Febrero 2018 A Problema a)

$\boxed{\textbf{Problemas}}$ Se pide:

a) Hallar los vectores propios del endomorfismo $f\colon \wp_3(x) \to \wp_3(x)$ definido por la derivada, siendo $\wp_3(x)$ el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor a 3. Es decir, $f(p(x)) = p'(x)$, $p(x) \in \wp_3(x)$ y $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$ (1 pto.).

b) Calcular los invariantes de la cónica

$$5x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 + 2x_2 - 5 = 0$$

(1pto.).

c) Explicar en qué consiste el método de los mínimos cuadrados (0.5ptos.) y decir cómo se halla su solución (0.5ptos.).

Respuesta

Comentario: La aplicación f es, en efecto, una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo. Se dice que f es un *endomorfismo*.

Consideremos en $\mathcal{P}_3(x)$ la base canónica $B = \{ x^2, x, 1\}$, Una vez establecida esta referencia cada polinomio de $\mathcal{P}_3(x)$ se identifica con el vector de R^3 en el que sus componentes son sus coordenadas respecto de la base canónica.

Para construir la matriz A asociada al endomorfismo f tenemos en cuenta que las columnas de la matriz son los transformados de los elementos de la base.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = f(x^2) = 2x = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}; \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = f(x) = 1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}; \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = f(1) = 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Por tanto, referido a la base canónica, el endomorfismo f, se asocia a la matriz A.

$$f \leftrightarrow A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

- Calculamos *el polinomio característico* de A

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix}0-\lambda & 0 & 0\\2 & 0-\lambda & 0\\0 & 1 & 0-\lambda\end{pmatrix} = (-\lambda)^3 = -\lambda^3$$

Comentario: El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal.

- Calculemos los *autovalores*

Comentario: Los *autovalores* son las raíces del polinomio característico. Es decir, las soluciones de la ecuación $p(\lambda) = 0$.

$$p(\lambda) = -\lambda^3 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 0 \text{ (con multiplicidad algebraica igual a 3)}$$

- Calculemos los *autoespacios*

Comentario: Dado un autovalor λ, se llama el *autoespacio* correspondiente a dicho autovalor, al conjunto de vectores **x** que verifican que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. O lo que es lo mismo, el conjunto de los vectores **x** que verifican $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Es decir, usando coordenadas

$$E(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

En nuestro caso, para λ = 0, el autoespacio $E(0)$ son las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 0-0 & 0 & 0 \\ 2 & 0-0 & 0 \\ 0 & 1 & 0-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ 2x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

La solución general de este sistema depende de un parámetro $x_3 = t$, y es

$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, t) = t\,(0, 0, 1)$$

En definitiva, el autoespacio correspondiente al autovalor λ = 0 es el subespacio vectorial de $\mathcal{P}_3(x)$.

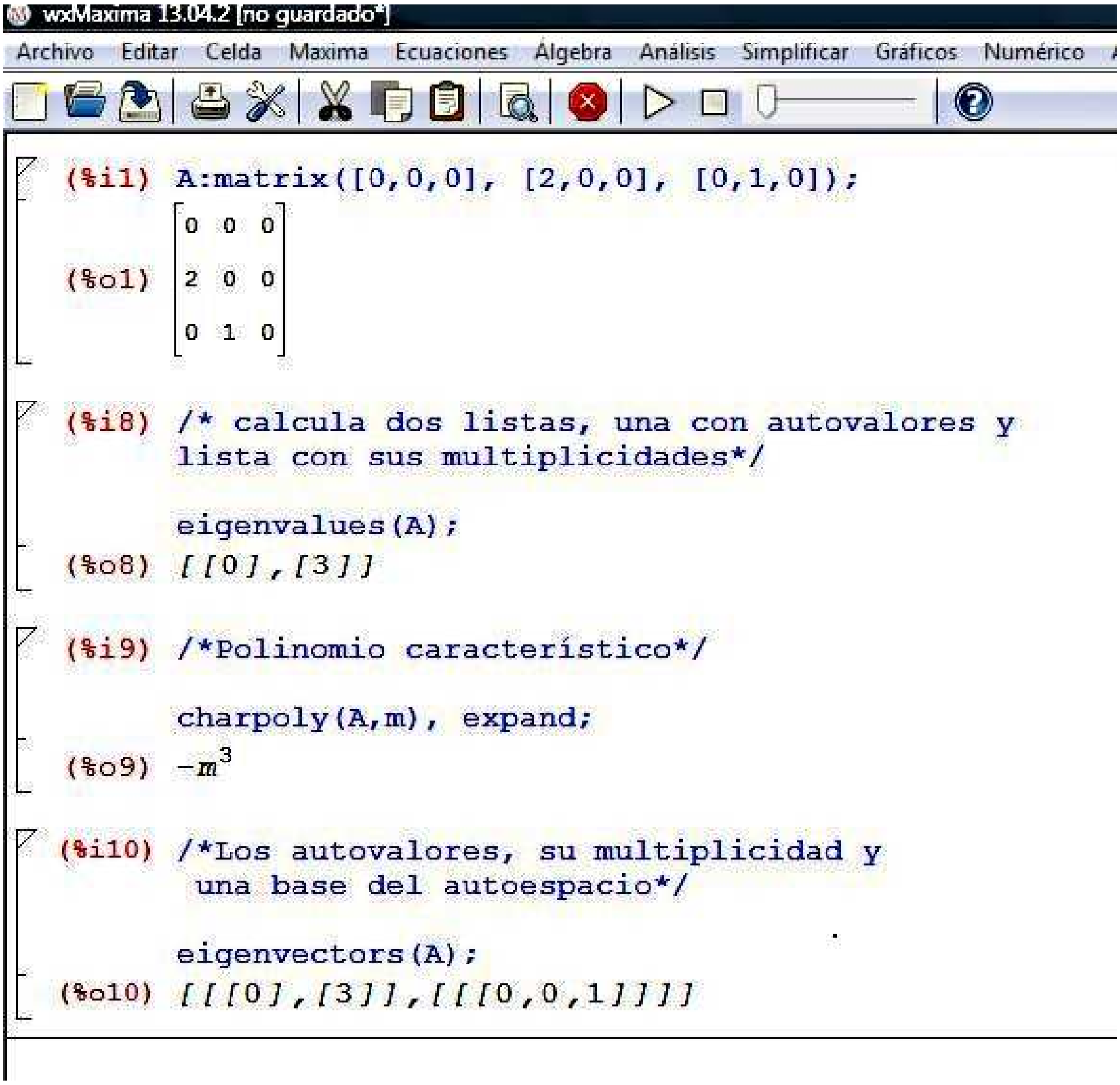
$$E(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

que es un espacio de dimensión 1.

El conjunto $E(1)$ es el conjunto de los polinomios que son de la forma

$$p(x) = 0\,x^2 + 0\,x + t\,1,$$

Es decir, $E(0)$ son las constantes.


wxMaxima 13.04.2 [no guardado*]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico
(%i1) A:matrix([0,0,0], [2,0,0], [0,1,0]);
(%o1) [0 0 0; 2 0 0; 0 1 0]
(%i8) /* calcula dos listas, una con autovalores y lista con sus multiplicidades*/
eigenvalues(A);
(%o8) [[0],[3]]
(%i9) /*Polinomio característico*/
charpoly(A,m), expand;
(%o9) -m^3
(%i10) /*Los autovalores, su multiplicidad y una base del autoespacio*/
eigenvectors(A);
(%o10) [[[0],[3]],[[[0,0,1]]]]