

Ecuaciones Diferenciales

(parte 1ª) (corregida)

MOTIVACIÓN

y

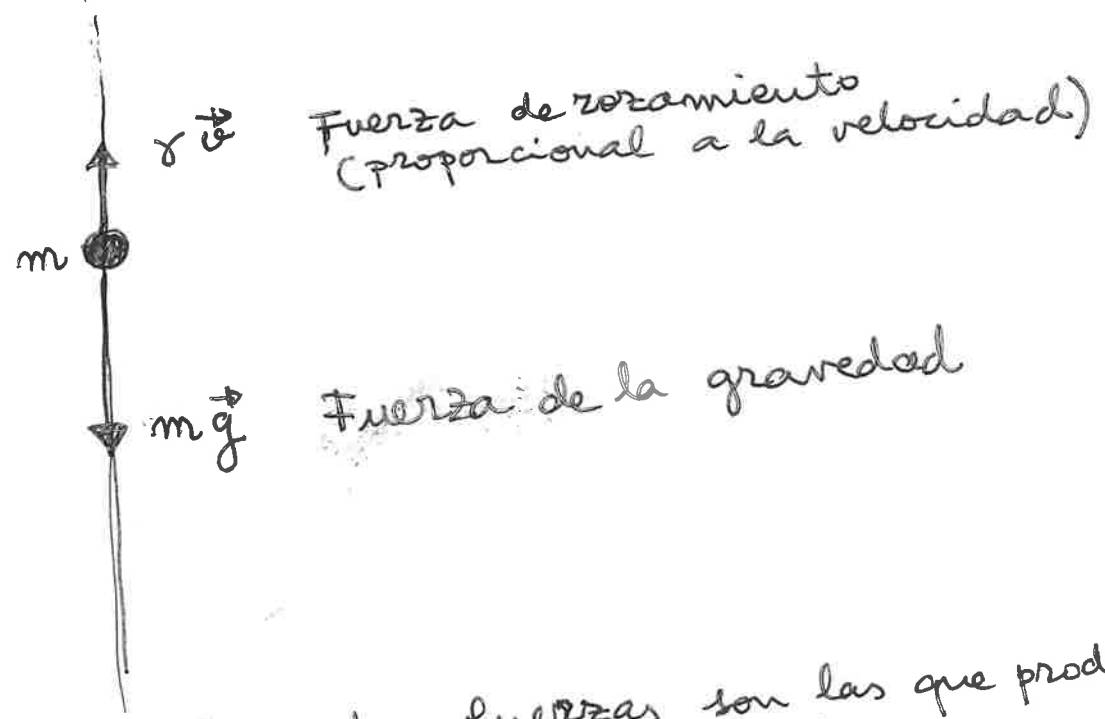
Ecuaciones de 1^{er} orden

allave@madrid.uned.es

MOTIVACIÓN

Muchos fenómenos se modelizan mediante ecuaciones diferenciales

■ EJEMPLO 1: Caida de un cuerpo con rozamiento



Ley de Newton: Las fuerzas son las que producen una variación de la velocidad
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\begin{cases} m \frac{dv}{dt} = 9,8m - \gamma v \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

← Ecuación diferencial de 1^{er} orden en v

← condición inicial

PROBLEMA de CAUCHY

Solución mediante "cuadraturas"
(método de separación de variables)

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{\gamma}{m} v$$

$$\frac{1}{9,8 - \frac{\gamma}{m} v} dv = dt$$

$$\int \frac{1}{9,8 - \frac{\gamma}{m} v} dv = \int dt$$

Hallamos las correspondientes primitivas de ambos miembros

$$\int \frac{1}{9,8 - \frac{\gamma}{m} v} dv \stackrel{\downarrow}{=} -\frac{m}{\gamma} \int \frac{1}{u} du = -\frac{m}{\gamma} \ln(u)$$

$$\begin{cases} u = 9,8 - \frac{\gamma}{m} v \\ du = -\frac{\gamma}{m} dv \\ dv = -\frac{m}{\gamma} du \end{cases}$$

Cambio de variable

$$= -\frac{m}{\gamma} \ln \left(9,8 - \frac{\gamma}{m} v \right)$$

$$\int dt = t + C$$

Iguando

$$-\frac{m}{\gamma} \ln \left(9,8 - \frac{\gamma}{m} v \right) = t + C$$

$$\ln \left(9,8 - \frac{\gamma}{m} v \right) = -\frac{\gamma}{m} t + C$$

comentario
Las constantes de integración las representamos con la misma letra C, No representan una cantidad concreta sino que significan que son la misma primitiva

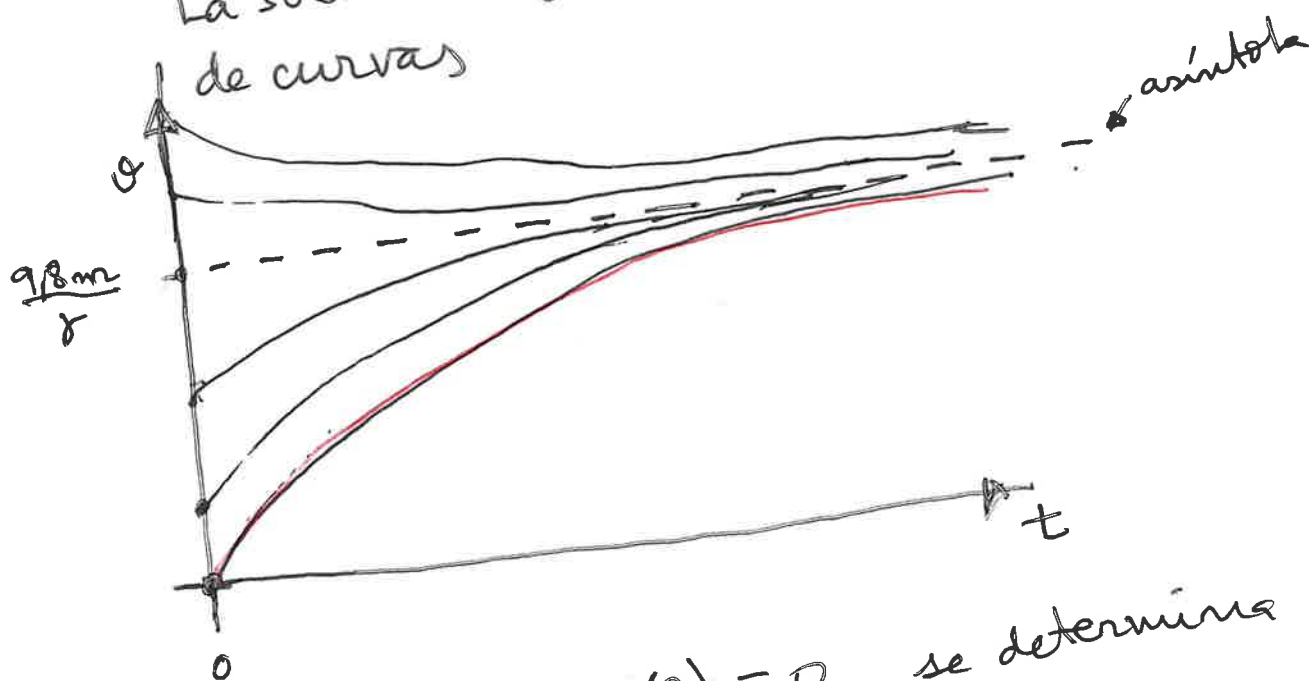
$$9,8 - \frac{\gamma}{m} v = C e^{-\frac{\gamma}{m} t}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{m} v = C e^{-\frac{\gamma}{m} t} - 9,8$$

$$v = C e^{-\frac{\gamma}{m} t} + \frac{9,8 m}{\gamma}$$

Solución general
de la ecuación
Para cada valor
de C obtenemos
una solución

La solución general es una familia



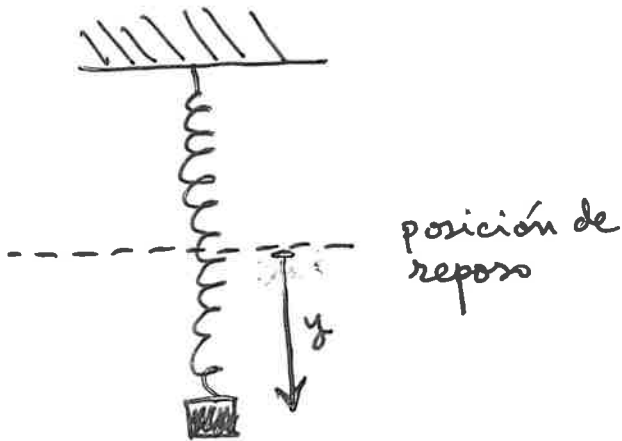
Para el dato inicial $v(0) = 0$ se determina el valor de C

$$v(0) = C + \frac{9,8 m}{\gamma} \Rightarrow C = - \frac{9,8 m}{\gamma}$$

$$\Rightarrow v = - \frac{9,8 m}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m} t} + \frac{9,8 m}{\gamma} = \boxed{\frac{9,8 m}{\gamma} [1 - e^{-\frac{\gamma}{m} t}]}$$

solución del problema de Cauchy

EJEMPLO 2: Oscilador armónico



• Fuerza de recuperación

$$-ky$$

(k positivo)

• La fuerza del peso de la masa no actúa porque se cancela con la reacción del soporte del muelle

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -ky$$

$$\boxed{m \ddot{y} + ky = 0}$$

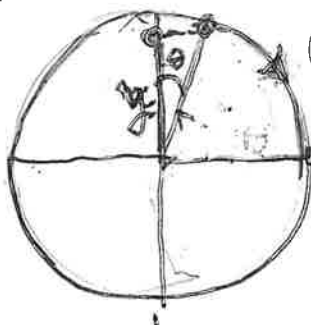
Ecuación del oscilador armónico

Esta es una ecuación de 2º orden

El problema de Cauchy hay que añadir dos condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = v_0 \end{cases}$$

La solución es el Movimiento armónico simple



(proyección sobre el eje de una rotación con velocidad angular constante)

fase $\theta = \omega t$

$$y = A \cos(\omega t + \varphi)$$

↑
amplitud

↗ desfase

comprobación

⑥

$$\begin{cases} y = A \cos(\omega t + \varphi) \\ \dot{y} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) \\ \ddot{y} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$m[-A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)] + k[A \cos(\omega t + \varphi)] = 0$$

Simplificando

$$-m\omega^2 + k = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

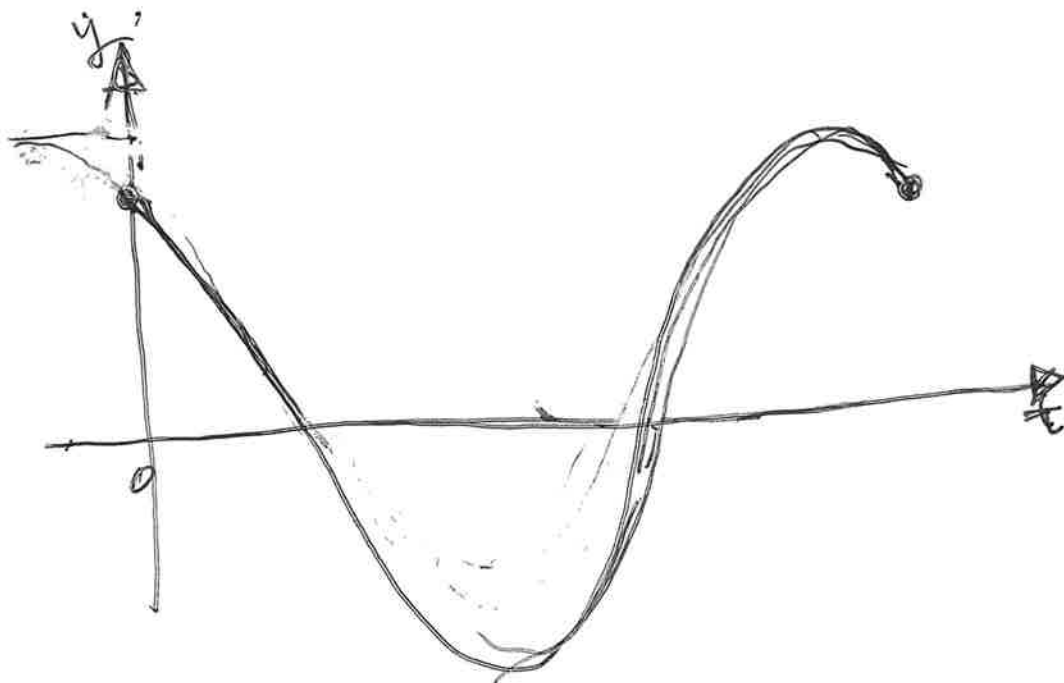
la frecuencia $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

La frecuencia no depende de las condiciones iniciales. Es propio del sistema. Solo depende de k y m

Con las condiciones iniciales

$$\begin{cases} y(0) = A \cos(\varphi) = y_0 \\ y'(0) = -A\omega \sin(\varphi) = y'_0 \end{cases}$$

Se determinan φ y A



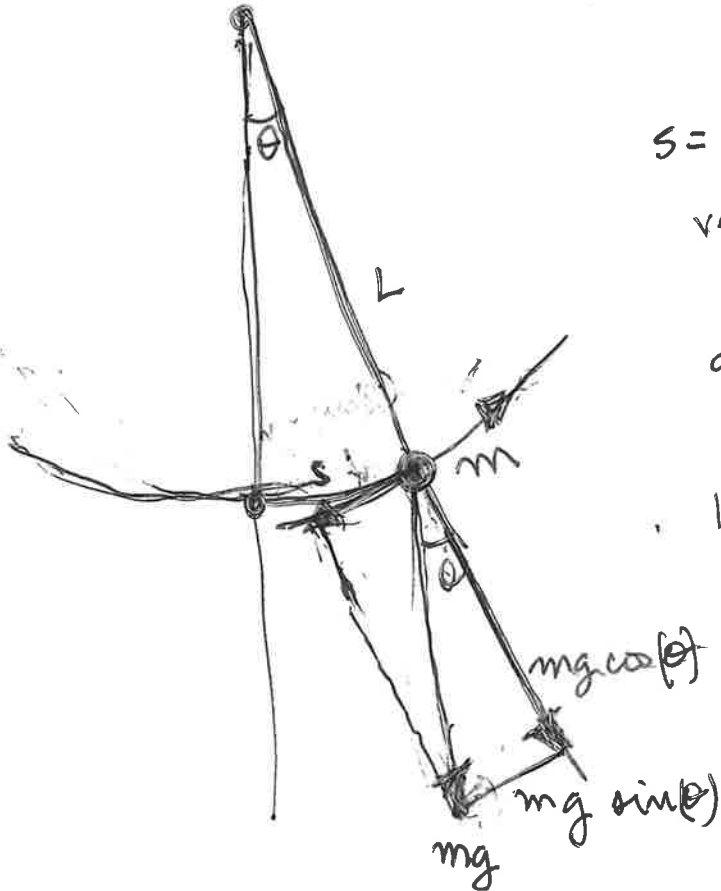
El modelo básico del oscilador armónico se puede refinar si se añade:
 un término de rozamiento proporcional a la velocidad, $-\gamma \dot{y}$, y si se añade un término forzado, $u(t)$

$$m \ddot{y} - \gamma \dot{y} + k y = u(t)$$

Esta es una ecuación lineal de segundo orden de coeficientes constantes

Es de las ecuaciones que se saben resolver muy bien y aprenderemos a hacerlo en este curso

EJEMPLO 3. El péndulo



$$s = L\theta$$

velocidad: $\frac{ds}{dt} = \frac{d(L\theta)}{dt} = L \frac{d\theta}{dt}$

aceleración $\frac{d^2s}{dt^2} = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$

ley de Newton:

$$m \frac{d^2s}{dt^2} = -mg \sin(\theta)$$

$$L \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin(\theta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

No depende de la masa

- Es una ecuación NO lineal de segundo orden.
- Las ecuaciones no lineales no son fáciles de resolver, aunque sí se pueden deducir propiedades cualitativamente.
- Modelos no lineales pueden dar origen a sistemas caóticos
- cuando θ es pequeño, $\sin(\theta) \approx \theta$; es el oscilador armónico

EJEMPLO 4. Crecimiento de una población

9

Si el crecimiento de una población es proporcional al tamaño

$$\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\text{crecimiento}} = k \underbrace{y}_{\text{población}}$$

La solución del problema de datos iniciales (problema de Cauchy)

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Se puede resolver por "cuadraturas"

$$\frac{1}{y} dy = k dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int k dt$$

$$\ln(y) = kt + C$$

$$y = C e^{kt}$$

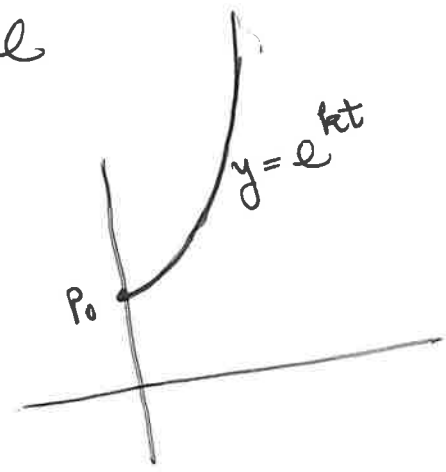
La solución general es una familia de curvas exponenciales

truco de las constantes de integración

$$\begin{aligned} e^{kt+C} &= e^{kt} \cdot \underbrace{e^C}_{=C} \\ &= C e^{kt} \end{aligned}$$

con la condición inicial

$$y = p_0 e^{kt}$$



Este sería el modelo del crecimiento de una bacteria cuando los recursos son ilimitados

El modelo se puede afinar haciendo que la constante de proporcionalidad varíe según el tamaño de la población

$$\frac{dy}{dt} = h(y) \quad y$$

↗ la constante de proporcionalidad varía según el tamaño de la población

En el modelo "logístico" la constante de proporcionalidad, k , disminuye según crece la población

$$h(y) = k - ay$$

$$h(y) = k \left(1 - \frac{y}{K}\right) \quad \left(K = \frac{k}{a}\right)$$

En este modelo logístico la evolución de la población se rige por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = k\left(1 - \frac{y}{K}\right)y \\ y(0) = p_0 \end{cases}$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver por cuadraturas

$$\frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} = k dt$$

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - \frac{y}{K}}\right) dy = k dt$$

$$\int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1/K}{1 - \frac{y}{K}} dy = \int k dt$$

$$\ln(y) - \ln\left(1 - \frac{y}{K}\right) = kt + C$$

$$\ln\left(\frac{y}{1 - \frac{y}{K}}\right) = kt + C$$

Para integrar el 1º miembro se descompone en fracciones elementales

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{1 - \frac{y}{K}} = \frac{A\left(1 - \frac{y}{K}\right) + By}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y}$$

$$\begin{cases} -\frac{A}{K} + B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$$

$$\frac{y}{1 - \frac{y}{K}} = C e^{kt}$$

$$\frac{Ky}{K-y} = C e^{kt} \quad \leftrightarrow \quad \text{solución general}$$

Con la condición inicial $y(0) = y_0$

$$\frac{Ky_0}{K-y_0} = C$$

La solución del problema de Cauchy es

$$\frac{Ky}{K-y} = \frac{Ky_0}{K-y_0} e^{kt} \Rightarrow \frac{y}{K-y} = \frac{y_0}{K-y_0} e^{kt}$$

Hay que despejar y

$$y(K-y_0)e^{-kt} = y_0(K-y)$$

$$y(K-y_0)e^{-kt} + y_0y = Ky_0$$

$$y[(K-y_0)e^{-kt} + y_0] = Ky_0$$

$$y = \frac{Ky_0}{y_0 + (K-y_0)e^{-kt}}$$



AYUDAS INFORMÁTICAS

* MAXIMA

* WOLFRAM ALPHA

REFERENCIAS BÁSICAS

- Indicaciones del curso virtual
- Libro de teoría
- Libro de problemas
- Problemas exámenes cursos anteriores

Ecuaciones de
PRIMER ORDEN
(Teoría general)

ECUACIONES de PRIMER ORDEN TEORÍA GENERAL

(15)
CAPÍTULO 1

Ecuación de 1er orden explícita

$$y' = f(x, y)$$

← Es de esta forma

Ejemplos: $y' = \frac{1}{y^2}$; $y' = x \cdot y$;
 $y' = 3x + y$; $y' = \frac{y}{x}$; $y' = y$

La solución general es una familia
de funciones que verifican la ecuación
(gráficamente, una familia de curvas que dependen
de un parámetro)
Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & \text{Ecuación} \\ y(x_0) = y_0 & \text{Condición inicial} \end{cases}$$

(x_0, y_0)

Teorema de existencia y unicidad

$$\left. \begin{array}{l} f(x, y) \text{ es continua} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ es continua} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Hay una
solución única
que verifica el
Problema de Cauchy
en (x_0, y_0)

Septiembre 2013

15

Dada la ecuación

$$x^2 y' - 3xy + 2y^2 = 0$$

Se pide:

- a) Expresarla en la forma $y' = f(x, y)$ y determinar la región del plano xy donde el teorema de existencia y unicidad garantiza la solución única de la misma
- b) Comprobar que es una ecuación homogénea y resolverla

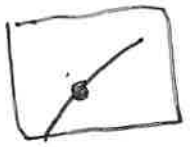
a) $y' = \frac{3xy - 2y^2}{x^2} = f(x, y)$

Según el teorema de existencia y unicidad

- 1) f es continua en Ω
2) $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en Ω } $\Rightarrow y' = f(x, y)$ tiene solución única para los puntos de Ω

- 1) $f(x, y) = \frac{3xy - 2y^2}{x^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo en $x^2 = 0$ (eje y)

- 2) $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x - 4y}{x^2}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo en $x^2 = 0$ (eje y)

Por tanto, $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{x=0\}$  (17)

El apartado b) lo hacemos más adelante

ec: 'diff(y,x)=(3*x+1)/(3*y^2);
odes2(ec,y,x);

Ejemplo 1.5. (página 8)

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+1}{3y^2}} \quad (*)$$

Es de la forma $y' = f(x,y)$

Según el teorema de existencia y unicidad estudiamos la continuidad de f y de $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$1) f(x,y) = \frac{3x^2+1}{3y^2}$$

es continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo cuando $y=0$ (eye x)

$$2) \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \left(\frac{3x^2+1}{3}\right) \left(-\frac{2}{y^3}\right)$$

es continua en todo $\mathbb{R}^2$ salvo cuando $y=0$ (eye x)

$\Rightarrow (*)$ tiene solución única para todos los puntos de $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{y=0\}$

Es una ecuación de variables separables que podemos resolver de forma explícita

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 1}{3y^2}$$

$$3y^2 dy = (3x^2 + 1) dx$$

$$\int 3y^2 dy = \int (3x^2 + 1) dx$$

$$y^3 = x^3 + x + C$$

$$y = \sqrt[3]{x^3 + x + C}$$

← Solución general en Ω

Para cada valor de C se obtiene una curva.
 Por un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ pasa una curva y solo una curva de la familia de la solución general, la que se obtiene para el valor de $C = y_0^3 - x_0^3 - x_0$

Se puede resolver (aproximadamente) una ecuación diferencial

$$y' = f(x, y)$$

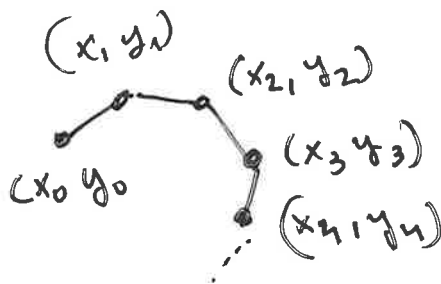
sin necesidad de hallar una expresión explícita de la solución general

Polígonos de Euler

(19)

Dada la ecuación $y' = f(x, y)$,
a partir de un dato inicial (x_0, y_0)
se construye un pequeño segmento que
pasa por (x_0, y_0) y tiene pendiente
 $y'_0 = f(x_0, y_0)$. Así se obtiene un
punto próximo, (x_1, y_1) , y se repite
el proceso

Solución aproximada



Método de las isoclinas (ver pág 9, 10 y 11)

$$y' = -\frac{2y}{x}$$

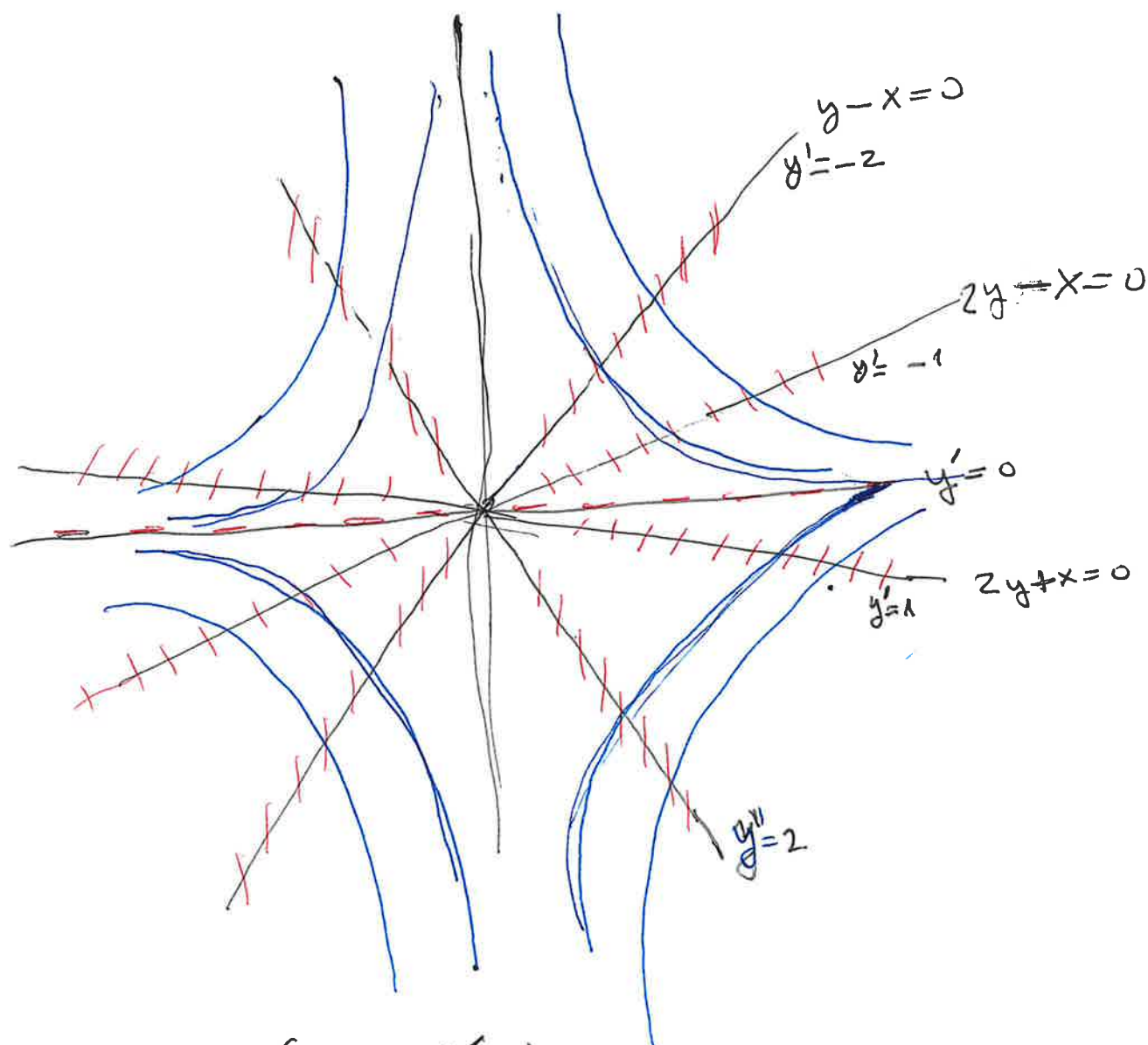
Isoclina $y' = 0 \Rightarrow -\frac{2y}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$

Isoclina $y' = 1 \Rightarrow -\frac{2y}{x} = 1 \Rightarrow 2y + x = 0$

Isoclina $y' = -1 \Rightarrow -\frac{2y}{x} = -1 \Rightarrow 2y - x = 0$

Isoclina $y' = -2 \Rightarrow -\frac{2y}{x} = -2 \Rightarrow y - x = 0$

Isoclina $y' = 2 \Rightarrow -\frac{2y}{x} = 2 \Rightarrow y + x = 0$



Resolución explícita:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{x}$$

$$\frac{1}{2y} dy = -\frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{2y} dy = \int -\frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{1}{y} dy = -\int \frac{1}{x} dx$$

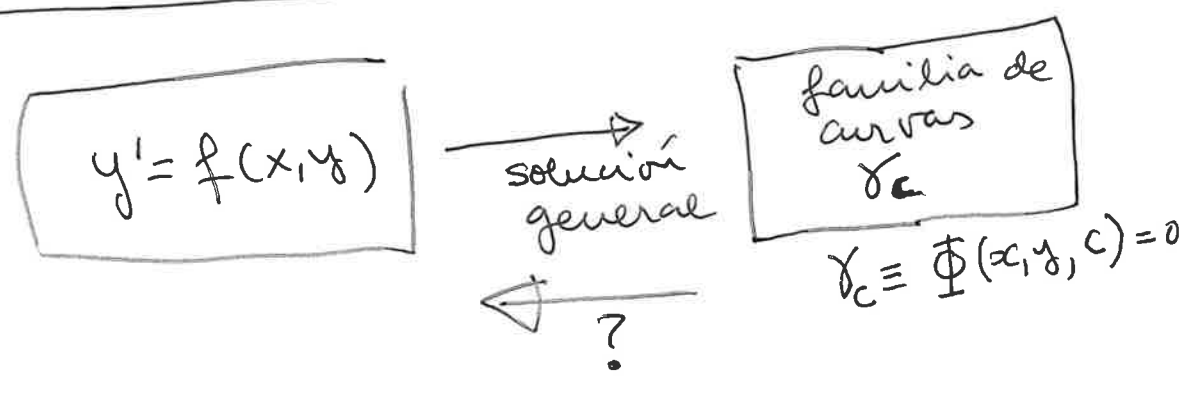
$$\frac{1}{2} \ln(y) = -\ln(x) + C$$

$$\ln(\sqrt{y}) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

$$\sqrt{y} = C \frac{1}{x}$$

$$y = C \frac{1}{x^2}$$

Ecuación diferencial de una familia de curvas



Ejemplo: Determinar la ecuación diferencial de la familia de parábolas

$$y^2 = 2cx + c^2$$

Respuesta

Derivando implícitamente respecto de la variable x

$$2yy' = 2c \Rightarrow yy' = c$$

Eliminando c en el sistema

$$\begin{cases} y^2 = 2cx + c^2 \\ yy' = c \end{cases}$$

$\Rightarrow y^2 = 2yy'x + y^2(y')^2$ dividiendo por y

$y = 2xy' + y(y')^2$

Esta es una ecuación diferencial de 1º grado Implícita $F(x, y, y') = 0$

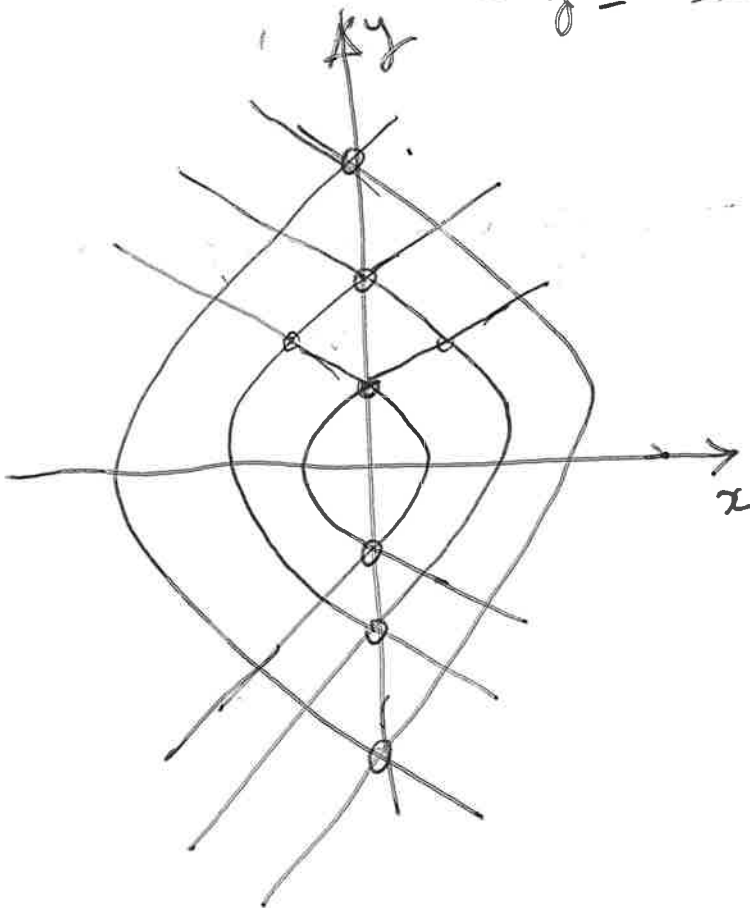
Si se intenta poner como una función explícita despejamos y'

(22)

$$y' = \frac{-2x \pm \sqrt{4x^2 + 4y^2}}{2y} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

En realidad, son dos familias de curvas:

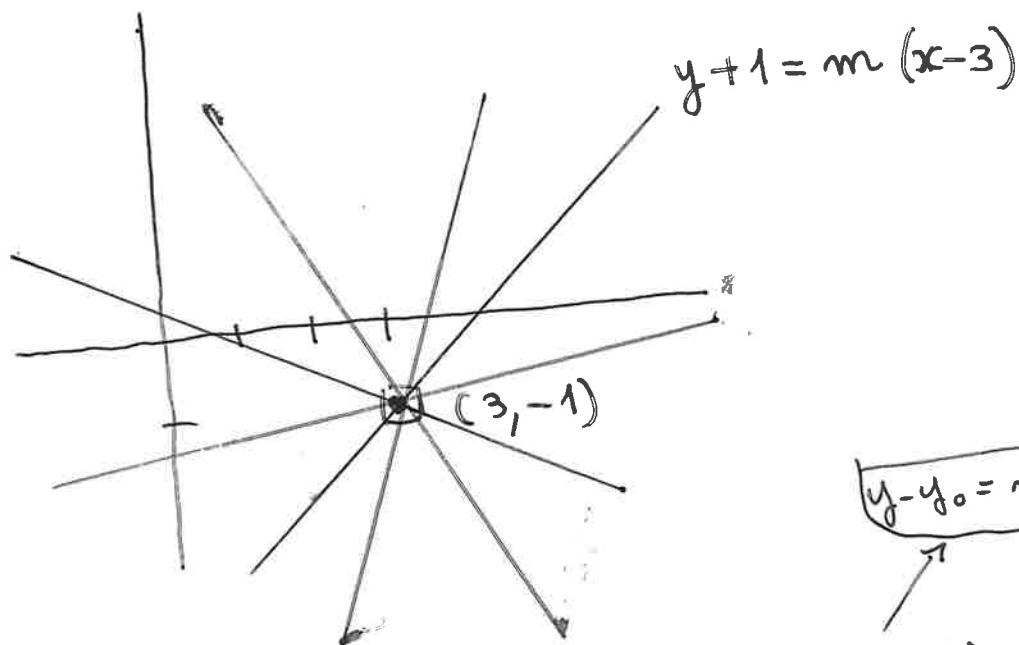
$$\begin{cases} y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \\ y' = \frac{-x - \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \end{cases}$$



$c=0$	:	$y^2=0$
$c=1$		$y^2=2x+1$
$c=2$		$y^2=4x+4$
$c=-1$		$y^2=-2x+1$
$c=-2$		$y^2=-4x+4$

- a) Se pide hallar la ecuación diferencial de la familia de rectas que pasan por el punto $(3, -1)$
- b) La familia de trayectorias ortogonales de la familia anterior. ¿Qué tipo de curvas son?
- c) Dibujar ambas familias de curvas observando su ortogonalidad

a)



$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Usando la ecuación "punto-pendiente" la familia de rectas que pasan por $(3, -1)$ es

$$y + 1 = m(x - 3)$$

m es el parámetro

derivando esta ecuación respecto de x

$$\frac{dy}{dx} = m$$

Eliminando el parámetro en el sistema

$$\begin{cases} y+1 = m(x-3) \\ \frac{dy}{dx} = m \end{cases}$$

resulta la ecuación diferencial

$$\boxed{y+1 = \frac{dy}{dx}(x-3)}$$

Comprobación: Vamos a resolver esta EDO
(Es de variables separables)

$$\frac{1}{x-3} dx = \frac{1}{y+1} dy$$

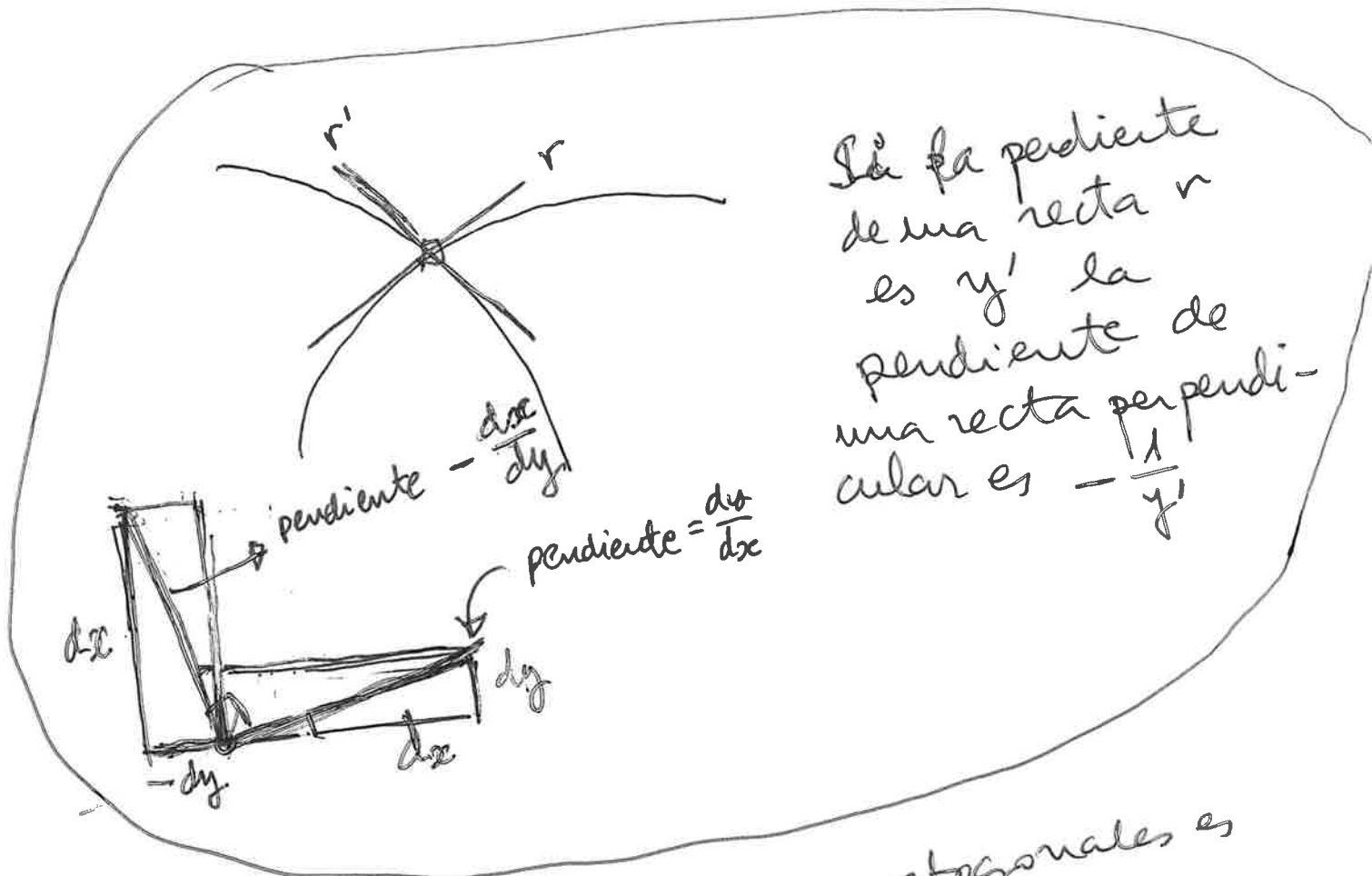
$$\int \frac{1}{x-3} dx = \int \frac{1}{y+1} dy$$

$$\ln(x-3) = \ln(y+1) + C$$

$$x-3 = C(y+1)$$

$$y+1 = C(x-3)$$

b) Para hallar las trayectorias ortogonales hay que cambiar en la EDO y' por $-\frac{1}{y'}$



Si la pendiente de una recta r es y' la pendiente de una recta perpendicular es $-\frac{1}{y'}$

La EDO de las trayectorias ortogonales es

$$y + 1 = -\frac{1}{y'}(x - 3)$$

$$(y + 1) = -\frac{dx}{dy}(x - 3) \quad \leftarrow \text{es de variables}$$

$$(y + 1) dy = (3 - x) dx$$

$$\int (y + 1) dy = \int (3 - x) dx$$

$$\frac{y^2}{2} + y = 3x - \frac{x^2}{2} + C$$

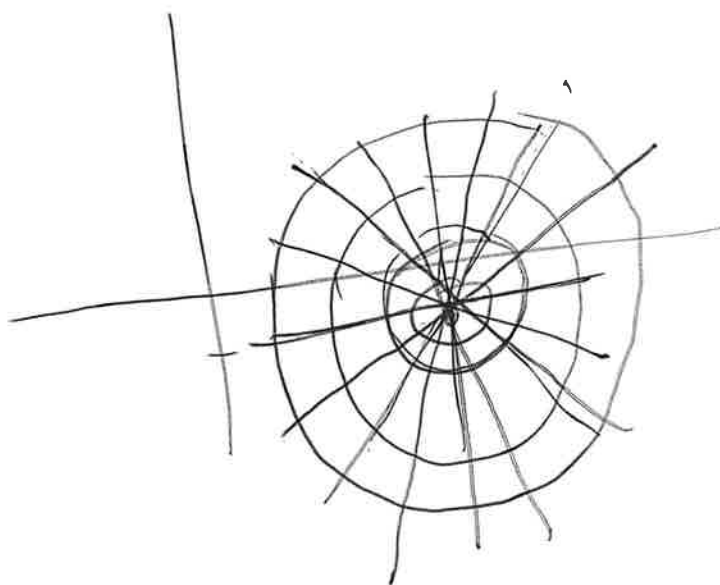
$$\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - 3x + y = C$$

$$y^2 + x^2 - 6x + 2y = C$$

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = C$$

← (completando cuadrados)
 $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$
 $(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$
 Las constantes se engloban en C

Es una familia de circunferencias
 con centros en $(3, -1)$



Ecuaciones de
1^{er} ORDEN QUE
Se integran
directamente

```
ec:'diff(y,x)=(3*x^2+1)/(3*y^2);
```

$$\frac{d}{dx} y = \frac{3x^2 + 1}{3y^2}$$

```
ode2(ec,y,x);
```

$$y^3 = x^3 + x + \%c$$

ECUACIONES DE 1^{er} ORDEN QUE SE INTEGRAN DIRECTAMENTE

24

- ① Variables separables
- ② Ecuaciones homogéneas
- ③ Ecuaciones exactas
- ④ Ecuaciones lineales
- ⑤ Ecuaciones de Bernoulli y Riccati
- ⑥ Ecuaciones de forma implícita
(soluciones singulares)
- ⑦ Ecuaciones de Lagrange y Clairaut

① Variables separables

Se pueden reducir a la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x)}{Q(y)} \Rightarrow \int Q(y) dy = \int P(x) dx$$

o escrito de una forma más genérica

$$\frac{dy}{dx} = F(x) G(y)$$

Ejemplo: Variables separables
Resolver $\begin{cases} y' = xy^3 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Respuesta:

$$\frac{dy}{dx} = xy^3 \Rightarrow y^{-3} dy = x dx$$

$$\int y^{-3} dy = \int x dx$$

$$-\frac{1}{2} y^{-2} = \frac{1}{2} x^2 + C$$

$$-\frac{1}{y^2} = x^2 + C$$

$$y^2 = -\frac{1}{x^2 + C}$$

$$y^2 = \frac{1}{C - x^2}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{C - x^2}}$$

Solución general

Se determina C
para la
condición
inicial

$$y(0) = \frac{1}{\sqrt{C}} = 1 \rightarrow C = 1$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Solución del
problema de Cauchy

② Ecuaciones homogéneas

Algunas ecuaciones se pueden reducir a ecuaciones de variables separables mediante un cambio de variable. Sea la ecuación

$$y' = f(x, y)$$

en donde f es una función homogénea

Def: Se dice que f es una función homogénea si

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$$

Ejemplo: $f(x, y) = \frac{x^2 y + x^3}{y^3} = \frac{(\frac{y}{x}) + 1}{(\frac{y}{x})^3}$

[Comentario: Las rectas que pasan por el origen son isoclinas.]
Se resuelven con el cambio de variable

$$u = \frac{y}{x} \leftarrow \text{Cambio de variable}$$

$$y = x u$$

← Cambio de las diferenciales

$$\frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}$$

Ejemplo: (página 24 del libro)

Ecuación homogénea

$$2xy \, dx - (3x^2 - y^2) \, dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

(Es homogénea)

dividimos por x^2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Hacemos el cambio

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)}{3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$u + x \frac{du}{dx} = \frac{2u}{3 - u^2}$$

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x} \rightarrow y = ux \\ \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx} \end{cases}$$

Se intenta separar las variables

$$x \frac{du}{dx} = \frac{2u}{3 - u^2} - u =$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{2u - 3u + u^3}{3 - u^2}$$

$$x \frac{du}{dx} = \frac{u^3 - u}{3 - u^2}$$

$$\frac{3-u^2}{u^3-u} du = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{3-u^2}{u^3-u} du = \int \frac{1}{x} dx$$

Hacemos cada una de estas integrales

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \frac{3-u^2}{u^3-u} du$$

Es una integral racional que hay que descomponer en fracciones elementales

$$\frac{3-u^2}{u^3-u} = \frac{3-u^2}{u(u+1)(u-1)} =$$

$$u^3-u = u(u^2-1) = u(u+1)(u-1)$$

$$= \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1} + \frac{C}{u-1} =$$

$$= \frac{A(u+1)(u-1) + Bu(u-1) + Cu(u+1)}{u^3-u} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para } u=0 \rightarrow -A=3 \\ \text{para } u=1 \rightarrow 2C=2 \\ \text{para } u=-1 \rightarrow 2B=2 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} A=-3 \\ B=1 \\ C=1 \end{cases}$$

$$\int \frac{3-u^2}{u^3-u} du = \int \frac{-3}{u} du + \int \frac{1}{u+1} du + \int \frac{1}{u-1} du$$

$$= -3 \ln(u) + \ln(u+1) + \ln(u-1)$$

$$= \ln \left[\frac{(u+1)(u-1)}{u^3} \right] = \ln \left[\frac{u^2-1}{u^3} \right]$$

Iguando las dos "cuadraturas"

$$\ln \left[\frac{u^2-1}{u^3} \right] = \ln(x) + C$$

$$\frac{u^2-1}{u^3} = Cx$$

Se deshace el cambio

$$\frac{\frac{y^2}{x^2} - 1}{\frac{y^3}{x^3}} = Cx ; \quad \frac{\frac{y^2-x^2}{x^2}}{\frac{y^3}{x^3}} = Cx$$

$$\frac{(y^2-x^2)x^3}{x^2 y^3} = Cx \quad ; \quad \frac{y^2-x^2}{y^3} = C$$

$$\boxed{y^2 - x^2 = C y^3}$$

Solución general
Familia de curvas
en forma implícita

Repaso

(34)

Descomposición de una función racional en fracciones elementales

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

1) Si grado de $P(x) \geq Q(x)$ previamente se hace la división

$$\begin{array}{r} P(x) \quad \overline{) Q(x)} \\ \underline{q(x)} \end{array}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

② Se descompone $Q(x)$ en factores. Las raíces de $Q(x)$. Por ejemplo, si

- a raíz real simple
- b raíz real triple
- $\left. \begin{array}{l} (\alpha + \beta i) \\ (\alpha - \beta i) \end{array} \right\}$ raíces complejas conjugadas

$$\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)^3((x-\alpha)^2 + \beta^2)} =$$

$$= \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)^3} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{(x-b)} + \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

Cada uno de estos términos se integra así

(3)

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln(x-a)$$

(35)

$$\int \frac{A}{(x-a)^p} dx = \frac{A}{-p+1} \frac{1}{(x-a)^{p-1}}$$

$$\int \frac{Mx+N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} dx = \int \frac{Mx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + \int \frac{N}{(x-\alpha)^2+\beta^2} =$$

$$= \frac{M}{2} \ln[(x-\alpha)^2+\beta^2] + \frac{N+M\alpha}{\beta} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)$$

Febrero 2010

36

- a) ¿Cuándo se dice que una ecuación de primer grado es homogénea?

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

- b) Comprueba que la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

no es de ese tipo, y efectúese un cambio de variable para que se convierta en homogénea. Hallar la curva integral que pasa por el origen de coordenadas

- a) Ver libro de Teoría pag 25)

La ecuación $y' = f(x, y)$ es homogénea si $f(x, y)$ es una función homogénea de grado cero, es decir

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y) \Rightarrow$$

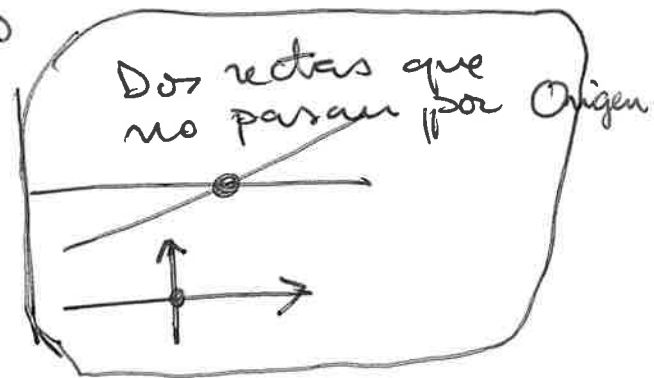
- b) En este caso son distintas

$$f(x, y) = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x - \lambda y + 1}{\lambda x + \lambda y - 3}$$

Buscamos un cambio de origen (37)
para que la ecuación sea homogénea
haciendo desaparecer las constantes

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$



Hacemos el cambio

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dX \\ dy = dY \end{cases} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$$

Al sustituir en la ecuación

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 1 - Y - 2 + 1}{X + 1 + Y + 2 - 3} = \frac{X - Y}{X + Y}$$

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y} = \frac{1 - \left(\frac{Y}{X}\right)}{1 + \left(\frac{Y}{X}\right)}$$

Es una ecuación homogénea

Se hace el cambio

$$\begin{cases} u = \frac{Y}{X} \\ \frac{dY}{dX} = \frac{du}{dX} X + u \end{cases} \rightarrow Y = uX$$

$$\frac{du}{dx} X + u = \frac{1-u}{1+u}$$

$$\frac{du}{dx} X = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1-u-u-u^2}{1+u} = \frac{-u^2-2u+1}{1+u}$$

Ya es una ecuación de variables separables

$$\int \frac{1+u}{-u^2-2u+1} du = \int \frac{1}{X} dx$$

Integramos el primer miembro
Se trata de una integral racional. Una manera sistemática consistiría en descomponerla como suma de fracciones elementales.

En realidad no hace falta hacerlo así si observamos que

$$D[1-2u-u^2] = -2-2u = -2(1+u)$$

Resulta que

$$\int \frac{1+u}{1-2u-u^2} du = -\frac{1}{2} \int \frac{-2(u+1)}{1-2u-u^2} du =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(1-2u-u^2) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-2u-u^2}}\right)$$

La integral del segundo miembro

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

Igualando los dos miembros

$$\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-2u-u^2}}\right) = \ln(x) + C$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2u-u^2}} = Cx \Rightarrow \frac{1}{1-2u-u^2} = Cx^2$$

$$(1-2u-u^2)x^2 = C$$

Deshaciendo el cambio

$$u = \frac{y}{x}$$

$$\left(1 - \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2}\right)x^2 = C$$

$$x^2 - 2yx - y^2 = C$$

Deshaciendo el cambio $\begin{cases} x = x-1 \\ y = y-2 \end{cases}$

$$(x-1)^2 - 2(x-1)(y-2) - (y-2)^2 = C$$

$$x^2 - 2x + 1 - 2(xy - 2x - y + 2) - (y^2 - 4y + 4) = C$$

$$x^2 - 2x + 1 - 2xy + 4x + 2y - 4 - y^2 + 4y - 4 = C$$

$$x^2 + 2x - 2xy + 6y - y^2 - 7 = C$$

$$\boxed{x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 6y = C}$$

← solución general

Se trata de una familia de cónicas

40

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

(Se trata de hipérbolas.)

La curva integral que pasa por el origen de coordenadas se obtiene cuando $C=0$

$$\boxed{x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 6y = 0}$$

Comentario:

Cuando son rectas paralelas, por ejemplo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y+1}{2x+y-2}$$

Se hace el cambio $\begin{cases} u = 2x+y \\ \frac{du}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx} \end{cases}$

y se reduce a una de variables separables

Junio 2015

41

1. Compruebe que el cambio de variable $y = \sqrt{z}$ convierte la ecuación

$$y' = \frac{2y^2 - x}{2y(2x - y^2)}$$

en una homogénea y resolverla

1º Cambio

$$y = \sqrt{z} = z^{1/2}$$

← cambio de variable

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dz}{dx}}{2\sqrt{z}} = \frac{dz}{2dx\sqrt{z}} \quad \leftarrow \text{cambio en las diferenciadas}$$

$$\frac{dz}{2dx\sqrt{z}} = \frac{2z - x}{2\sqrt{z}(2x - z)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{2z - x}{2x - z}$$

ahora
si es homogénea
 $\frac{2\lambda z - \lambda x}{2\lambda x - \lambda z} = \frac{2z - x}{2x - z}$
 $f(\lambda x, \lambda z) = f(x, z)$

Se hace el cambio

2º Cambio

$$\left[\begin{array}{l} u = \frac{z}{x} \rightarrow z = ux \\ \frac{dz}{dx} = \frac{du}{dx} x + u \end{array} \right.$$

$$\frac{du}{dx} x + u = \frac{2u-1}{2-u}$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{2u-1}{2-u} - u$$

$$\frac{du}{dx} x = \frac{\cancel{2u}-1-\cancel{2u}+u^2}{2-u} = \frac{u^2-1}{2-u}$$

Es una ecuación de variable separables

$$\int \frac{2-u}{u^2-1} du = \int \frac{1}{x} dx$$

La primera integral es una racional

$$\frac{2-u}{u^2-1} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{u-1} = \frac{A(u-1)+B(u+1)}{(u+1)(u-1)}$$

$$\begin{cases} \text{para } u=1 : 2B=1 \rightarrow B=1/2 \\ \text{para } u=-1 : -2A=3 \rightarrow A=-3/2 \end{cases}$$

con lo cual

$$\frac{2-u}{u^2-1} = \frac{-3/2}{u+1} + \frac{1/2}{u-1}$$

$$\int \frac{2-u}{u^2-1} du = -\frac{3}{2} \int \frac{1}{u+1} du + \frac{1}{2} \int \frac{1}{u-1} du =$$

$$= -\frac{3}{2} \ln(u+1) + \frac{1}{2} \ln(u-1) =$$

$$= -\ln(\sqrt{(u+1)^3}) + \ln(\sqrt{u-1}) =$$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{u-1}{(u+1)^3}}\right)$$

La segunda integral es inmediata

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C$$

Igualando las dos integrales

$$\ln\left(\sqrt{\frac{u-1}{(u+1)^3}}\right) = \ln(x) + C$$

$$\sqrt{\frac{u-1}{(u+1)^3}} = Cx$$

(44)

Des hacemos los dos cambios $\begin{cases} y = \sqrt{z} \rightarrow z = y^2 \\ u = \frac{z}{x} \end{cases}$

$$u = \frac{z}{x} = \frac{y^2}{x}$$

$$\sqrt{\frac{\frac{y^2}{x} - 1}{\left(\frac{y^2}{x} + 1\right)^3}} = Cx$$

$$\sqrt{\frac{\frac{y^2 - x}{x}}{\frac{(y^2 + x)^3}{x^3}}} = Cx ; \sqrt{\frac{(y^2 - x) x^2}{(y^2 + x)^3}} = Cx$$

$$\sqrt{\frac{y^2 - x}{(y^2 + x)^3}} = C$$

$$\boxed{y^2 - x = C(y^2 + x)^3}$$

Solución general
familia de
curvas en
ec. implitas

ECUACIONES DIFERENCIALES
de 1^{er} ORDEN

EXACTAS

(%i1) ec: 'diff(y,x)=(2·x·y)/(3·x^2-y^2);

(%o1)
$$\frac{d}{dx} y = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$$

(%i2) ode2(ec,y,x);

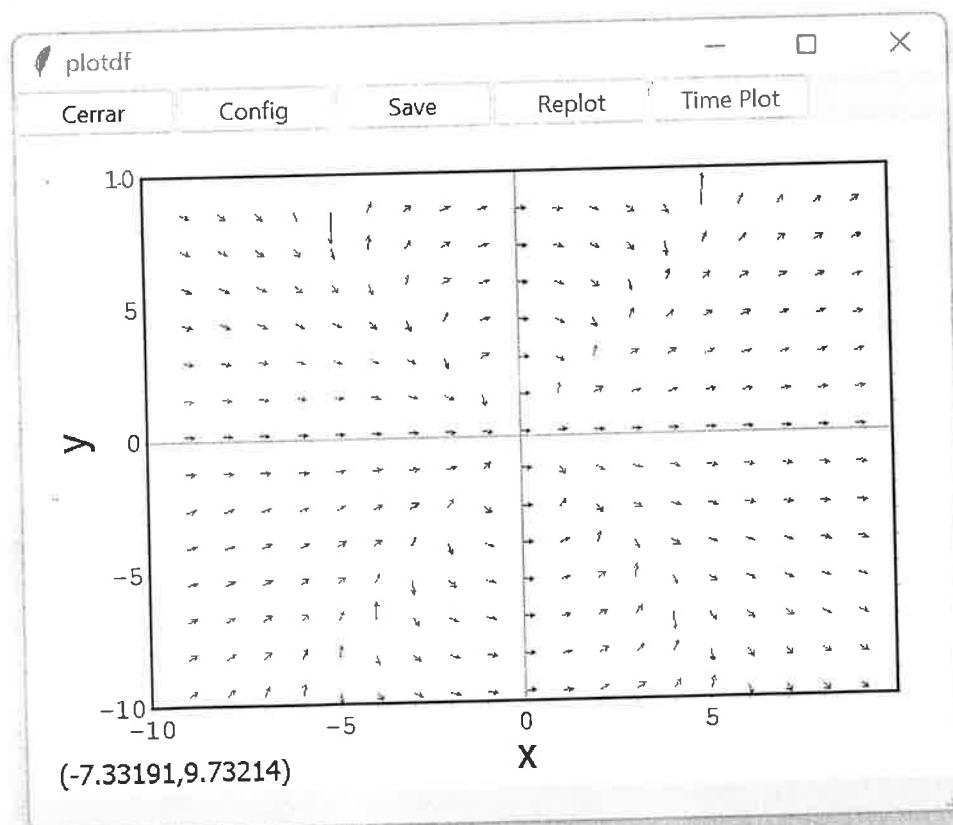
(%o2)
$$-\frac{y^2 - x^2}{3y} = \%c$$

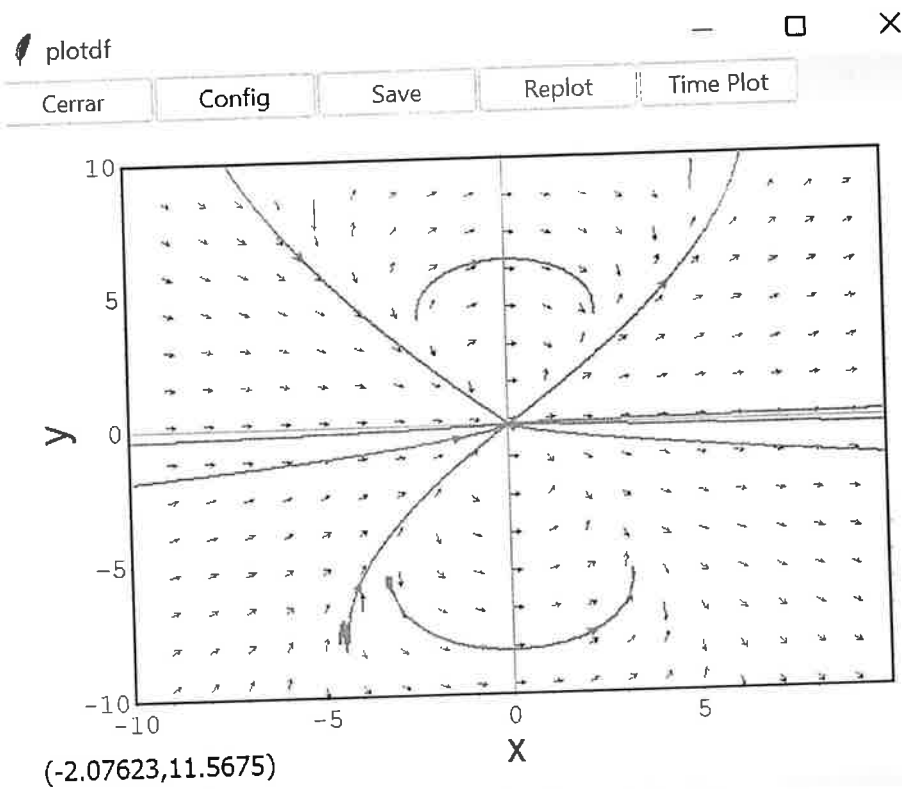
(%i1) load(plotdf);

(%o1) C:/maxima-5.46.0/share/maxima/5.46.0/share/dynamics/plotdf.lisp

(%i4) plotdf((2·x·y)/(3·x^2-y^2));

(%o4) C:/Users/Angel/AppData/Local/Temp/maxout18012.xmaxima





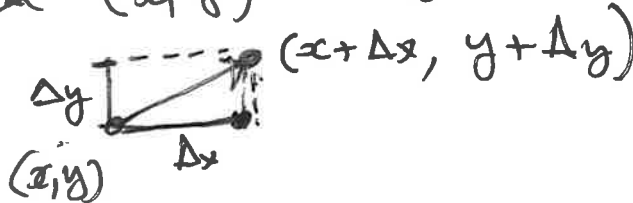
Como es una ecuación homogénea, las isoclinas son las rectas que pasan por el origen

Explicación de Diferencial Total

Supongamos una función (campo escalar)

$$\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \Phi(x, y)$$

Si variamos la x , pasamos de x a $x + \Delta x$
Si variamos la y , pasamos de y a $y + \Delta y$
Cuando varía $(x, y) \rightarrow (x + \Delta x, y + \Delta y)$



Al variar (x, y) variamos Φ . Así tenemos

$$\Delta \Phi = \Phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \Phi(x, y) \approx$$
$$\approx \frac{\partial \Phi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Delta y$$

En el límite,

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

Recordar que:

$$\Phi(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx \Phi(x, y) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) \Delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) \Delta y$$

□

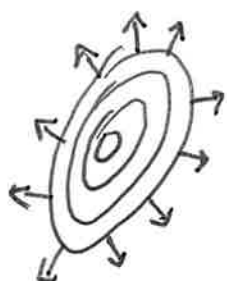
③ Ecuaciones Diferenciales Exactas, Factor Integrante

496

Motivación:

Si $\vec{E}$ es un campo: $\vec{E}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 Φ es su potencial: $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\vec{E} = \text{grad}(\Phi) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$$



Una línea equipotencial es

$$\Phi(x, y) = \text{cte.}$$

Una partícula se mueve en el campo conservativo siguiendo una línea equipotencial

La variación del potencial es:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy$$

Si la variación del potencial es cero

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy = 0$$

La solución de esta ecuación es una línea equipotencial

$$\Phi(x, y) = \text{cte.}$$

Dada la ecuación diferencial de 1er orden de la forma

$$\boxed{P(x,y) dx + Q(x,y) dy = 0} \quad [*]$$

Def: Se dice que [*] es una diferencial exacta si existe una función potencial, $\Phi(x,y)$, tal que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P \quad \text{y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$$

de manera que [*] es $d\Phi = 0$, tiene como solución $\Phi = cte$

Teorema La condición necesaria y suficiente para que una ecuación sea exacta

es que

$$\boxed{\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}}$$

$$\left(= \frac{\frac{\partial P}{\partial y}}{\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial x}}{\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x}} \right)$$

las derivadas cruzadas son iguales

¿Cómo se calcula la función
Potencial de una diferencial
exacta?

(48)

Lo veremos con un ejemplo:

Resolver la ecuación

$$\underbrace{(3xy^2 - x^2)}_P dx - \underbrace{(1 + 6y^2 - 3x^2y)}_Q dy = 0$$

$$\text{Sea } \begin{cases} P(x,y) = 3xy^2 - x^2 \\ Q(x,y) = -(1 + 6y^2 - 3x^2y) \end{cases}$$

comprobamos si es una diferencial exacta

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 6xy$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 6xy$$

$$\text{Como } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{se trata de}$$

una diferencial exacta.

Ahora hay que buscar la función
potencial $\Phi(x,y)$ de modo que

$$d\Phi = Pdx + Qdy$$

siendo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P$$

$$; \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$$

(49)

Cálculo de Φ

$$\text{Si tomamos que } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = P \Rightarrow \Phi = \int P dx$$

así pues,

$$\Phi = \int (3xy^2 - x^2) dx =$$

$$= \frac{3}{2} x^2 y^2 - \frac{x^3}{3} + \varphi(y)$$

La Constante de integración respecto de x es una función de y

Para determinar $\varphi(y)$, derivamos esta Φ respecto de y

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3x^2 y + \frac{d\varphi}{dy}$$

Iguando esta expresión con

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q(x, y) = -1 - 6y^2 + 3x^2 y$$

Resultado

$$3x^2y + \varphi'(y) = -1 - 6y^2 + 3x^2y$$

De donde

$$\varphi'(y) = -1 - 6y^2. \quad \text{Integrando}$$

$$\varphi(y) = \int (-1 - 6y^2) dy = -y - 2y^3 + C$$

Sustituyendo

$$\Phi(x, y) = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^3}{3} - \underbrace{y - 2y^3 + C}_{\varphi}$$

Las curvas integrales son $\Phi = cte$

$$\boxed{\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{x^3}{3} - y - 2y^3 = C}$$

veamos otro ejemplo:

Ejemplo:

51

Resolver

$$y' = - \frac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2y + 4y^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2y + 4y^3}$$

$(3x^2 + 6xy^2) dx + (6x^2y + 4y^3) dy = 0$
comprobamos que es una diferencial
exacta $\checkmark \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$?

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12xy \quad ; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy$$

Calculamos la función potencial Φ

$$\text{tal que } \frac{\partial \Phi}{\partial x} = P \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q$$

constante de integración

$$\Phi = \int (3x^2 - 6xy^2) dx = x^3 + 3yx^2 + \varphi(y)$$

Para calcular φ , derivamos Φ respecto de y

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3x^2 + \varphi'(y) = \underbrace{6x^2y + 4y^3}_{\varphi}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3 - 3x^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varphi &= \int (6x^2y + 4y^3 - 3x^2) dy = \\ &= 3x^2y^2 + y^4 - 3x^2y + C \end{aligned}$$

Así pues,

$$\Phi(x, y) = x^3 + \cancel{3yx^2} + \underbrace{3x^2y^2 + \cancel{y^4} - \cancel{3x^2y}}_{\varphi} + C$$

$$= x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C$$

por consiguiente, las soluciones de
 $d\Phi = 0$ son las curvas $\Phi = \text{cte}$

$$\boxed{x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C}$$

Factor integrante

53

Hay ecuaciones

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad [*]$$

que NO son exactas, pero se pueden convertir en exactas si se multiplican por un "factor integrante", $\mu(x,y)$

de modo que

$$P(x,y)\mu(x,y)dx + Q(x,y)\mu(x,y)dy = 0$$

Si es exacta.

Si μ es un factor integrante de $[*]$

$$\frac{\partial P\mu}{\partial y} = \frac{\partial Q\mu}{\partial x}$$

desarrollando estas derivadas de un producto

$$\frac{\partial P}{\partial y} \mu + P \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \mu + Q \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) \mu = Q \frac{\partial \mu}{\partial x} - P \frac{\partial \mu}{\partial y}$$

En principio no es fácil hallar un factor integrante, salvo que se supongan casos particulares

SEPTIEMBRE de 2010

Resolver la ecuación

$$(x^2 + y^2 + 1) dx - (xy + y) dy = 0$$

sabiendo que admite un factor integrante función de $(x+1)$.

Es decir, $\mu = \mu(x+1)$

Comprobamos que no es una diferencial exacta

$$\underbrace{(x^2 + y^2 + 1)}_P dx - \underbrace{(xy + y)}_Q dy = 0$$

Veamos. En efecto.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -y$$

Buscamos un factor integrante

de modo que $P \mu dx + Q \mu dy = 0$ sea exacta.

$$\frac{\partial P \mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [(x^2 + y^2 + 1) \mu(x+1)] =$$

$$= 2y \mu(x+1) + (x^2 + y^2 + 1) \frac{\partial \mu(x+1)}{\partial y} =$$

$$= 2y \mu(x+1)$$

$$\frac{\partial Q \mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [(-xy - y) \mu(x+1)] =$$

$$= (-y) \mu(x+1) + (-xy - y) \mu'(x+1)$$

Iguando estas dos expresiones

$$2y \mu(x+1) = (-y) \mu(x+1) + (-xy - y) \mu'(x+1)$$

$$2y = (-y) + (-xy - y) \frac{\mu'}{\mu}$$

dividimos los dos miembros por μ

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{2y + y}{xy + y} ; \quad \frac{\mu'}{\mu} = -\frac{3y}{xy + y}$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = -\frac{3}{x+1}$$

Integrando ambos miembros
respecto $d(x+1) = dx$

$$\int \frac{\mu'}{\mu} d(x+1) = -\int \frac{3}{x+1} dx$$

$$\ln(\mu) = \ln\left[\frac{1}{(x+1)^3}\right] + C$$

con lo cual

$$\mu = \frac{1}{(x+1)^3}$$

Utilizando este factor integrante,
la ecuación original se convierte
en esta ecuación exacta

$$(x^2 + y^2 + 1) \frac{1}{(x+1)^3} dx - (xy + y) \cdot \frac{1}{(x+1)^3} dy = 0$$

Buscaremos la función potencial Φ

tal que $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = P\mu$; $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q\mu$

$$\bar{\Phi} = \int \frac{x^2 + y^2 + 1}{(x+1)^3} dx =$$

Para hacer esta integral la descomponemos en fracciones elementales

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2 + 1}{(x+1)^3} &= \frac{A}{(x+1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} \\ &= \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3} = \\ &= \frac{Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C)}{(x+1)^3} = \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 2A + B = 0 \\ A + B + C = y^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = y^2 + 2 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{x+1} + \frac{-2}{(x+1)^2} + \frac{y^2 + 2}{(x+1)^3}$$

(53)

$$= \int \frac{1}{x+1} dx - 2 \int \frac{1}{(x+1)^2} dx + (y^2+2) \int \frac{1}{(x+1)^3} dx$$

$$= \ln(x+1) + \frac{2}{(x+1)} - \frac{y^2+2}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} + \varphi(y)$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2} dx = -\frac{1}{(x+1)}$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^3} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

constante
de integración

$$= \ln(x+1) + \frac{4(x+1) - y^2 - 2}{2(x+1)^2} + \varphi(y) =$$

$$= \ln(x+1) + \frac{4x - y^2 + 2}{2(x+1)^2} + \varphi(y)$$

Para hallar $\varphi(y)$, derivamos respecto de y

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{y}{(x+1)^2} + \varphi'$$

Por otro lado

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = Q_M = (-xy - y) \cdot \frac{1}{(x+1)^3} =$$

$$= -\frac{y}{(x+1)^2}$$

Iguando ambas expresiones

(59)

$$-\frac{y}{(x+1)^2} + \psi' = -\frac{y}{(x+1)^2}$$

Por lo que $\psi'(y) = 0 \Rightarrow \psi = C$

Por consiguiente,

$$\Phi(x, y) = \ln(x+1) + \frac{4x - y^2 + 2}{2(x+1)^2} + C$$

y las curvas integrales son

$$\ln(x+1) + \frac{4x - y^2 + 2}{2(x+1)^2} = C$$

Ecuaciones Diferenciales
de 1^{er} ORDEN

LÍNEALES

ECUACIONES LINEALES DE PRIMER ORDEN

(61)

$$y' + \alpha(x)y = F(x)$$

Se llama:

- La ecuación HOMOGÉNEA

$$y' + \alpha(x)y = 0 \leftarrow \text{cero}$$

- La ecuación COMPLETA

$$y' + \alpha(x)y = F(x)$$

↑
término forzado

Propiedad fundamental de las ecuaciones lineales

Solución
GENERAL
de la
ecuación

= Solución
general de
la
HOMOGÉNEA

+

Solución
PARTICULAR
de la
Completa

$$y = y_H + y_P$$

La solución general de la homogénea es una familia de curvas que depende de un parámetro.

El conjunto de soluciones de la homogénea tiene estructura de espacio vectorial. Es decir

Si y_1, y_2 son soluciones de la homogénea también lo es una combinación lineal

$$c_1 y_1 + c_2 y_2$$

(Basta comprobarlo)

Para resolver una ecuación lineal

1º Se halla la solución general de la homogénea

$$y' + \alpha(x)y = 0$$

mediante el método de separación de variables

2º Se busca una solución particular de la completa

$$y' + \alpha(x)y = F(x)$$

por el método de variación
de las constantes
(hay otros)

Ejemplo

$$y' - 2xy = 6x$$

Es una ecuación
lineal de
coeficientes
constantes

La homogénea:

$$y' - 2y = 0$$

(Es de variables separables)

$$\frac{dy}{dx} = 2y ;$$

$$\frac{1}{y} dy = 2 dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = 2 \int dx$$

$$\ln(y) = 2x + C$$

$$y = C e^{2x}$$

$$y_H = C e^{2x}$$

Solución particular de la completa (método de variación de las constantes)

Se ensaya una solución particular de la completa de la forma

$$y_p = C(x) e^{2x}$$

$$y'_p = C'(x) e^{2x} + 2C(x) e^{2x}$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$C' e^{2x} + \cancel{2C e^{2x}} - \cancel{2C e^{2x}} = 6x$$

$$C' = 6x e^{-2x} \Rightarrow C = \int 6x e^{-2x} dx$$

(Esta integral se hace por partes)

$$\int 6x e^{-2x} dx = 6 \int x e^{-2x} dx =$$

Integración por partes

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = e^{-2x} dx \Rightarrow v = \int e^{-2x} dx$$

$$\Rightarrow v = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$= 6 \left[x \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) - \int -\frac{1}{2} e^{-2x} dx \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= -3xe^{-2x} + 3\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right) = \\
 &= -\frac{3}{2}e^{-2x}[2x+1] + C
 \end{aligned}$$

$$C = -\frac{3}{2}e^{-2x}(2x+1)$$

con lo cual la solución particular es

$$y_p = -\frac{3}{2}e^{-2x}(2x+1)e^{2x}$$

$$y_p = -\frac{3}{2}(2x+1)$$

$$y_p = -3x - \frac{3}{2}$$

con lo cual la solución de la ecuación es $y = y_H + y_p$

$$y = Ce^{2x} - 3x - \frac{3}{2}$$

Junio 2012

a) Hállese la solución general de la ecuación lineal

$$xy' + (1-x)y = xe^x$$

y la curva integral que pasa por $(1,0)$.

b) Expresa la ecuación de la forma $y' = f(x,y)$, y aplíquese el teorema de existencia y unicidad para hablar la región del plano xy en el que la ecuación posee solución única. ¿Es la solución única hallada en el apartado a)?

a) Comprobamos que, en efecto, es una ecuación lineal de la forma

$$y' + \alpha(x)y = F(x)$$

$$y' + \left(\frac{1-x}{x}\right)y = e^x$$

1) Solución general de la homogénea (67)
(es una ecuación de variables separables)

$$xy' + \frac{1-x}{x}y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{x}y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{x-1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$\ln(y) = x - \ln(x) + C$$

$$y = e^{x - \ln(x) + C}$$

$$y = \frac{e e^x}{x}$$

$$y_H = C \cdot \frac{e^x}{x}$$

2) Solución particular de la completa (68)
(método de variación de las constantes)

Se ensaya $y_p = C(x) \frac{e^x}{x}$

$$y'_p = C(x) \frac{x e^x - e^x}{x^2} + C'(x) \frac{e^x}{x}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$x \left[C(x) \frac{x e^x - e^x}{x^2} + C'(x) \frac{e^x}{x} \right] + (1-x) C(x) \frac{e^x}{x} = x e^x$$

$$C \frac{x e^x - e^x}{x} + C' e^x + \frac{C e^x}{x} - C e^x = x e^x$$

(Se multiplica por x los dos miembros para eliminar denominadores)

$$\cancel{C x e^x} - \cancel{C e^x} + C' x e^x + \cancel{C e^x} - \cancel{C x e^x} = x^2 e^x$$

$$C' e^x = x e^x$$

$$C' = x$$

$$C = \frac{x^2}{2}$$

Por tanto, sustituyendo este valor de C

(69)

$$y_p = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{e^x}{x}$$

$$\boxed{y_p = \frac{x e^x}{2}}$$

Solución de la ecuación $y = y_H + y_p$

$$y = C \frac{e^x}{x} + \frac{x e^x}{2}$$

$$\boxed{y = e^x \left(\frac{C}{x} + \frac{x}{2} \right)}$$

Si se impone la condición inicial de que pase por $(1, 0)$

$$0 = e^1 \left(\frac{C}{1} + \frac{1}{2} \right) \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

La solución del problema de CAUCHY es

$$y = e^x \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} \right)$$

$$\boxed{y = \frac{1}{2} e^x \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

b) la ecuación expresada en la forma

$$y' = f(x, y)$$

es, despejando y' en la ecuación

$$x y' + (1-x)y = x e^x$$

$$x y' = x e^x - (1-x)y$$

$$y' = e^x - \frac{1-x}{x} y$$

$$y' = \underbrace{e^x + \left(\frac{x-1}{x}\right) y}_{f(x, y)}$$

El teorema de existencia y unicidad dice que

$f(x_0, y_0)$ continua $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$ continua	}	$\Rightarrow y' = f(x, y)$ tiene solución y es única en (x_0, y_0)
--	---	--

$$f(x, y) = e^x + \frac{x-1}{x} y$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{x-1}{x}$$

Ambas funciones son continuas
salvo cuando $x=0$

luego la ecuación tiene solución
única garantizada en todo
el plano xy , salvo en el eje y

SEPTIEMBRE 2010

En un circuito eléctrico, cuando una batería suministra una tensión constante E a un cierto condensador a través de una resistencia R (cte), la carga instantánea $Q(t)$ del condensador se adecua a la ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$R \frac{dQ}{dt} + Q = E$$

- Calcule Q , considerando el condensador inicialmente descargado, es decir $Q(0) = 0$.
- Calcule el valor "final" de la carga, es decir, el valor al que tiende cuando $t \rightarrow \infty$.
- ¿Cuánto tiempo será necesario para que la carga Q alcance la mitad de su valor "final"?

SOLUCIÓN

RECORDAR

Una ecuación lineal es de la forma

$$y' + \alpha(x)y = F(x)$$

La solución de la ecuación lineal es

$$y = y_H + y_P$$

y_H : solución general de la homogénea

y_P : solución particular de la completa

Passo: 1) Se halla una solución general de homogénea, y_H .

$$y' + \alpha(x)y = 0$$

mediante el método de separación de variables

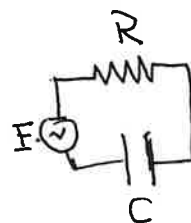
2) Se halla una solución particular de la completa

$$y' + \alpha(x)y = F(x)$$

Se puede utilizar el "método de variación de las constantes". (Hay otros)

a) Resolvemos la ecuación lineal

$$R \frac{dQ}{dt} + Q = E$$



1er Paso: Solución general de la homogénea
(separación de variables)

$$R \frac{dQ}{dt} + Q = 0$$

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{R} \rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{R} dt$$

$$\left\{ \int \frac{dQ}{Q} = \ln(Q) ; \int -\frac{1}{R} dt = -\frac{1}{R} t + C \right\}$$

$$\rightarrow \ln(Q) = -\frac{1}{R} t + C \rightarrow e^{\ln(Q)} = e^{-\frac{1}{R} t} \cdot e^C$$

$$\rightarrow \boxed{Q(t) = C e^{-\frac{1}{R} t}} \leftarrow \text{solución general de la completa}$$

2º Paso Solución particular de la completa (método de variación de las constantes)

Se ensaya la solución

$$\begin{cases} Q(t) = C(t) e^{-\frac{1}{R} t} \\ Q'(t) = C'(t) e^{-\frac{1}{R} t} + C(t) \left(-\frac{1}{R}\right) e^{-\frac{1}{R} t} \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación inicial

$$R \left[C'(t) e^{-\frac{1}{R} t} + C(t) \left(-\frac{1}{R}\right) e^{-\frac{1}{R} t} \right] + C(t) e^{-\frac{1}{R} t} = E$$

$$R C'(t) e^{-\frac{1}{R} t} = E \rightarrow C'(t) = \frac{E}{R} e^{\frac{1}{R} t}$$

$$\rightarrow C(t) = \int \frac{E}{R} e^{\frac{1}{R} t} dt = \frac{E}{R} \cdot R e^{\frac{1}{R} t} = E e^{\frac{1}{R} t}$$

Sustituyendo en la función ensayada

$$Q(t) = E e^{\frac{1}{R}t} \cdot e^{-\frac{1}{R}t} = E$$

$$\boxed{Q(t) = E}$$

← Solución particular de la completa

3er Paso Solución de la ecuación $[y = y_h + y_p]$

$$\boxed{Q(t) = E + C e^{-\frac{1}{R}t}}$$

← Solución de la ecuación lineal

Comentarios: $C e^{-\frac{1}{R}t}$ son curvas de decrecimiento exponencial

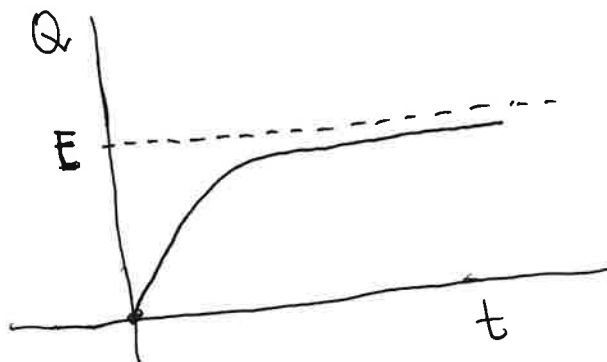
Con la condición inicial $Q(0) = 0$ se determina C

$$Q(0) = E + C \cdot e^{-\frac{1}{R}0} = E + C = 0 \rightarrow C = -E$$

Por consiguiente la solución del problema de Cauchy

$$\text{P.C. } \begin{cases} R \frac{dQ}{dt} + Q = E \\ Q(0) = 0 \end{cases} \text{ es}$$

$$Q(t) = E - E e^{-\frac{1}{R}t} = E(1 - e^{-\frac{1}{R}t})$$



b) $\lim_{t \rightarrow \infty} Q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(1 - e^{-\frac{1}{R}t}) = E(1 - 0) = E$



c) ¿Para que valor de t , $Q(t) = \frac{1}{2}E$?

$$E(1 - e^{-\frac{1}{R}t}) = \frac{E}{2} \Rightarrow 1 - e^{-\frac{1}{R}t} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{R}t} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{R}t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R}t = \ln(2) \Rightarrow \boxed{t = R \ln(2)}$$

EQUACIONES
DIFERENCIALES
de 1^{er} ORDEN

QUE SE REDUCEN
A LINEALES

- BERNOLLI

- RICCATI

Ecuaiones que se reducen a una
ecuación lineal



Ecuación de Bernoulli

$$y' + \alpha(x)y = F(x) \cdot \underbrace{y^n}$$

↑
Término que
hace que la
ecuación no sea
lineal

→ 1º Paso Se divide la ecuación por y^n

$$\underbrace{\frac{1}{y^n} y'}_{\approx u'} + \alpha(x) \underbrace{\frac{y}{y^n}}_u = F(x)$$

↑
Se consigue
suprimir y^n

→ 2º Paso Se hace el cambio de
variable

$$\begin{cases} u = \frac{y}{y^n} = y^{(1-n)} \\ \frac{du}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx} \end{cases}$$

Regla de la cadena

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1-n} \frac{du}{dx} + \alpha(x) u = F(x)$$

$$\frac{du}{dx} + (1-n) \alpha(x) u = (1-n) F(x)$$

Esta es una ecuación lineal que sabemos resolver
3er paso Se resuelve la ec. lineal
4o paso Se deshace el cambio

Ejemplo Resolver la ecuación de Bernoulli

$$y' = \frac{2y}{x} + \frac{x}{y}$$

Escribamos la ecuación así

$$y' - \left(\frac{2}{x}\right) y = x \cdot y^{-1}$$

para ver que, en efecto, es de tipo Bernoulli

1) Multiplicamos toda la ecuación por y

$$\underbrace{y y'} - \left(\frac{2}{x}\right) \underbrace{y^2} = x$$

zu' u

2) Se hace el cambio de variable

(71)

$$\begin{cases} u = y^2 \\ \frac{du}{dx} = 2y \frac{dy}{dx} \end{cases}$$

multiplicamos por 2 la ec. original

$$2yy' - \frac{4}{x}y^2 = 2x$$

$$\frac{du}{dx} - \left(\frac{4}{x}\right)u = 2x$$

Esta es una ecuación lineal

3) Se resuelve la ecuación diferencial lineal

a) Se halla la solución general de la homogénea

$$\frac{du}{dx} - \frac{4}{x}u = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{es de} \\ \text{variables} \\ \text{separables} \end{array} \right)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{4u}{x} \rightarrow \int \frac{1}{u} du = \int 4 \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\ln(u) = \ln(x^4) + C$$

$$u_H = Cx^4$$

(solución general de la homogénea)

b) Se busca una solución particular de la completa por el método de variación de las constantes

Se ensaya
$$\begin{cases} u_p = C(x) x^4 \\ \frac{du_p}{dx} = C' x^4 + 4x^3 C \end{cases}$$

$$C' x^4 + 4x^3 C - \frac{4}{x} C x^4 = 2x$$

$$C' x^4 = 2x \rightarrow C' = \frac{2x}{x^4} \rightarrow C' = \frac{2}{x^3}$$

$$C = \int \frac{2}{x^3} dx = -\frac{1}{x^2}$$

Por tanto
$$u_p = \left(-\frac{1}{x^2}\right) x^4 = -x^2$$

c) La solución general de la ecuación

$$u = u_H + u_p$$

$$u = \underbrace{Cx^4}_{u_H} - \underbrace{x^2}_{u_p} = x^2 (Cx^2 - 1)$$

(21)

4) Se deshace el cambio $u = y^2$

$$y^2 = x^2 (cx^2 - 1)$$

$$y = \pm x \sqrt{cx^2 - 1}$$

→ Comprobar usando WOLFRAM ALPHA
& MAXIMA

ECUACIÓN DE RICCATI

Son del tipo

$$y' + \alpha(x)y^2 + \beta(x)y = F(x)$$

Se resuelve cuando se conoce una
solución particular y_p .

Mediante el cambio

$$y = y_p + u$$

Se reduce a una ecuación de Bernoulli

Veremos cómo se hace con un ejemplo (22)

Febrero 2009 (1ª semana)

Hallar la solución general de la ecuación de Riccati

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}$$

que tiene $y_1 = \frac{1}{x}$ como una solución particular

Se hace el cambio

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x} + u \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} + \frac{du}{dx} \end{cases}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{x^2} + \frac{du}{dx}}_{y'} = \underbrace{\left(\frac{1}{x} + u\right)^2}_{y^2} - \frac{2}{x^2}$$

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2} - \frac{2u}{x} + u^2 - \frac{2}{x^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{2}{x}\right)u + u^2$$

$$\frac{du}{dx} - \left(\frac{2}{x}\right)u = u^2$$

Esta es una
ecuación
de Bernoulli

1) Se divide por u^2

$$\underbrace{\frac{1}{u^2}}_{\approx z'} \frac{du}{dx} - \frac{2}{x} \underbrace{\frac{1}{u}}_z = 1$$

Se hace el cambio $\left\{ \begin{array}{l} z = \frac{1}{u} \\ \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dx} \end{array} \right.$

multiplicando la ecuación por (-1)

$$-\frac{1}{u^2} \frac{du}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right) \frac{1}{u} = -1$$

$$\frac{dz}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right)z = -1 \quad \leftarrow \left(\begin{array}{l} \text{Esta es una} \\ \text{ecuación} \\ \text{lineal} \end{array} \right)$$

Se busca la solución general de la homogénea

$$\frac{dz}{dx} + \frac{2}{x}z = 0$$

(Es de variables
separables)

$$\frac{1}{z} dz = -\frac{2}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{z} dz = \int -\frac{2}{x} dx$$

$$\ln(z) = -2 \ln(x) + C$$

$$\ln(z) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$$

$$z_H = C \frac{1}{x^2}$$

Se busca una solución particular de la completa por el método de variación de las constantes

$$\text{Se ensaya } \begin{cases} z_p = C(x) \cdot \frac{1}{x^2} \\ \frac{dz_p}{dx} = C'(x) \frac{1}{x^2} - C(x) \cdot \frac{1'}{x^3} \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación lineal

$$C' \frac{1}{x^2} - \cancel{C \cdot \frac{1}{x^3}} + \left(\frac{2}{x}\right) \cdot \cancel{C \frac{1}{x^2}} = -1$$

$$C' \frac{1}{x^2} = -1 \Rightarrow C' = -x^2$$

$$C = \int -x^2 dx = -\frac{1}{3} x^3$$

Por consiguiente,

$$z_p = -\frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{3}x$$

La solución de la ecuación lineal

$$z = z_H + z_p$$

$$z = C \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3}x = \frac{3C - x^3}{3x^2}$$

Se deshacen los cambios

$$1) \quad z = \frac{1}{u} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = u$$

$$u = \frac{3x^2}{3C - x^3}$$

$$2) \quad y = \frac{1}{x} + u$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{C - x^3}$$

$$y = \frac{C + 2x^3}{x(C - x^3)}$$

Encuentra la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + 4e^{-x^2}y^2$$

y la solución particular que verifica la condición $y(0) = 1$

Es una ecuación de Bernoulli de la forma

$$\left(\frac{dy}{dx} + \lambda(x)y = F(x)y^n \right)$$

1) Se divide por y^2

$$\underbrace{\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx}}_{\approx u'} = 2x \underbrace{\frac{1}{y}}_u + 4e^{-x^2}$$

2) Se hace el cambio

$$\begin{cases} u = \frac{1}{y} \\ \frac{du}{dx} = -\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} \end{cases}$$

$$-\frac{du}{dx} = 2xu + 4e^{-x^2}$$

$$\frac{du}{dx} + 2xu = -4e^{-x^2}$$

(Esta es una ecuación lineal)

1) Se busca una solución general de la homogénea

$$\frac{du}{dx} + 2xu = 0$$

(Es de variables separables)

$$\frac{du}{dx} = -2xu \rightarrow \int \frac{du}{u} = \int -2x dx$$

$$\ln(u) = -x^2 + C$$

$$u = C e^{-x^2}$$

2) Se busca una solución particular de la completa por el método de variación de las constantes

$$\text{Se ensaya } \begin{cases} u_p = C(x) e^{-x^2} \\ u'_p = C' e^{-x^2} + C e^{-x^2}(-2x) \end{cases}$$

$$C' e^{-x^2} + C e^{-x^2}(-2x) = +2x C e^{-x^2} - 4e^{-x^2}$$

$$C' = 4 \Rightarrow C = 4x$$

Por tanto,

88

$$u_p = 4x e^{-x^2}$$

La solución general de la ecuación completa $u = u_H + u_p$

$$u = C e^{-x^2} - 4x e^{-x^2} = e^{-x^2} [C - 4x]$$

Se deshace el cambio

$$y = \frac{1}{u} = \frac{e^{x^2}}{C - 4x}$$

$$\boxed{y = \frac{e^{x^2}}{C - 4x}}$$

Se busca el valor de C para que se cumpla la condición inicial $y(0) = 1$

$$1 = \frac{1}{C} \Rightarrow C = 1$$

$$\boxed{y = \frac{e^{x^2}}{1 - 4x}}$$