Primeros ejemplos de diagonalización de endomorfismos

SIMETRÍA RESPECTO A LA DIAGONAL DEL PRIMER CUADRANTE

Sea $f : R^2 \to R^2$ el endomorfismo que transforma un vector del plano en su simétrico respecto a la diagonal del primer cuadrante.

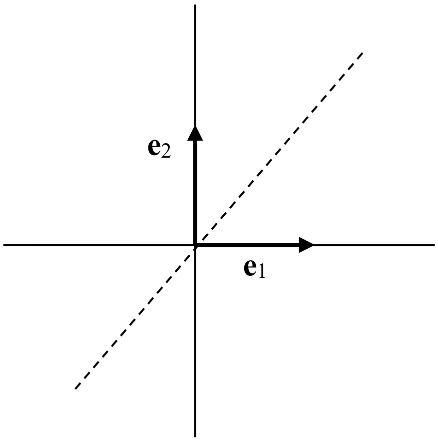
Comentario: Una aplicación lineal está perfectamente definida si se conoce como actúa sobre los elementos de una base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, ya que

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = x_1 f(\mathbf{e}_1) + x_2 f(\mathbf{e}_2)$$

Respecto de una base, la expresión analítica de f son unas ecuaciones $Y = AX$
Las columnas de la matriz A son los transformados de los elementos de la base.

Respecto de la base canónica la expresión analítica de f es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



$$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 \quad \underset{B}{\rightarrow} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \quad \underset{B}{\rightarrow} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si buscamos para qué valores de λ se verifica que

$$f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$$

siendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$,

estamos buscando direcciones invariantes. Es decir, estamos buscando en qué direcciones el transformado de un vector es un múltiplo suyo (es decir, el transformado de un vector está en la misma recta). Estas direcciones invariantes son direcciones privilegiadas para el endomorfismo f. El valor λ es la constante de proporcionalidad en esa dirección invariante.

Comentario: Interpretando el problema geométricamente. ¿Cuáles son las direcciones invariantes de una simetría respecto de una recta? La respuesta es que las direcciones invariuantes son dos: Una dirección invariante es el propio eje de simetría y la otra dirección invariante es la recta perpendicular al eje de simetría en el origen.

La ecuación $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ en coordenadas es $AX = \lambda X$.
O lo que es mismo, pasando el segundo miembro al primer miembro,

$$AX - \lambda X = 0 \quad \leftrightarrow \quad (A - \lambda I)\, X = 0.$$

En nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{cases} 0x_1 + 1x_2 = \lambda x_1 \\ 1x_1 + 0x_2 = \lambda x_2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para que este sistema tenga una solución distinta de la trivial $(x_1, x_2) = (0, 0)$, el sistema tiene que ser compatible indeterminado, para los cual tiene que ocurrir que el determinante de la matriz de los coeficientes sea cero.

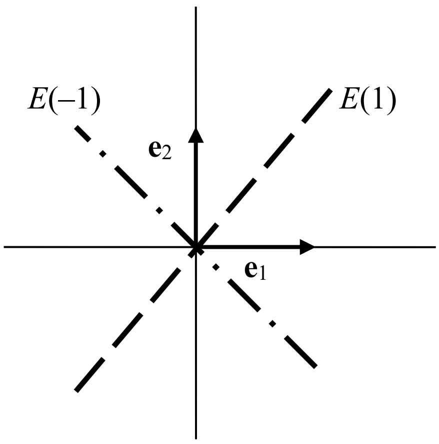
$$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \leftrightarrow \quad \lambda^2 - 1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \lambda = 1, \;\; \lambda = -1$$

Comentario: El *polinomio característico* de un endomorfismo f es

$$\det(A - \lambda I)$$

Comentario: El polinomio característico es una propiedad intrínseca de f y no depende de la expresión analítica. Ver la demostración más adelante.

Se llaman *autovalores* de f son las raíces del polinomio característico.



Para los vectores que están en la diagonal del primer cuadrante, $E(1)$, se verifica que

$$f(\mathbf{x}) = 1\ \mathbf{x}$$

Para los vectores que están en la diagonal del primer cuadrante, $E(-1)$, se verifica que

$$f(\mathbf{x}) = (-1)\ \mathbf{x}$$

Para cada uno de estos autovalores λ consideramos su *autoespacio*

$$E(\lambda) = \{\mathbf{x} \;\text{ tales que }\; f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}\}$$

Usando las expresiones analíticas, la definición del *autoespacio* del autovalor λ es:

$$E(\lambda) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tales que } \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

En el ejemplo que consideramos

$$E(1) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tales que } \begin{pmatrix} 0-1 & 1 \\ 1 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \quad \leftrightarrow \quad \{-x_1 + x_2 = 0$$

$$E(1) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tales que } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Comentario: Como det($A - \lambda I$) = 0, sabemos de antemano que una de las dos ecuaciones del sistema depende linealmente de la otra, con lo cual puede suprimirse.

Comentario: El conjunto de vectores que se transforman en sí mismos, $E(1)$, es la diagonal del primer cuadrante. La ecuación implícita de esta recta es $x_2 = x_1$.

$$\{ E(-1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tales que } \begin{pmatrix} 0-(-1) & 1 \\ 1 & 0-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \quad \leftrightarrow \quad \{x_1 + x_2 = 0$$

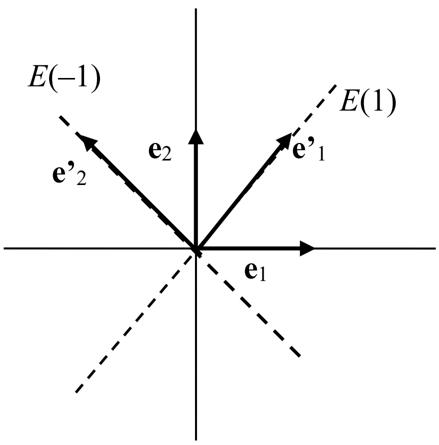
$$E(-1) = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tales que } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \} = < \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} >$$

Comentario: El conjunto de vectores que se transforman en su opuesto, $E(-1)$, es la diagonal del segundo cuadrante. La ecuación implícita de esta recta es $x_2 = -x_1$.

Los vectores que son base de los autoespacios, se les llama *autovectores*. En nuestro caso, los autovectores son (1, 1) y (–1, 1).

Si elegimos como elementos de una nueva base los *autovectores*

$$B' = \{ \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2 \}$$



Resulta que la expresión matricial de la aplicación f, es una matriz diagonal, en la que los términos de la diagonal son los autovalores. Ya que

$f(\mathbf{e'_1}) = 1\mathbf{e'_1}$

$f(\mathbf{e'_2}) = (-1)\mathbf{e'_2}$

Así pues, respecto de la base B' la matriz asociada a f es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comentario: La matriz del cambio del base de B a B' es la que tiene por columas los elementos de la nueva base

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

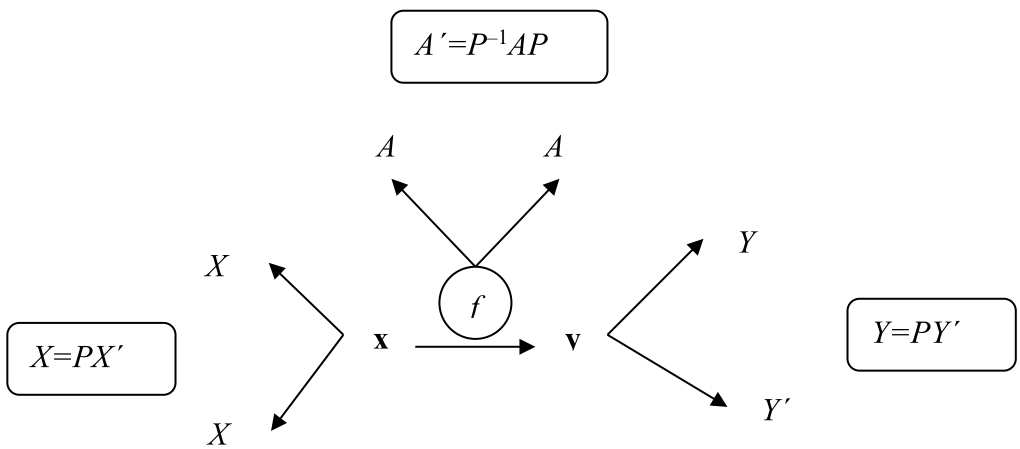
Comentario: Podemos comprobar que, en efecto,

$$A' = P^{-1}AP \qquad \leftrightarrow \qquad PA' = AP$$

Haciendo la comprobación $PA' = AP$ evitamos tener que calcular una matriz inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentario: <u>Efectos de los cambios de base en la matriz asociada a un endomorfismo</u>



La justificación de esta relación entre las matrices A y A' asociadas a una aplicación lineal, f, es esta:

$$Y = AX \quad \rightarrow \quad PY' = A\,PX' \quad \rightarrow \quad Y' = P^{-1}A\,PX'$$

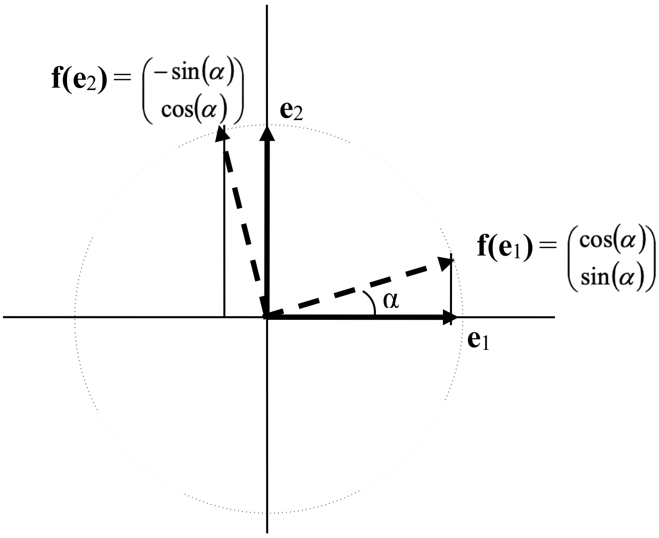
Como $Y' = A'X'$, identificando, en ambas expresiones, resulta que $A' = P^{-1}AP$.

Demostración de que el polinomio característico es una propiedad intrínseca de f y no depende de la expresión analítica.

$$\det(A' - \lambda I) = \det\left(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP\right) = \det\left(P^{-1}(A - \lambda I)P\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det(A - \lambda I)\det(P) = \det(A - \lambda I)$$

GIRO CENTRAL DE ÁNGULO α

Sea $f: R^2 \to R^2$ el endomorfismo que transforma un vector del plano en el resultado de girarlo un ángulo $\alpha \neq 0$ en el sentido contrario a las agujas del reloj.



Respecto de la base canónica $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ las ecuaciones que nos dan las coordenadas del vector transformado en función de las coordenadas del vector es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Comentario: Una aplicación lineal está determinada si se conocen los transformados de una base. En la expresión analítica de una aplicación lineal, las columnas de la matriz asociada a la aplicación son las coordenadas de los transformados de la base.

En un giro de ángulo $\alpha \neq 0$ ó $\alpha \neq \pi$ no hay direcciones invariantes. Eso significa que no va a haber autovalores reales y, por tanto, la matriz de ese giro no se puede diagonalizar. Veamos cómo se ve esto de una manera algebraica.

El polinomio característico de f es

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (2\cos\alpha)\lambda + 1$$

El discriminante de esta ecuación de segundo grado en λ es negativo cuando $\alpha \neq 0$, o $\alpha \neq \pi$. Por tanto, la ecuación no tiene raíces reales.

$$\Delta = 4\cos^2\alpha - 4 = 4(\cos^2\alpha - 1) < 0$$

[Recuerda que $\cos^2\alpha$ como mucho vale 1 cuando $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$]