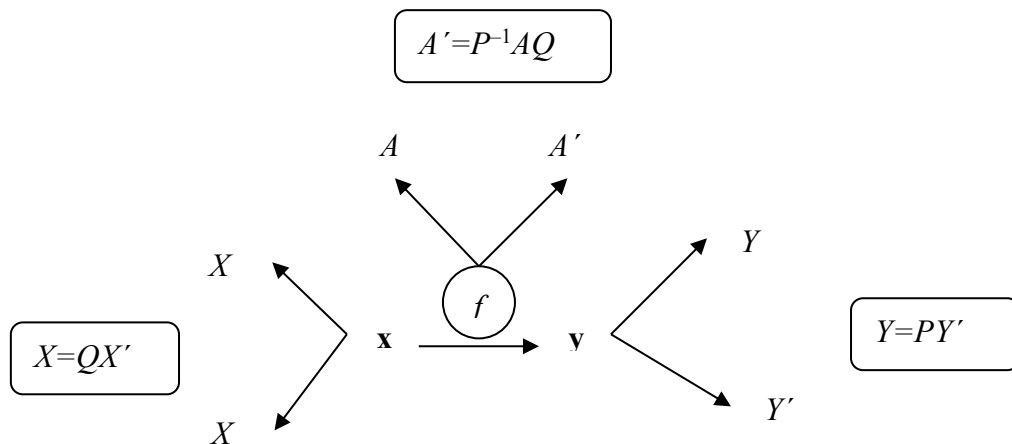
$$x_2 = x'_1 p_{21} + x'_2 p_{22} + x'_3 p_{23}$$

$$x_3 = x'_1 p_{31} + x'_2 p_{32} + x'_3 p_{33}$$

Escrito en notación matricial

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Efectos de los cambios de base en la matriz asociada a una aplicación lineal



La justificación de esta relación entre las matrices A y A' asociadas a una aplicación lineal, f , es esta:

$$Y = AX \rightarrow PY' = A QX' \rightarrow Y' = P^{-1}A QX'$$

Como $Y' = A'X'$, identificando, en ambas expresiones, resulta que $A' = P^{-1}AQ$.

Para el caso de que f sea un *endomorfismo* (aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo)

$$A' = P^{-1}AP$$