Enero 2010 A Ejercicio 4

> $\boxed{\textbf{Ejercicio 4}}$ **Sean A y B matrices regulares de orden n. Entonces: A) Son semejantes; B) NO se pueden relacionar mediante una relación de equivalencia; C) Son equivalentes; D) Ninguna de las anteriores.**

Antes de resolver el ejercicio vamos a recordar algunos conceptos y algunas definiciones.

Relación de equivalencia. (ver página 141 del libro de teoría)

En un conjunto se puede considerar una relación entre sus elementos. Por ejemplo, en el conjunto, *N*, de los números naturales podemos considerar la relación *R* = "divide exactamente a". De tal manera que 5*R*30, 2*R*100, ….

Formalmente, una relación *R* definida en un conjunto *A* es un subconjunto del conjunto producto cartesiano $A \times A$ de las parejas de elementos de *A*.

En ejemplo, anterior el conjunto $R \subset N \times N$. Y se tiene que $(5, 30) \in R$, $(2, 100) \in R$, ….

Se dice que una relación es una *relación de equivalencia* si verifica las siguientes propiedades:

Reflexiva: $\forall a \in A$, se verifica que *aRa*

Simétrica: Si *aRb*, entonces *bRa*

Transitiva: Si *aRb* y *bRc*, entonces *aRc*

Lo importante de las relaciones de equivalencia es que clasifican el conjunto en *clases de equivalencia*. Hacen una *partición* del conjunto.

Por ejemplo, en los números naturales, la relación "tener el mismo resto cuando se divide por 3" es una relación de equivalencia. El conjunto de los enteros queda clasificado, mediante esta relación, en tres clases: los números que dan de resto cero al dividirlos por 3, los que dan de resto uno, y los que dan de resto dos.

Algunas relaciones de equivalencia entre matrices cuadradas (Ver página 146 del libro de teoría)

Matrices equivalentes

Se dice que dos matrices cuadradas *A* y *B* son *equivalentes* si existen dos matrices regulares *M* y *N*, tal que

$$B = MAN$$

(Las matrices regulares son las que tienen determinante distinto de cero. Las matrices regulares tienen rango igual a *n*, y tienen inversa)

Observaciones:

1) Decir que los rangos de dos matrices A y B coinciden equivale a decir que son equivalentes.

2) Las matrices asociadas a un endomorfismo en diferentes bases en el espacio inicial y y diferente base en el espacio final, son equivalentes.

Matrices congruentes

Se dice que dos matrices cuadrada A y B son *congruentes* si existe una matriz regular P, tal que

$$B = P^t AP$$

Observación:

Si dos matrices son congruentes también son equivalentes, y por tanto, tienen el mismo rango.

Matrices semejantes

Se dice que dos matrices cuadrada A y A' son *semejantes* si existe una matriz regular P, tal que

$$A' = P^{-1}AP$$

Observación:

Las matrices de un mismo endomorfismo, en diferentes bases, son semejantes.
La matriz P es la matriz del cambio de base.

Si A y B son matrices regulares, ambas tiene el determinante distinto de cero, y por consiguiente, ambas tienen el mismo rango igual a n. Esto significa que son equivalentes. Pero no se puede asegurar que sean congruentes o semejantes.

La respuesta correcta es **C)**

Otra manera, más directa, de argumentar la respuesta sería la siguiente:

Si A y B son matrices regulares de orden n, entonces poseen inversas A^{-1} y B^{-1}, también matrices regulares. Como consecuencia podemos escribir

$$B = A^{-1}AB$$

Lo que evidencia que A y B cumplen la definición de matrices regulares, siend
$M = A^{-1}$ y $N= B$.