



COMPLEMENTOS de
MATEMÁTICAS

PROBLEMAS DE
ESPACIOS Y
FUNCIONES

allave@madrid.uned.es

Pregunta 1 Con la métrica del supremo. ¿Cuál es la bola abierta de centro $(0,0)$ y radio 1?

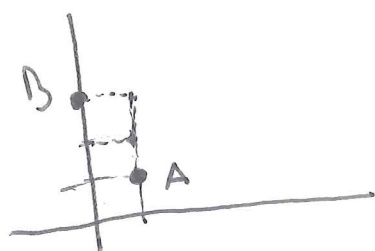
- a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y < -x+1, y < x+1, y > -x-1, y > x-1\}$
- b) $(-1,1) \times (-1,1)$**
- c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 < 1\}$
- d) Ninguna de las anteriores

Respuesta

¿Cuál es la métrica del supremo?

$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sup \{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\}$
define una "distancia" entre puntos de $\mathbb{R}^2$

Por ejemplo. ¿Cuál es la distancia del supremo de $A = (1, 1)$ a $B = (0, 3)$?



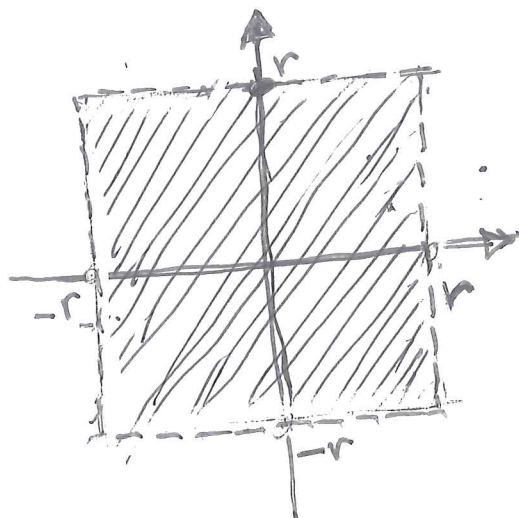
$$\begin{aligned} d_{\sup}(A, B) &= \sup\{|1-0|, |1-3|\} = \\ &= \sup\{1, 2\} = 2 \end{aligned}$$

¿Cuál es la distancia del supremo del punto $O = (0,0)$ al punto $X = (x,y)$?

$$d_{\sup}(O, X) = \sup\{|x-0|, |y-0|\} = \sup\{|x|, |y|\}$$

2
 ¿En la métrica del supremo cómo es la BOLA centrada en el origen de radio r ?

$$B(0, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } d_{\text{sup}}(0, x) < r\}$$



Son los puntos en los que tanto la coordenada x , como la coordenada y es menor que r

Como conjunto $B(0, r)$ es un cuadrado $(-r, r) \times (-r, r)$

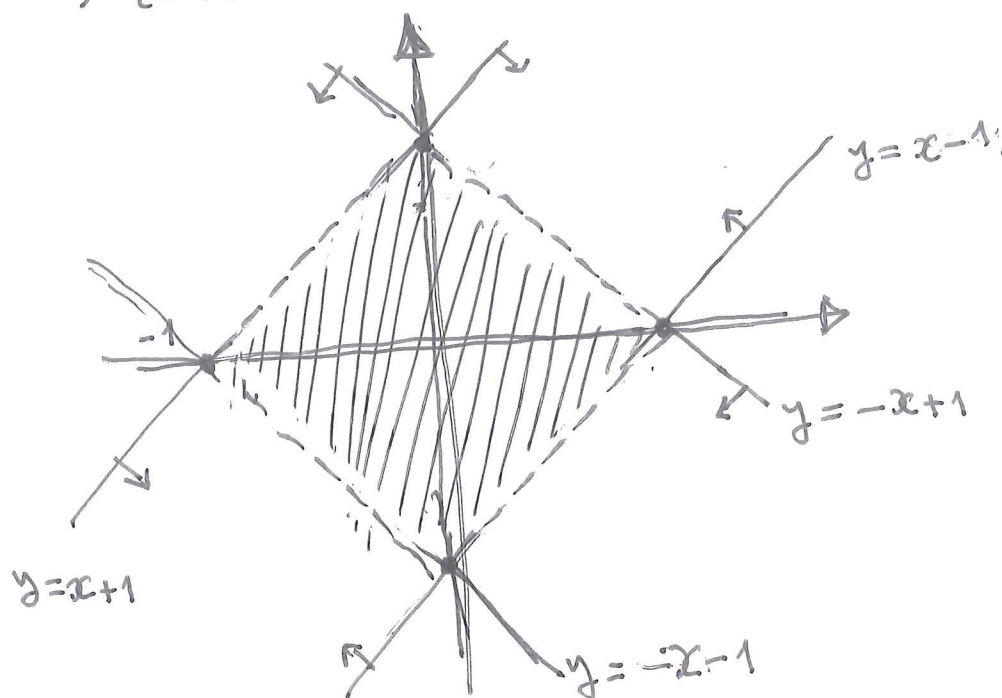
Escrito de una manera formal

$$\begin{aligned} B((0,0), 1) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \sup\{|x-0|, |y-0|\} < 1\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |x| < 1 \text{ y } |y| < 1\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } -1 < x < 1 \text{ y } -1 < y < 1\} = \\ &= (-1, 1) \times (-1, 1) \end{aligned}$$

La respuesta correcta es **B**

Vamos a representar gráficamente los conjuntos dados en las otras opciones

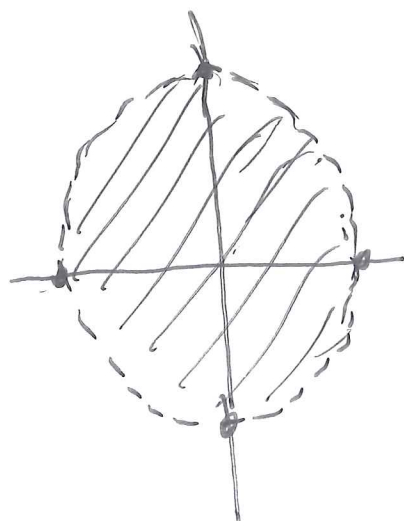
a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y < -x+1, y < x+1, y > -x-1, y > x-1\}$



Esta es la bola unidad con la distancia de la suma

b)  es la correcta (ya lo vimos)

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 < 1\}$



Es el interior del círculo de radio 1

Es la bola unidad de la distancia euclídea

Pregunta 2 Considérense las aplicaciones $d_1, d_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$

dadas por

$$d_1(x, y) = |e^x - e^y|$$

$$d_2(x, y) = e^{|x-y|}$$

se tiene que

- a) d_1 y d_2 son distancias de $\mathbb{R}$
- b) d_1 es una distancia de $\mathbb{R}$ y d_2 no.
- c) Ni d_1 , ni d_2 son distancias en $\mathbb{R}$.
- d) d_2 es una distancia en $\mathbb{R}$ y d_1 no.

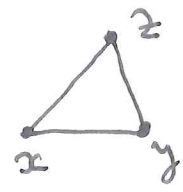
Respuesta

Recordamos

Definición:

Se dice que una aplicación $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ es una distancia si verifica $\forall x, y, z \in E$

- 1) $d(x, y) \geq 0$ y $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$



(desigualdad triangular)

• Estudiamos $d_1(x, y) = |e^x - e^y|$ ¿es una distancia?

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Comprobamos las tres propiedades de la definición

(*) Dos puntos distintos están a distancia positiva si los puntos están a distancia 0 es porque son iguales

$$1) d(x, y) = |e^x - e^y| \geq 0$$

$$\text{Si } x = y \Rightarrow d(x, x) = |e^x - e^x| = 0$$

$$\text{Si } |e^x - e^y| = 0 \Rightarrow e^x = e^y \Rightarrow x = y$$

$$2) d(x, y) = |e^x - e^y| = |e^y - e^x| = d(y, x)$$

$$3) d(x, z) = |e^x - e^z| = |e^x - e^y + e^y - e^z|$$

$$\leq |e^x - e^y| + |e^y - e^z| = d(x, y) + d(y, z)$$

Conclusión: d_1 sí es una distancia

• Estudiamos $d_2(x, y) = e^{|x-y|}$ ¿Es una distancia?

$$1) d_2(x, y) = e^{|x-y|} \geq 0$$

$$d_2(x, x) = e^{|x-x|} = e^0 = 1$$

No verifica la propiedad 1

Conclusión: d_2 No es una distancia

La respuesta correcta es (B)

Pregunta 3

Considérese el conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 = 4\}$$

con la métrica euclídea. Se tiene que

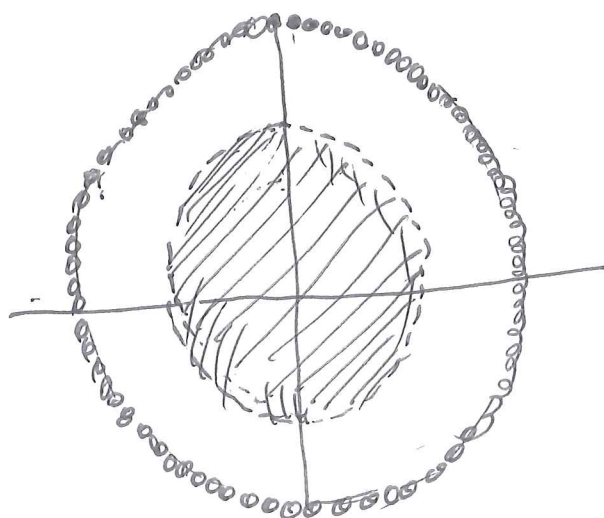
a) El conjunto M es abierto

b) $\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 1\}$

c) $\overline{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 = 4\}$

d) Ninguna de las anteriores

Intentamos hacernos una idea del conjunto M



a)

Recordamos

(7)

Definición

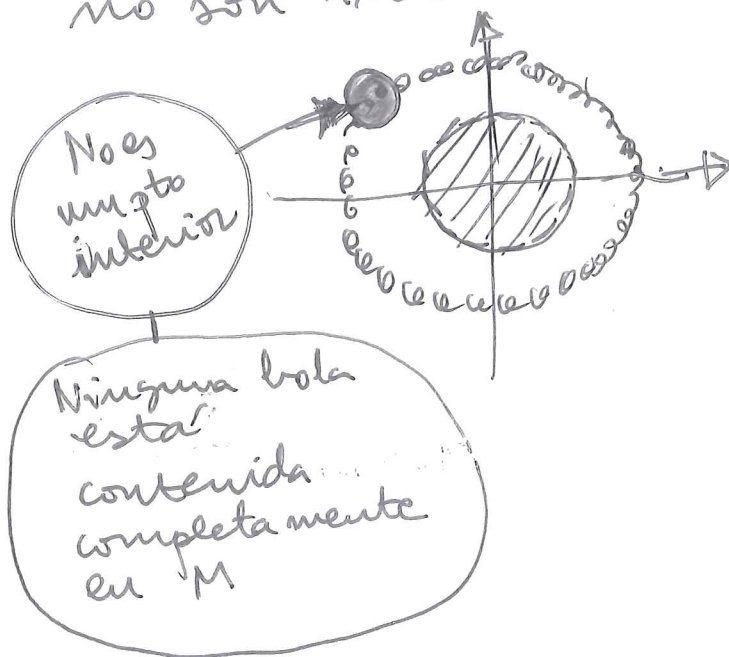
Se dice que un conjunto es abierto si todos sus puntos son interiores.

Es decir, todo punto tiene una bola contenida en el conjunto.

Los puntos del conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 = 4\}$$

no son interiores



Luego M no es un conjunto abierto

b) Estudiemos cómo es la adherencia de M

$$\bar{M} = \text{int}(M) \cup \text{Front}(M)$$

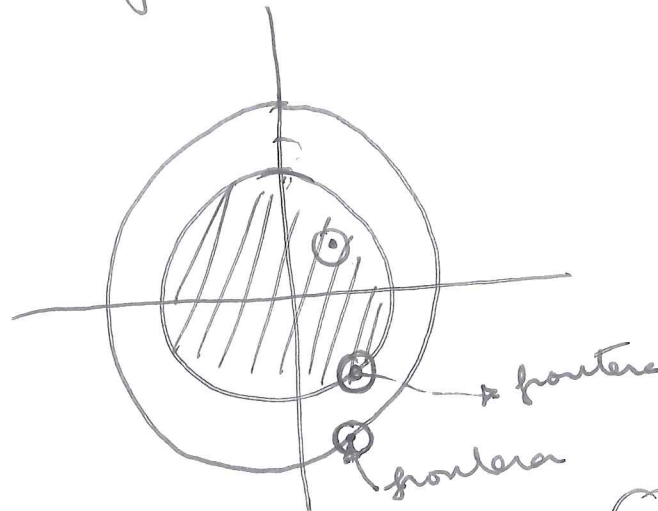
puntos
interiores

puntos de la
frontera

(8)

$$\overline{M} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \\ \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 = 4\}$$

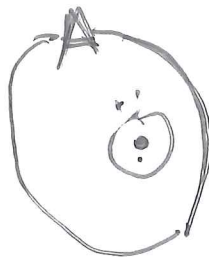
Lo comprobamos: cualquier punto de este conjunto o es de $\text{int}(M)$ o de $\text{front}(M)$



La respuesta correcta es (C)

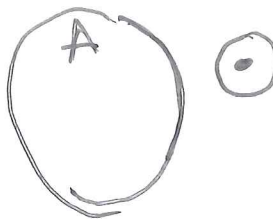
Recordar

Punto interior



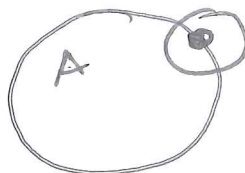
x es un punto interior de A
si existe un entorno de x
tal que $U_x \subset A$

Punto exterior:



x es exterior de A
si es interior del
complementario de A

Punto frontera:



x es un punto frontera
de A si cualquier
entorno de x contiene
elementos de A y de su
complementario

Pregunta 4 Sean M y S los conjuntos definidos como

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 < y - 1\}$$

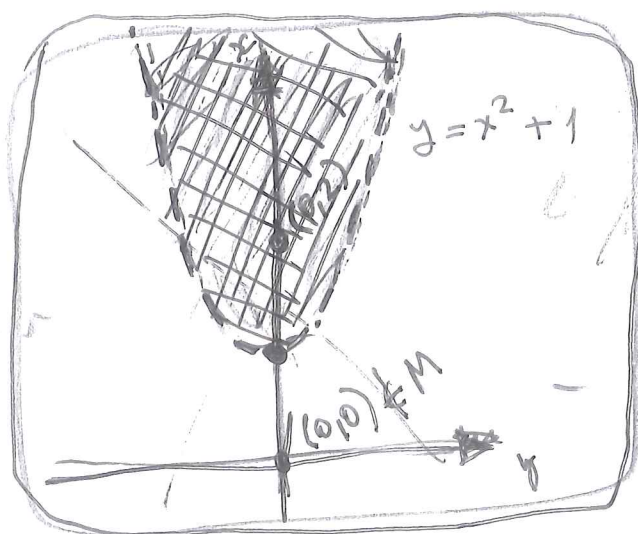
$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 = y - 1\}$$

Señale la o las opciones correctas

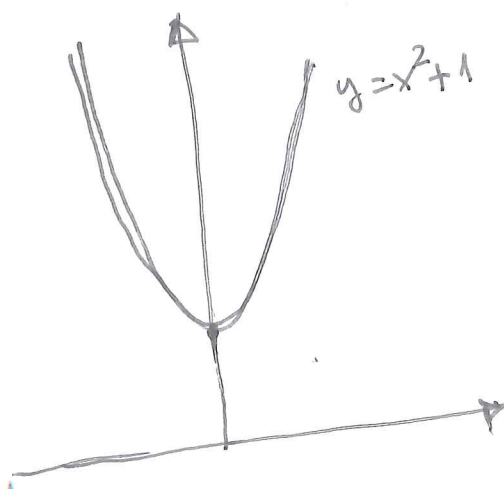
- ☒ a) El conjunto M es abierto
- ☐ b) El conjunto M es cerrado
- ☐ c) El conjunto M es compacto
- ☐ d) El conjunto M es acotado
- ☒ e) La frontera del conjunto M es el conjunto S
- ☐ f) Ninguna de las anteriores

Nos hacemos una idea de los conjuntos a los que se refiere el enunciado

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 < y - 1\}$$



$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 = y - 1\}$$



M es un conjunto abierto (todos los puntos son interiores) $[\text{int}(M) = M]$

Es correcta la opción (A)

observamos que

$$S = \text{frontera}(M)$$

es correcta la opción (E)

Recordamos la definición de cerrado:

* M es cerrado si M^c es abierto.

* M es cerrado si $\text{Adh}(M) = M$
 $= \text{Int}(M) \cup \text{Front}(M)$

Cualquier punto de S pertenece a la $\text{Adh}(M)$, pero no a M por tanto

M no es cerrado

La opción (B) es falsa

En $\mathbb{R}^2$ ser compacto = cerrado y acotado

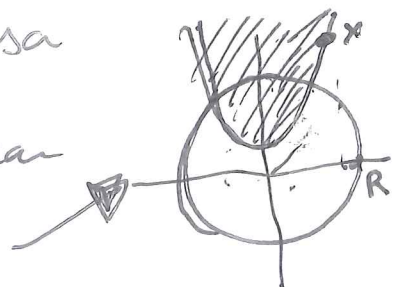
por tanto M no es compacto

La opción (C) es falsa

M y S no son conjuntos acotados, ya que no se pueden escribir como subconjuntos de una bola de radio R .

La opción (D) es falsa

[Para cualquier R se puede encontrar un punto x del conjunto tal que $d(0, x) > R$]



Pregunta 5

12

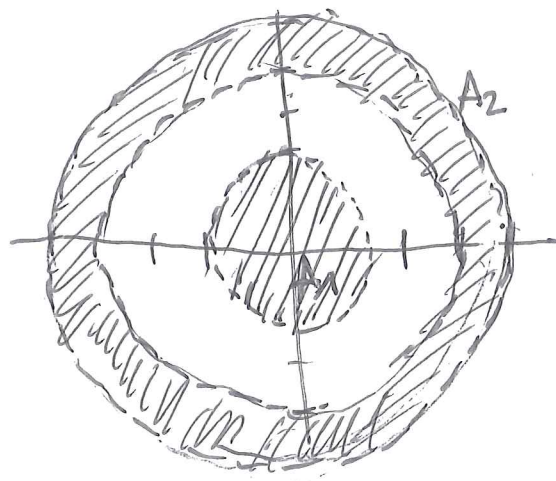
El conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } x^2 + y^2 < 1\} \cup$$

$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } 3 < x^2 + y^2 < 4\}$$

- a) ~~Con~~exo por arcos
- b) Cerrado
- c) Abierto y conexo
- ☒ d) Ninguna de las anteriores

Respuesta Nos hacemos una idea de cómo es el conjunto A



Intuitivamente, un conjunto conexo es el que se puede representar como una sola pieza

Definición

Un conjunto M es conexo si no existe una partición de M formada por dos conjuntos abiertos (o equivalentemente cerrados)

En otras palabras, M es conexo si no existe ningún par de conjuntos abiertos (cerrados) M_1 y M_2 tales que

$$M_1 \cup M_2 = M ; M_1 \cap M_2 = \emptyset$$

(En $\mathbb{R}$ los únicos conjuntos conexos son los intervalos)

Teorema

M es conexo por arcos $\Rightarrow M$ es conexo

$\rightarrow$ El conjunto A es abierto

$\rightarrow$ El conjunto A del enunciado
No es conexo ya que

$$A = A_1 \cup A_2 ; A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

A_1 y A_2 son dos conjuntos abiertos

La opción correcta es la (D)

Pregunta 6

Los conjuntos $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^2$

definidos por

$$M_1 = \{(x, y) \text{ tal que } x \in \mathbb{Q}, y \geq 0\} \cup \\ \cup \{(x, y) \text{ tal que } x \in \mathbb{I}, y \leq 0\}$$

$$M_2 = \{(0, y) \text{ tal que } y \in \mathbb{R}\} \cup \\ \cup \{(1, y) \text{ tal que } y \in \mathbb{R}\} \cup \\ \cup \{(x, \frac{1}{n}) \text{ tal que } x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$$

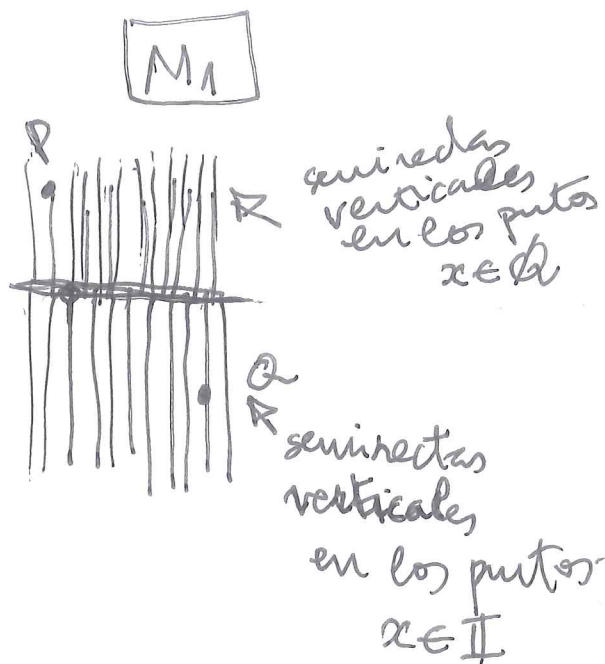
a) Son convexos

b) M_1 es convexo y M_2 no

c) M_2 es convexo y M_1 no

d) Ni M_1 ni M_2 son convexos

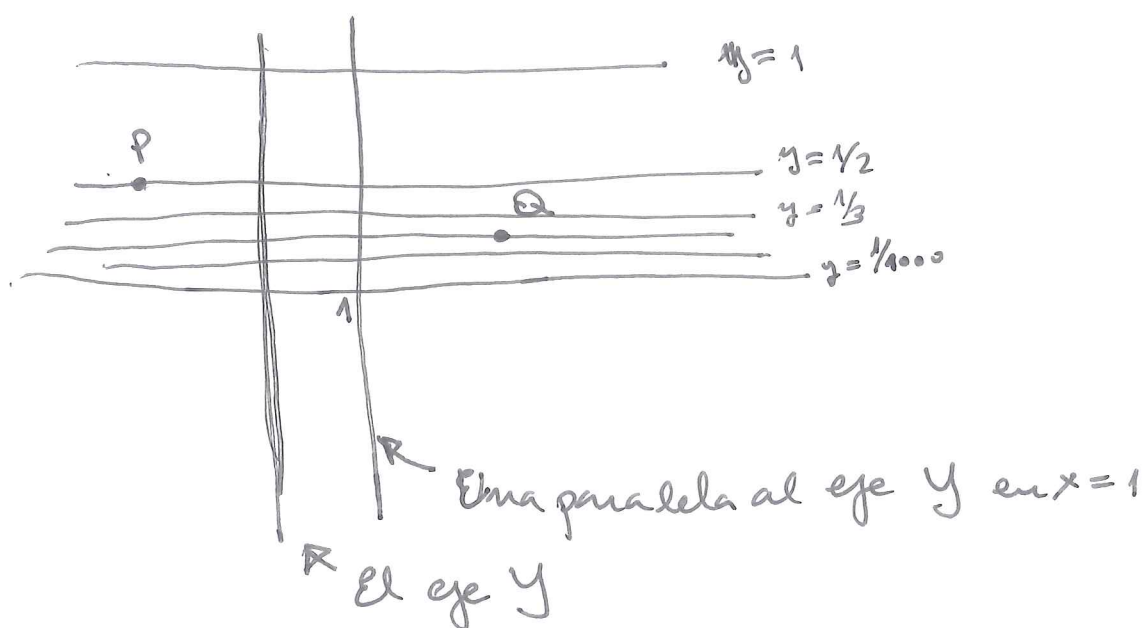
Vamos a hacernos una idea
de cómo son estos conjuntos



M_1 es conexo por arcos. Desde cualquier punto, p , se va al eje X y, luego, desde el eje X , se va hasta el punto Q .

Si M_1 es conexo por arcos $\Rightarrow$

M_1 es conexo

M_2 

M_2 es convexo por arcos. Desde un punto, P , se puede ir hasta el eje Y y desde allí ir a cualquier punto Q .

Si M_2 es convexo por arcos $\Rightarrow$ es convexo

La correcta es la opción $\textcircled{A}$

Pregunta 7

Sea

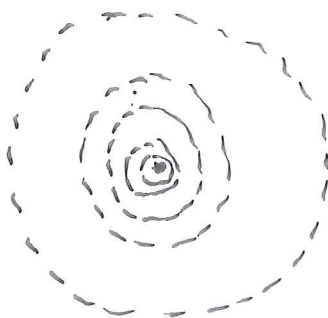
$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 \neq \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}\},$$

Considerando la métrica euclídea. Entonces, elija la o las opciones correctas.

- a) Es abierto
- b) Es cerrado
- c) El interior de H es $H - \{(0, 0)\}$
- d) La adherencia de H es $\overline{H} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

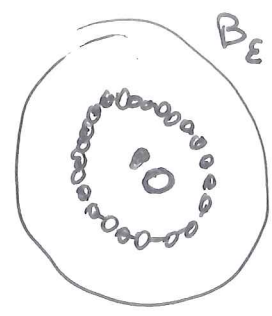
Vamos a hacernos una idea de cómo es el conjunto H

H es todo el plano menos circunferencias concéntricas de radio $\frac{1}{n}$



→ El punto $(0, 0) \in H$, pero no es un punto interior

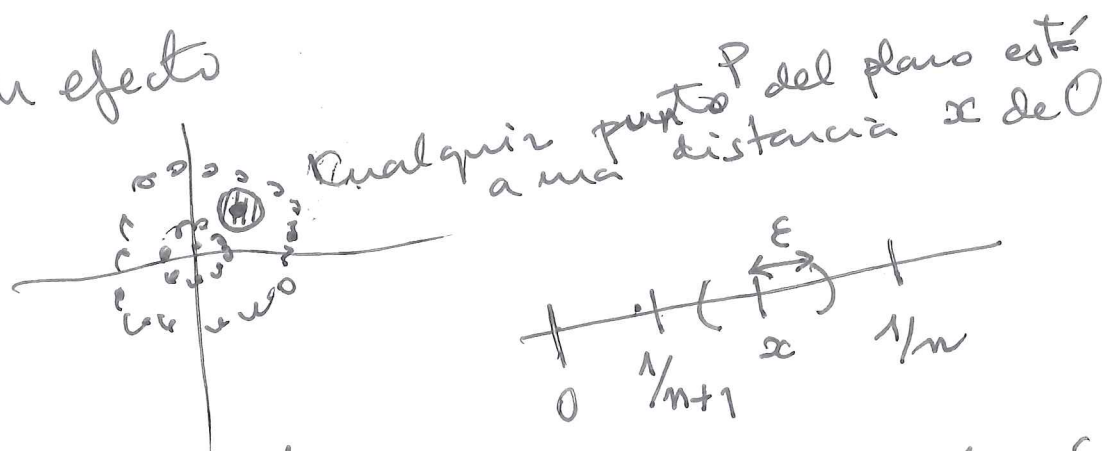
ya que cualquier entorno de cero, $B_\epsilon(0)$,
por muy pequeños que sea, se corta
con una circunferencia de radio $\frac{1}{n} < \epsilon$
(n lo suficientemente grande para que $\frac{1}{n} < \epsilon$)
y, por tanto incluye puntos que no son
de H



→ H no es abierto, porque no todos
sus puntos son interiores. [(0,0) no es interior]

→ Cualquier otro punto de H , que no sea
el (0,0) sí es un punto interior

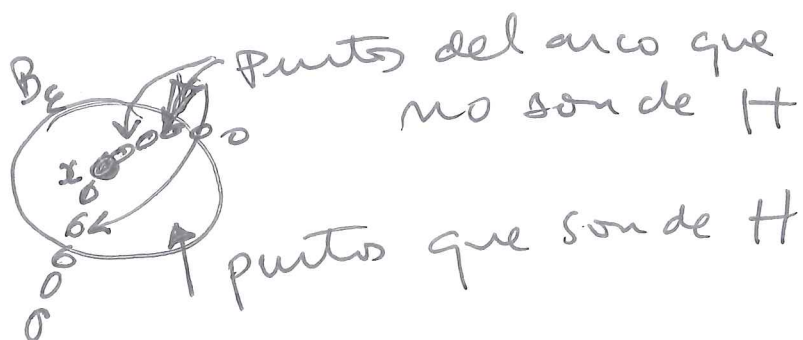
En efecto



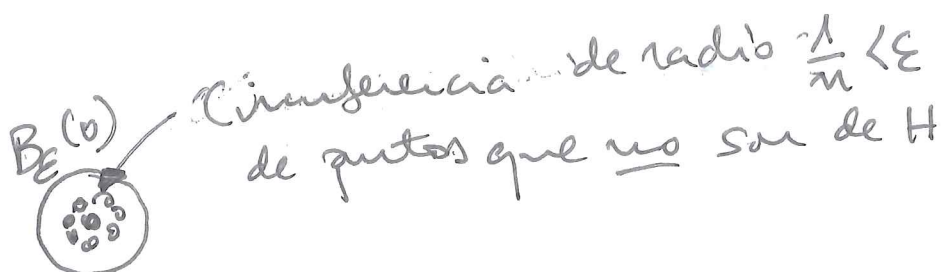
Si $\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}$
Elegimos un entorno de P de radio ϵ
$$\epsilon < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

→ $\text{int}(H) = H - \{(0,0)\}$

→ Todos los puntos de los círculos de radio $\frac{1}{n}$ concentricos son puntos de la frontera



→ El origen es de la adherencia de H



Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \text{Adh}(H) &= \text{int}(H) \cup \text{front}(H) \\ &= \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

La opción correcta ☒ C

Pregunta 8

Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 2} \right)^{n-1}, \frac{e^{n + \frac{3}{n}} + 5}{2e^n} \right)$$

a) $(e, \frac{1}{2})$

b) No existe

c) $(1, 0)$

d) Ninguna de las anteriores

Respuesta El límite es el límite de cada una de las componentes. Es decir,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 2} \right)^{n-1}, \frac{e^{n + \frac{3}{n}} + 5}{2e^n} \right) &= \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 2} \right)^{n-1}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n + \frac{3}{n}} + 5}{2e^n} \right) \end{aligned}$$

Calculamos cada uno de los límites

$$(*) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n - 1}{n^2 + 2} \right)^{n-1} = 1^\infty \quad \left[\text{es un límite del número } e \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 2} + \frac{n-3}{n^2 + 2} \right)^{n-1} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+1}{n-3}} \right)^{\frac{n^2+1}{n-3}} \right]^{\frac{n-3}{n^2+1} (n-1)} =$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)(n-1)}{n^2+1}} = e^1 = e$$

$$(*) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n + \frac{3}{n}} + 5}{2e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{n^2+3}{n}} + 5}{2e^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n \cdot e^{\frac{3}{n}} + 5}{2e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{e^n e^{\frac{3}{n}}}{2e^n} + \frac{5}{2e^n} \right) =$$

$\downarrow$
0

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{3}{n}}}{2} = \frac{1}{2}$$

la opción correcta es (A)

pregunta 9

Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n}{n^2 - n}, \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \right)$$

a) (1, 1)

b) No existe

c) (1, 0)

d) Ninguna de las anteriores

Es semejante a la pregunta anterior. Se estudian los límites de cada componente

~~✗~~ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{n^2 - n} = 1$

~~✗~~ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{n}} =$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

La respuesta correcta es A

Pregunta 10

Sea la función, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{\sin^3(x)}{x^2 + y^2}$$

Entonces elija la opción o las opciones correctas

- a) Es continua en su dominio de definición
- b) Se puede definir para que sea continua en $(0, 0)$
- c) No se puede redefinir para que sea continua en $\mathbb{R}^2$
- d) ninguna de las anteriores

Teorema

Si existe límite $\Rightarrow$ Existe límite por cualquier camino

(La recíproca, $\Leftarrow$, No es cierta)

Definición de límite

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = y_0 \Leftrightarrow$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que

si $0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$ entonces $|f(\vec{x}) - y_0| < \varepsilon$

Definición

f es continua en $\vec{x}_0$ si

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$$

(23)

Estudiamos la función f

$\rightarrow$ La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. No está definida en $(0,0)$. Su dominio es $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

La función no está definida en $(0,0)$

por tanto, no es continua en $(0,0)$.

Pero sí es continua en su dominio.
Vamos a ver si existe

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$$

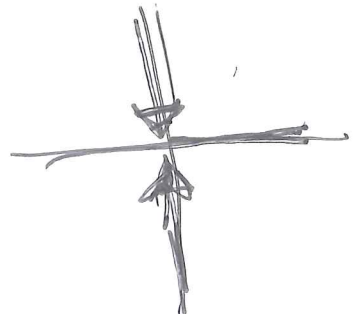
Primero miramos si existe
por algunos caminos especiales

Por el eje $x=0$, $y \in \mathbb{R}$

Si $x=0$ el numerador siempre es 0

por tanto

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0,y) = 0$$

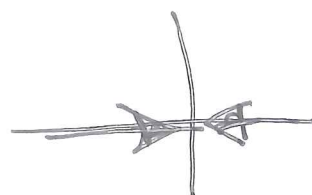


De aquí deducimos que, de existir el límite, tiene que ser 0

Veamos cuando vale el límite por otro camino. Cuando $y=0$.

la función vale

$$f(x, 0) = \frac{\sin^3(x)}{x^2}$$



cuando ~~x~~ es próximo a $x \approx 0$

$$\frac{\sin(x)}{x} \approx 1 \quad (\text{infinitésimos equivalentes})$$

$$\frac{\sin^3(x)}{x^2} \approx \frac{\sin^2(x)}{x^2} \cdot \sin(x) \approx \sin(x) \rightarrow 0$$

Esto nos refuerza la idea de que el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

Vamos a demostrarlo.

Se hace el cambio a coordenadas polares

(25)

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sin^3(\rho \cos \theta)}{\rho^2} = \frac{0}{0} \quad \underline{[*]}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2(\rho \cos \theta) \cdot \cos(\rho \cos \theta) \cos(\theta)}{2\rho} =$$

↑ Regla de L'Hopital
↑ Regla de L'Hopital

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{6 \sin(\rho \cos \theta) \cos^2(\rho \cos \theta) \cos^2 \theta - 3 \sin^2(\rho \cos \theta) \sin(\rho \cos \theta) \cos^2 \theta}{2} =$$

$$= 0$$

También se puede hacer el cálculo más fácilmente

[*] Usando infinitesimos equivalentes en las proximidades de $\rho = 0$

$$\sin(\rho \cos \theta) \approx \rho \cos \theta$$

$$[*] \approx \frac{\rho^3 \cos^3 \theta}{\rho^2} \approx \rho \underbrace{\cos^3(\theta)}_{\text{está acotado}} \rightarrow 0$$

Luego la opción correcta es (A) y (B)

Pregunta 11

La función dada por $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \frac{y^3 + x^4}{x^2 + y^2}$$

definida en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ es

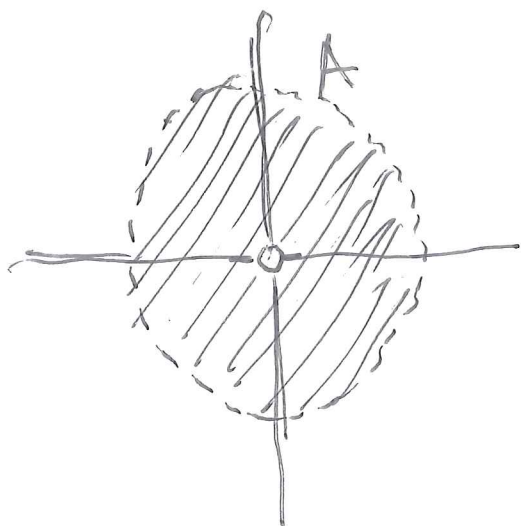
a) Continua en A , pero no uniformemente continua

b) Discontinua en A

c) Uniformemente continua

d) Ninguna de las anteriores

El conjunto A es el interior de un círculo de radio 1 excepto el origen



La función f está definida en todos los puntos de A

y es continua en todos los puntos de A

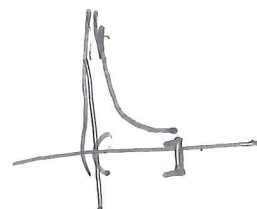
ya que es cociente de funciones continuas que no anulan el denominador

Dada una función $y=f(x)$,
continuidad en un punto x_0 significa
que dado un ε se puede elegir un
 δ_{x_0} tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
Continuidad en un conjunto A significa
continuidad en cada uno de los puntos
de A .

La continuidad uniforme en un
conjunto significa que dado ε
se puede elegir un δ que vale para
todos los $x \in A$.

Ejemplo, la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y = \frac{1}{x}$$



es continua en $A = (0, 1]$, pero
no es uniformemente continua en A

Definición La función f se dice que
es uniformemente continua en A si

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que, $\forall x_1, x_2 \in A$ se
verifica que si $|x_1 - x_2| < \delta$ entonces
 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

(En la continuidad uniforme ~~de~~ 28
un ϵ el δ vale para todas las x de A)

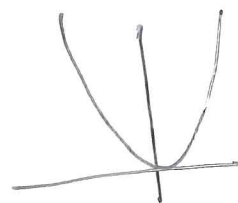
Teorema.

Si A es un conjunto compacto (cerrado y acotado)

f es continua en $A \Rightarrow f$ es uniformemente continua en A

Ejemplo $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$y = x^2$$



Es continua en $\mathbb{R}$, pero no
uniformemente continua en $\mathbb{R}$

Peró sí es uniformemente
continua en $[0, 1]$ porque
 $[0, 1]$ es cerrado y acotado

Para demostrar que f es uniforme-
mente continua en A vamos
a utilizar este artificio

Vamos a considerar una función $\bar{f}$ definida en

$$\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 1\}$$

de la siguiente manera

$$\bar{f}(x, y) = f(x, y)$$

si $(x, y) \in A$

$$\bar{f}(x, y) = \frac{y^3 + x^4}{x^2 + y^2}$$

si (x, y) pertenece a $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$

$$\bar{f}(0, 0) = 0$$

$\bar{f}$ es continua en A ya que

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y^3 + x^4}{x^2 + y^2} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^3 \sin^3 \theta + \rho^4 \cos^4 \theta}{\rho^2}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \sin^3 \theta + \rho^2 \cos^4 \theta = 0$$

Si $\bar{f}$ es continua en $\bar{A}$ es uniformemente continua en $\bar{A}$ (ya que $\bar{A}$ es compacto)

luego dado un ϵ , hay un δ que vale para todos los puntos de $\bar{A}$, en particular para $A \subset \bar{A}$.

y completa la demostración que $\bar{f}$ estendida a A es f

la opción correcta es (C)

Pregunta 12

La función dada por

$$f(x,y) = \frac{y^3 + x^4}{x^2 + y^2}$$

definida en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } 0 < x^2 + y^2 < 1\}$

es

a) Continua en A

b) Discontinua en A

c) Se puede definir en $(0,0)$ para que sea continua en $A \cup \{(0,0)\}$

d) Alcanza sus extremos absolutos en $\bar{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 1\}$

e) Ninguna de las anteriores

Respuesta Este ejercicio es continuación del anterior. Para contestar el apartado d) basta considerar el teorema

Teorema Si K es un conjunto compacto y $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ es función continua en K , entonces f alcanza su máximo y su mínimo en K .
Son ciertos (A) (C) y (D)

Pregunta 13

Sea $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

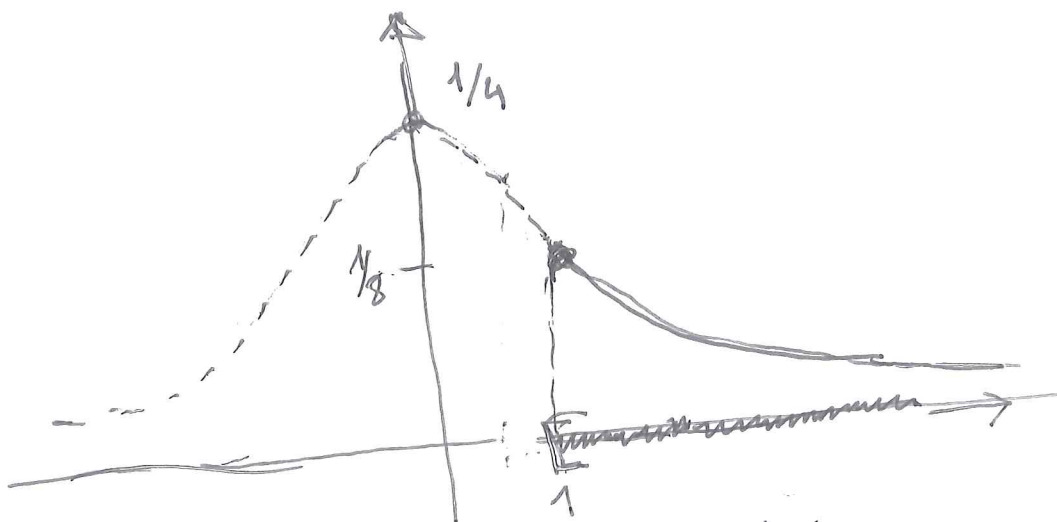
dada por

$$f(x) = \frac{1}{4(1+x^4)}$$

Entonces elija la o las opciones correctas

- a) Es lipschitziana para $k = \frac{1}{4}$
- b) Es lipschitziana para $k = \frac{1}{2}$
- c) Tiene un punto fijo para $k = \frac{1}{2}$
- d) Ninguna de las anteriores

Respuesta Vamos a representar la función $y = f(x)$



Es una función que es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$

Definición Una aplicación $f: E \rightarrow F$ entre espacios métricos es LIPSCHITZIANA de razón $k > 0$ si

$$|f(x) - f(y)| < k |x - y|$$

$$\forall x, y \in E$$

Si $0 < k < 1$ se dice que la aplicación f es CONTRACTIVA.

Teorema del punto fijo

Dado E, F dos espacios métricos completos
Si $f: E \rightarrow F$ es una aplicación contractiva, entonces f tiene un único punto fijo tal que

$$f(p) = p$$

Recordemos el teorema del valor medio para funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Si f es derivable en Ω , $\forall x, y \in \Omega$

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y), \quad \text{donde}$$

en donde $\xi \in (x, y)$

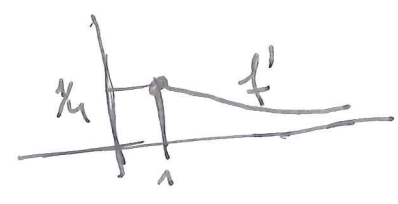
de donde $|f(x) - f(y)| \leq |f'(z)| |x - y|$

(33)

Vamos a utilizar el teorema del valor medio para demostrar que es Lipschitziana.

Vamos a ver que en $x \in [1, \infty)$ la derivada de f no sobrepasa un valor.

$$f(x) = \frac{1}{4} (1+x^4)^{-1}$$
$$f'(x) = \frac{1}{4} \frac{(-1)}{(1+x^4)^2} \cdot (4x^3) = \frac{-x^3}{(1+x^4)^2}$$

$$|f'(x)| = \left| \frac{x^3}{(1+x^4)^2} \right|$$


Vamos a comprobar que la función $f'(x)$ es decreciente en $x \in [1, \infty)$ con lo cual $f'(x) < f'(1) = \frac{1}{4}$

$$f'(x) < f'(1) = \frac{1}{4}$$

Para ver que f' es decreciente estudiamos su derivada, es decir f''

$$f''(x) = \left(\frac{x^3}{(1+x^4)^2} \right)' =$$

$$= \frac{3x^2(1+x^4)^2 - 2x^3(1+x^4) \cdot 4x^3}{(1+x^4)^4} =$$

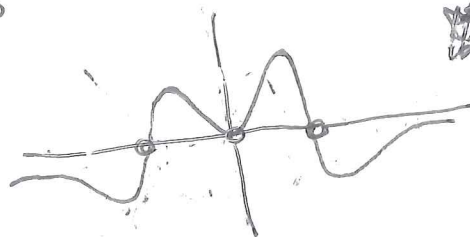
$$= \frac{3x^2(1+x^4) - 8x^6}{(1+x^4)^3} =$$

$$= \frac{3x^2 + 3x^6 - 8x^6}{(1+x^4)^3} = \frac{3x^2 - 5x^6}{(1+x^4)^3} =$$

$$= \frac{x^2(3-5x^4)}{(1+x^4)^3}$$

Esta función se anula para $x=0$

$$y \text{ } x = \sqrt[4]{\frac{3}{5}} = \pm 0,88$$

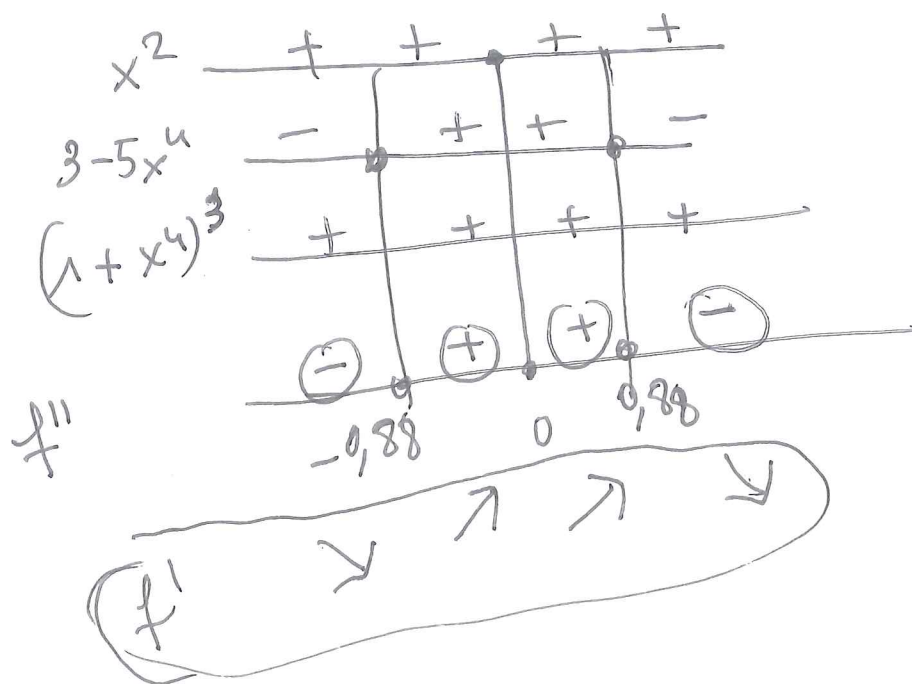


Para $x \in [1, \infty)$ f'' es negativa

por lo que f' decrece

Estudio del signo de f''

35



En conclusión

$$\forall x, y \in [1, \infty)$$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{4} |x - y|$$

Es decir f es una función Lipschitziana de razón $k = \frac{1}{4}$. Pero como $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$,

Entonces

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} |x - y| \leq \frac{1}{2} |x - y|$$

y, por tanto, también es Lipschitziana de razón $\frac{1}{2}$.

¿Existirá un punto fijo, tal que
 $f(p) = p$?

Es decir, ¿hay solución de la
 ecuación

$$\frac{1}{4(1+x^4)} = x \quad ?$$

Desarrollando esta ecuación
 $1 = 4x(1+x^4)$

$$4x^5 + 4x - 1 = 0$$

¿Tiene solución única en $[1, \infty)$?

En este caso no podemos aplicar el
 teorema del punto fijo ya que

El intervalo $[1, \infty)$ no se transforma por f en $[1, \infty)$.

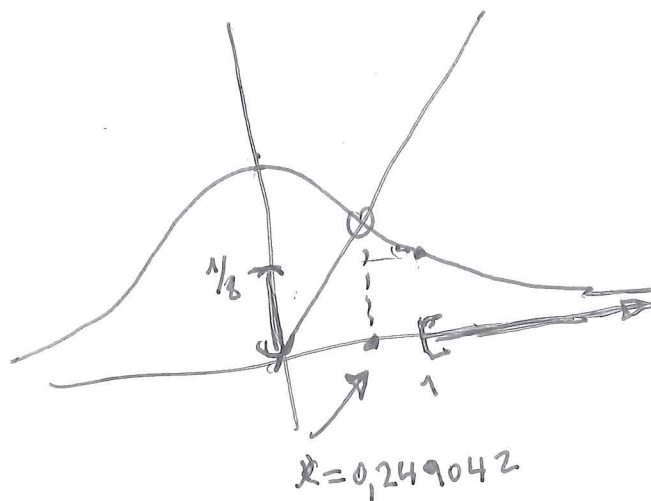
De hecho $f([1, \infty)) = [\frac{1}{8}, 0)$

La solución de

$$\frac{1}{4(1+x^4)} = x$$

es la intersección de las gráficas

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4(1+x^4)} \\ y = x \end{cases}$$



Las opciones correctas son **A** y **B**

pregunta 14

Sea

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin(\sqrt{x})$$

definida en el intervalo $[1, 2]$.

Elija la o las opciones correctas.

- a) Es lipschitziana, pero no contractiva
- ☒ b) Es contractiva de razón $\frac{1}{4}$
- ☒ c) Es contractiva de razón $\frac{1}{2}$
- d) Ninguna de las anteriores

Respuesta: Se aplican el teorema del valor medio $\forall x, y \in [1, 2]$

$$|f(x) - f(y)| < |f'(\xi)| |x - y|$$

$$\xi \in (1, 2)$$

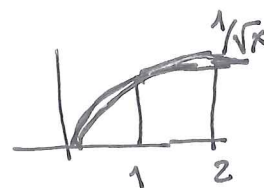
Calculamos f'

$$f'(\xi) = \frac{1}{2} \cos(\sqrt{\xi}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{\xi}} = \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \cos(\sqrt{\xi})$$

(varía entre -1 y 1)

$$|f'(\xi)| \leq \frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{\xi}} \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{1}} = \frac{1}{4}$$

(una fracción es más grande cuando el denominador es pequeño)



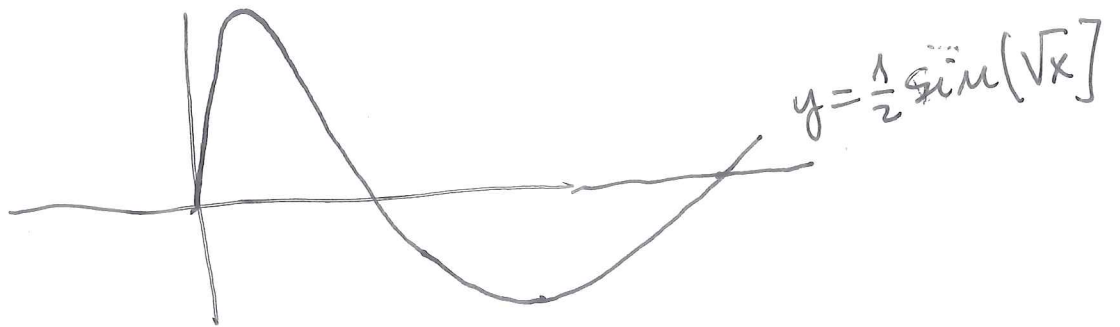
Por consiguiente

$$\forall x, y \in [1, 2]$$

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{4} |x - y|$$

Es aplicación contractiva de razón

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{4} |x - y|$$



Las opciones correctas son **B** y **C**

Pregunta 15

Sea $C[0,1]$ con la norma del máximo. Se define la aplicación lineal $\phi: E \rightarrow E$ como

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) t \, dt$$

Indique la o las respuestas INCORRECTAS

a) ϕ es lipschitziana en E (Verdad)

b) ϕ es continua en E (Verdad)

c) $\|\phi\| = 1$ Falsa

d) $\|\phi\| = \frac{1}{2}$ (Verdad)

Respuesta

Repasamos algunos conceptos sobre espacios NORMADOS

En un espacio vectorial E se llama norma $\|\cdot\|$ a una aplicación $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

$$a) \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$b) \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

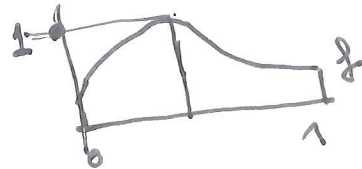
$$c) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Ejemplo: en $\mathbb{R}^2$ es una norma

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$$

Si consideramos el espacio $\mathcal{C}[0,1]$ de las funciones continuas en $[0,1]$ son ejemplos de normas

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(t)\|, t \in [0,1]\}$$



$$\|f\|_\infty = 1$$

$$\|f\| = \int_0^1 f^2(t) dt$$

Nuevos espacios normados a partir de un espacio normado

Sea $\Phi: X \rightarrow Y$ es una aplicación lineal entre espacios normados.

El espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ es el espacio de las transformaciones lineales $\Phi: X \rightarrow Y$

$$\|\Phi\| = \sup \left\{ \frac{\|\Phi x\|}{\|x\|} \mid x \in X, x \neq 0 \right\}$$

$$= \sup \{ \|\Phi(x)\| \mid \text{si } \|x\|=1 \}$$

Φ transforma la bola unidad en X en la bola de radio $\|\Phi\|$ en Y

(42)

$$\Phi : C[0,1] \rightarrow C[0,1]$$

$$f \longmapsto \Phi f$$

La aplicación $\Phi f \in C[0,1]$ se define así

$$\Phi f(x) = \int_0^x f(t) t \, dt$$

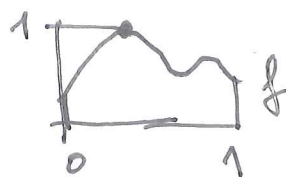
Φ es una aplicación lineal

$$\Phi \in L(C[0,1], C[0,1])$$

Vamos a calcular $\|\Phi\|_\infty$

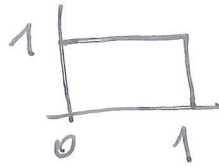
$$\|\Phi\|_\infty = \sup \{ \|\Phi f\| \mid \text{cuando } \|f\|_\infty = 1 \}$$

Las funciones f que $\|f\|_\infty = 1$ son las funciones que tienen un valor máximo 1



El valor máximo de $\Phi(f)$ se obtiene de las f que tienen $\|f\|_\infty = 1$ se obtiene cuando

$$f \equiv 1$$



para las funciones $\|f\|_\infty = 1$

$$|\Phi(f)| = \left| \int_0^\alpha f(t) t dt \right| \leq \int_0^\alpha \underbrace{|f(t)|}_{\text{es como}} t dt$$

máximo 1

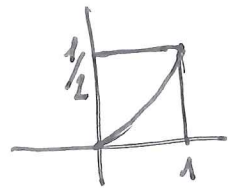
$$\leq \int_0^\alpha t dt = \frac{\alpha^2}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\|\Phi\|_\infty = \sup \{ \|\Phi f\| \text{ cuando } \|f\|_\infty = 1 \}$$

$$\leq \frac{1}{2}$$

Como para la función constante $f(t) = 1 \quad \forall t \in [0, 1]$

$$\Phi(1) = \int_0^1 t dt = \frac{1^2}{2}$$



$$\|\Phi(1)\|_\infty = \frac{1}{2}$$

$$\text{Con lo cual } \|\Phi\|_\infty = \frac{1}{2}$$

con lo cual c) es falsa

Vamos a estudiar si Φ es
lipschitziana

$$¿ \| \Phi(f) - \Phi(g) \|_{\infty} \leq k \| f - g \|_{\infty} ?$$

Por ser Φ lineal

$$¿ \| \Phi(f - g) \|_{\infty} \leq k \| f - g \|_{\infty} ?$$

Teniendo en cuenta que los espacios normados

$$\| \Phi x \| = \| \Phi \| \| x \|$$

Está claro que Φ es lipschitziana de
razón $k = \| \Phi \|_{\infty} = \frac{1}{2}$

Por otra parte Φ es continua porque
las aplicaciones lineales son continuas.

Pregunta 16

Considérese en $\mathbb{R}^2$ con la norma euclídea que viene dada por $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. El conjunto

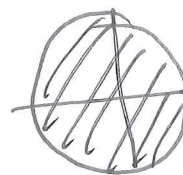
$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \|(x, y)\| \leq 2\}$$

coincide con

- a) El círculo centrado en 0 y radio 2
- b) $[-2, 2] \times [-2, 2]$
- c) El círculo centrado en 0 y radio 4
- d) Ninguna de las anteriores

Respuesta

$M = \{(x, y) \text{ tal que } x^2 + y^2 \leq 4\}$
que es el círculo de radio 2
centrado en el origen



La opción correcta es **(A)**

Pregunta 18

Consideramos en espacio de las funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$, $C[0, 1]$, el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

para $f, g \in C[0, 1]$. Elija la o las opciones correctas

a) El producto escalar no proviene de una norma

b) Las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 3x - 2$ son ortogonales con este producto escalar

c) Las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 3x^2 - 2x$ son ortogonales con este producto escalar

d) Ninguna de las anteriores

a) No tiene sentido

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \langle f, g \rangle &= \int_0^1 x(3x-2) dx = \int_0^1 (3x^2 - 2x) dx = \\ &= \left[x^3 - x^2 \right]_0^1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow f \perp g \end{aligned}$$

$$c) \langle f, g \rangle = \int_0^1 x(3x^2 - 2x) dx = \int_0^1 (3x^3 - 2x^2) dx =$$

$$= \left[\frac{3}{4} x^4 - \frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

no son ortogonales

ESPACIOS CON PRODUCTO ESCALAR



ESPACIO CON NORMA



ESPACIO CON DISTANCIA

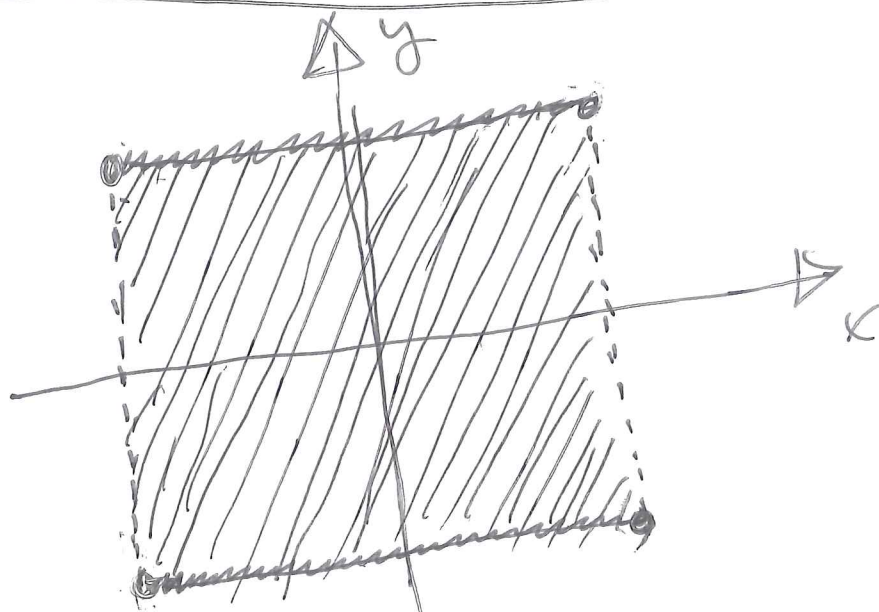
Observación en un mismo espacio
podemos considerar diferentes
~~productos~~ escalares, normas, distancias

Junio 2018] (preguntas cortas)

En $\mathbb{R}^2$, determine el interior, frontera y clausura del conjunto

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |x| < 1, |y| \leq 1\}$$

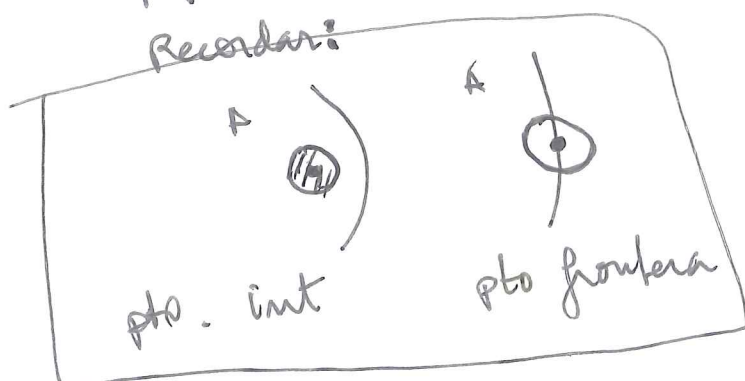
Razone si R es un conjunto abierto, cerrado, acotado y/o compacto



El conjunto R se puede describir como

$$R = (-1, 1) \times [-1, 1]$$

Recordar:



$$\text{Int}(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |x| < 1, |y| < 1\}$$

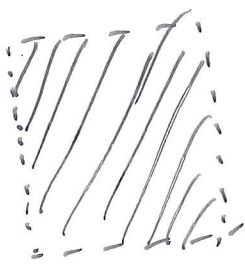
$$= (-1, 1) \times (-1, 1)$$

$$\text{fr}(R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |x| = 1, |y| \leq 1\}$$

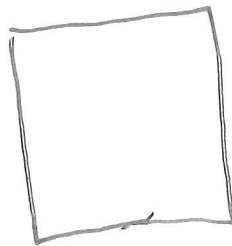
$$\cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |y| = 1, |x| \leq 1\}$$

$$\text{cl}(R) = \text{Int}(R) \cup \text{fr}(R) =$$

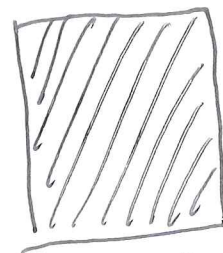
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$



$\text{int}(R)$



$\text{fr}(R)$



$\text{cl}(R)$

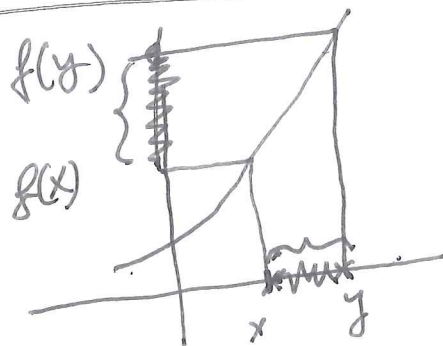
no es abierto
no es cerrado
sí es acotado
no es compacto

Septiembre 2018

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva
y sea $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ la aplicación
definida por

$$d(x, y) \rightarrow |f(x) - f(y)|$$

Pruebe que $\underline{d}$ es una distancia en $\mathbb{R}$



Estudiamos si $\underline{d}$
cumple las propiedades de distancia

$$(1) \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

$\uparrow$
 f inyectiva

Recordar:

Se dice que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva

$$\text{si } f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$$

$$(2) \quad d(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y, x)$$

$$(3) \quad d(x, z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \leq \\ \leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x, y) + d(y, z)$$

Junio 2019

Sea $d_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$d_\alpha(x, y) = |x^\alpha - y^\alpha|$$

donde $\alpha \in \mathbb{N}$. Estudie en función del parámetro α , si d_α define una distancia.

veamos si se cumplen las propiedades
 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$(1) \quad d_\alpha(x, x) = |x^\alpha - x^\alpha| = 0$$

Pero

Si α es par d no es distancia
 ya que

$$d_\alpha(x, -x) = |x^\alpha - (-x)^\alpha| = 0$$

siendo $x \neq -x$

Si α es impar d si es distancia

$$d_\alpha(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x^\alpha - y^\alpha| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = y$$

Las otras propiedades de distancia

$$(2) d_x(x, y) = |x^x - y^x| = |y^x - x^x| = d_x(y, x)$$

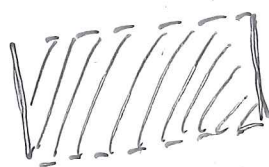
$$(3) d_x(x, z) = |x^x - z^x| = |x^x - y^x + y^x - z^x| \leq \\ \leq |x^x - y^x| + |y^x - z^x| = d_x(x, y) + d_x(y, z)$$

Septiembre 2019

Escriba un ejemplo del conjunto $\mathbb{R}^2$ que no sea ni abierto ni cerrado con la métrica euclídea

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es abierto si $A = \text{int}(A)$ y es cerrado si $A = \text{cl}(A)$. Por tanto, debemos encontrar un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que $A \neq \text{int}(A)$ y $A \neq \text{cl}(A)$.

Un ejemplo



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |x| \leq 2, |y| < 1\}$$

Otro ejemplo



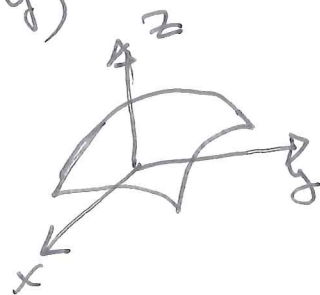
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$$

Estudiar la continuidad de la función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

La función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar: A cada punto del plano le corresponde un escalar (por ejemplo, una temperatura, un potencial, ...)

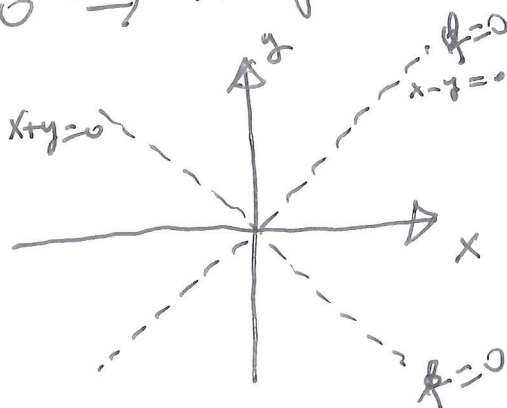
Se puede visualizar como una superficie $z = f(x, y)$ en el espacio



Curvas de nivel

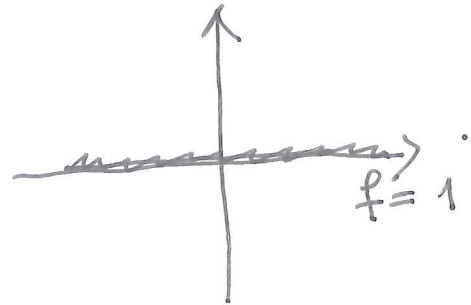
① $f(x, y) = 0$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (x + y)(x - y) = 0$$



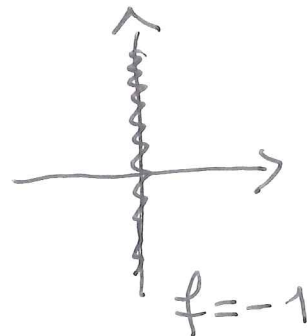
$$(*) \quad f(x, y) = 1$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

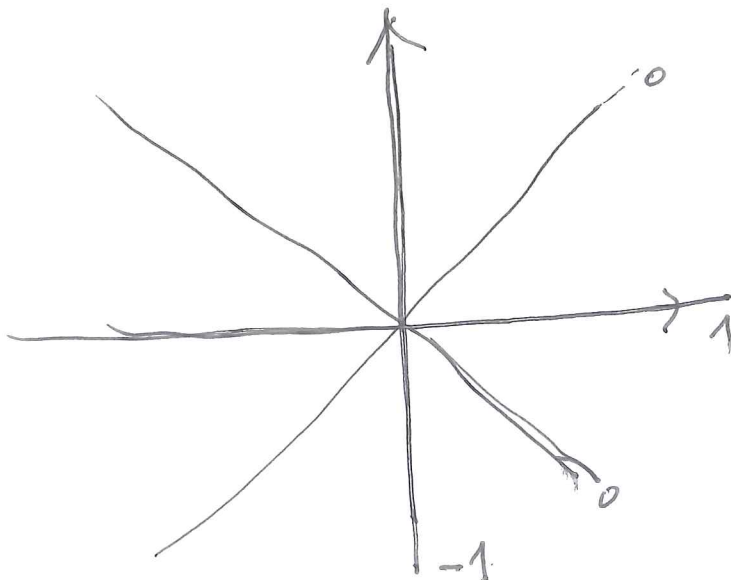


$$* \quad f(x, y) = -1$$

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = -x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$



Las curvas de nivel de $z = f(x, y)$



La función $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ es

continua en los puntos $(x,y) \neq (0,0)$
ya que es cociente de continuas que no anula el denominador

La función $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ~~no~~
está definida en $(x,y) = (0,0)$ ya
que se anula el denominador

No existe el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

ya que el límite de la función
es distinto, según nos aproximemos
al origen por distintos caminos

Recordar:

LÍMITE $\Rightarrow$ LÍMITE POR CAMINOS
IGUALES

(La hipótesis no es cierta)

PROBLEMA (21)

Estudie los siguientes límites

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x(e^x - 1)}{x^2 + y^2}$$

$$(b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^4}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2 + 9x^3 y}{x^2 + y^2}$$

Respuestas

LÍMITE $\Rightarrow$ LÍMITES SON IGUALES
POR TODOS LOS CAMINOS

LÍMITE $\Rightarrow$ LÍMITES ITERADOS
SON IGUALES

(las implicaciones recíprocas no son
ciertas)

a) Estudiamos el límite $(x, y) \rightarrow (0, 0)$
 Si vamos por el camino $x=0$

$$\frac{x^2(e^x - 1)}{x^2 + y^2} \xrightarrow[\uparrow x=0]{} \frac{0}{y^2} \rightarrow 0$$

Si vamos por el camino $y=0$

$$\frac{x^2(e^x - 1)}{x^2 + y^2} \xrightarrow[\uparrow y=0]{} \frac{x^2(e^x - 1)}{x^2} \Rightarrow e^x - 1 \rightarrow 0$$

De existir el límite tiene que ser 0

$$\left| \frac{x^2(e^x - 1)}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \left| \frac{x^2(e^x - 1)}{x^2} \right| \leq |e^x - 1|$$

Esta cantidad
 se puede
 hacer
 arbitrariamente
 pequeña
 tomando x lo suficiente-
 mente cerca de 0

$$b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^4}$$

Vamos a estudiar el límite por diferentes caminos

Cuando $x=0$ (eje y)

$$\frac{xy}{x^2+y^4} \xrightarrow{x=0} 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ya que el} \\ \text{numerador} \\ \text{siempre es 0} \\ \text{en el eje } y \end{array} \right)$$

Cuando $y=0$ (eje x)

$$\frac{xy}{x^2+y^4} \xrightarrow{y=0} 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{ya que el} \\ \text{numerador} \\ \text{siempre es 0} \\ \text{en el eje } x \end{array} \right)$$

Cuando $y=x$ (diagonal del 1º cuadrante)

$$\frac{xy}{x^2+y^4} \rightarrow \frac{x^2}{x^2+x^4} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} \rightarrow 1$$

Como el límite es diferente según el camino por el que nos aproximamos a $(0,0)$ resulta que el límite no existe

En general si vamos por el camino

$$y = mx$$

$$\frac{xy}{x^2 + y^4} \xrightarrow{y=mx} \frac{mx^2}{x^2 + m^4 x^4} \rightarrow \frac{m}{1 + m^4 x^4} \rightarrow m$$

(c) ¿los límites por diferentes caminos son iguales?

si vamos por el camino $x=0$

$$\frac{x^2 y^2 + 9x^3 y}{x^2 + y^2} \xrightarrow{x=0} \frac{0}{y^2} \rightarrow 0$$

(el numerador siempre es 0)

si vamos por el camino $y=0$

$$\frac{x^2 y^2 + 9x^3 y}{x^2 + y^2} \xrightarrow{y=0} \frac{0}{x^2} \rightarrow 0$$

(El numerador siempre es 0)

si vamos por el camino $x=y$

$$\frac{x^2 y^2 + 9x^3 y}{x^2 + y^2} \xrightarrow{x=y} \frac{x^4 + 9x^4}{2x^2} \rightarrow 5x^2 \rightarrow 0$$

Junio 2018 (preguntas cortas)

Escriba un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ un conjunto cerrado y no compacto

Recordemos que en $\mathbb{R}^n$

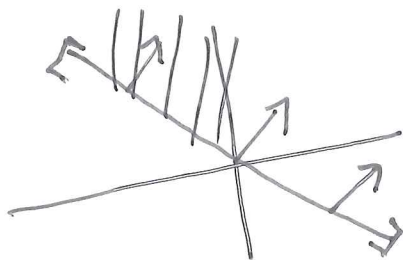
compacto $\Leftrightarrow$ cerrado y acotado

Por consiguiente hay que dar un ejemplo de conjunto cerrado que sea no acotado

Recordar: Cerrado $\equiv$ complementario abierto

Un ejemplo sería un semiplano cerrado. Por ejemplo

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } x + y \geq 0\}$$



Intentaremos demostrar que

(61)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2 + 9x^3 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Para ello, usamos la regla del sandwich:

$$0 \leq \left| \frac{x^2 y^2 + 9x^3 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{|x^2(y^2 + 9xy)|}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x^2 |y^2 + 9xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2) |y^2 + 9xy|}{x^2 + y^2} =$$

Si se aumenta
el numerador
se aumenta
el cociente

$$= |y^2 + 9xy| \leq \underbrace{|y^2|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|9xy|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$