EJERCICIOS FUNCIONES

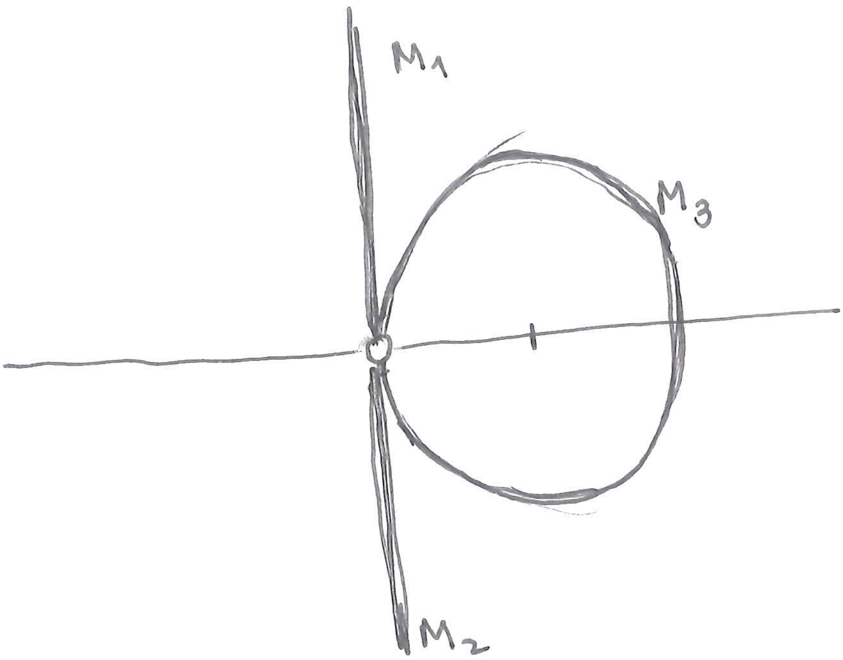
allave@madrid.uned.es

Dado el conjunto de $\mathbb{R}^2$

$$X = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } (x-1)^2+y^2=1 \text{ ó } y=0\} - \{(0,0)\}$$

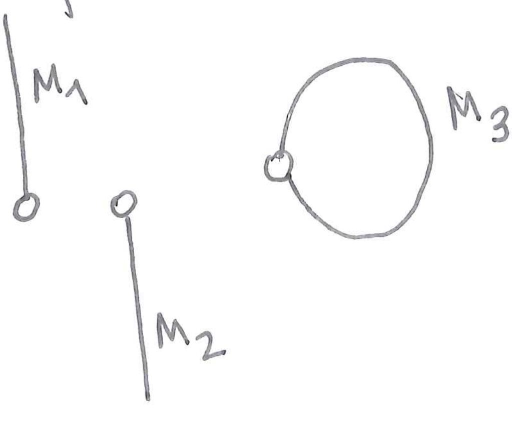
¿Es un conjunto conexo?

Respuesta

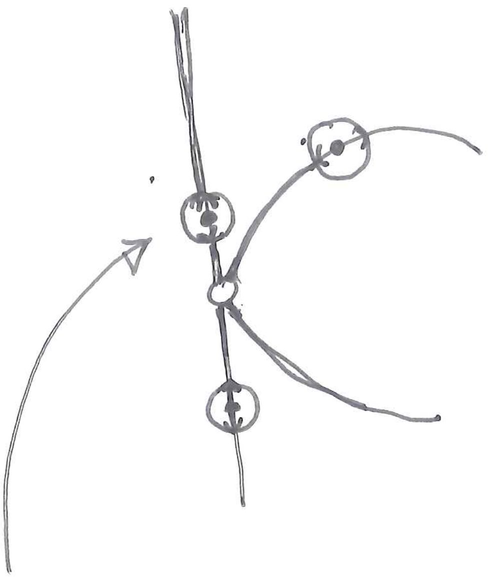


Es un conjunto que tiene tres componentes tal que

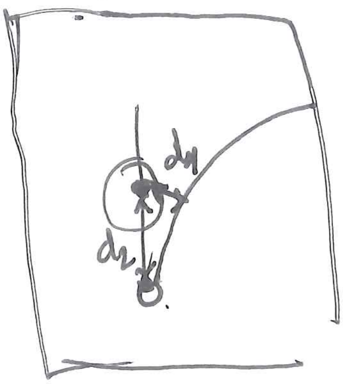
$$\begin{cases} M_1 \cup M_2 \cup M_3 = X \\ M_1 \cap M_2 = \emptyset \\ M_1 \cap M_3 = \emptyset \\ M_2 \cap M_3 = \emptyset \end{cases}$$

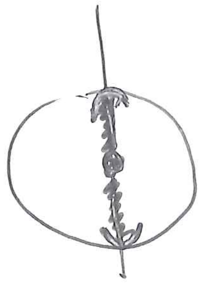


En la topología de X, heredada de la de $\mathbb{R}^2$, los abiertos son la intersección de X con abiertos de $\mathbb{R}^2$



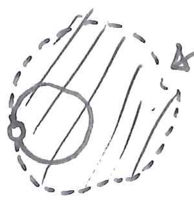
los puntos de X son puntos interiores con la topología heredada





Por tanto, M_1, M_2 y M_3 son abiertos de la topología heredada de X

Otra manera de ver que M_1, M_2 y M_3 son abiertos de la topología heredada en X es ver que son intersección de abierto de $\mathbb{R}^2$



$B((2,0), 2)$

i

Junio 2016

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2+2y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estudie su continuidad

(b) Determine sus derivadas parciales

(c) Estudie si es diferenciable

(a) Para los puntos $(x,y) \neq (0,0)$ la función es continua ya que es cociente de funciones continuas que no anulan el denominador

Para ver si es continua en $(0,0)$ tenemos que comprobar si

$$¿\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0\ ?$$

b) Para ver si existe el límite vamos a estudiar el límite por diferentes caminos a ver qué pasa

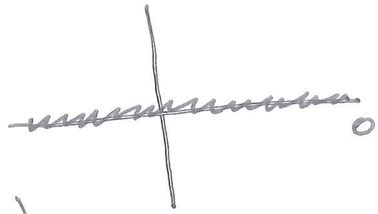
Existe límite $\Rightarrow$ Los límites por diferentes caminos existen y son iguales

(La recíproca no es cierta)

Límite por el eje X $(y=0)$

$$\frac{y^3}{x^2+2y^2} \xrightarrow[y=0]{} \frac{0}{x^2} \longrightarrow 0$$

a lo largo del eje X la función vale constantemente 0



Límite por el eje Y $(x=0)$

$$\frac{y^3}{x^2+2y^2} \xrightarrow[(x=0)]{} \frac{y^3}{2y^2} \longrightarrow \frac{y}{2} \longrightarrow 0$$

Límite por el camino $y = mx$

$$\frac{y^3}{x^2+2y^2} \xrightarrow[y=mx]{} \frac{m^3x^3}{x^2+2m^2x^2} = \frac{m^3 \, x}{(1+2m^2)} \longrightarrow 0$$

Como los límites por diferentes caminos son iguales "sospechamos" que existe el límite y éste es 0

Para probar que el límite es 0 escribimos la función en coordenadas polares.
$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

Ya que.

Hay que probar que dado $\varepsilon > 0$,

$$|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon \quad \text{cuando} \ |(x,y)-(0,0)| < \delta$$

Si tenemos en cuenta que $|(x,y)-(0,0)| = \rho$

y escribimos f en polares

$$|f(x,y) - 0| = \frac{\rho^3 \sin^3\theta}{\rho^2\cos^2\theta + 2\rho^2\sin^2\theta} =$$

$$= \frac{\rho \sin^3\theta}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta} = \rho\left(\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}\right)$$

veremos que esta expresión la podemos hacer tan pequeña como queramos para ello haciendo ρ tan pequeño como se necesite. Para lo cual necesitamos ver que $\left(\frac{\sin^3}{\cos^2\theta + 2\sin^2\theta}\right)$ está acotado para cualquier valor de θ

En efecto

$$\left|\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta+2\sin^2\theta}\right| = \left|\frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sin^3\theta}{1+\sin^2\theta}\right| \leq |\sin^3\theta| \leq 1 \qquad \forall\theta$$

[Una fracción (de términos positivo) aumenta si se disminuye el denominador
Una fracción aumenta si se aumenta el numerador]

(b)

Las derivadas parciales para $(x,y)\neq(0,0)$

son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{y^3}{x^2+2y^2}\right] = y^3\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x^2+2y^2}\right] =$$

$$= y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+2y^2\right)^{-1} = y^3\cdot(-1)\left(x^2+2y^2\right)^{-2}\cdot 2x =$$

$$= -\frac{2xy^3}{(x^2+2y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y^3}{x^2+2y^2}\right] = \frac{3y^2(x^2+2y^2)-4y\cdot y^3}{(x^2+2y^2)^2} =$$

$$= \frac{3y^2x^2+6y^4-4y^4}{(x^2+2y^2)^2} = \frac{3x^2y^2+2y^4}{(x^2+2y^2)^2}$$

En el punto $(0,0)$ aplicamos directamente la definición de derivada parcial

⊛ $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{0}{(\Delta x)^2 + 0} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{(\Delta x)^3} = 0$$

[Esto es fácil de ver porque la función f a lo largo del eje X vale constantemente 0. Con lo cual su derivada en es, la derivada de una constante, 0]

⊛ $$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{(\Delta y)^3}{2(\Delta y)^2}}{\Delta y} = \frac{1}{2}$$

(c) Recordatorio

La diferencial de una función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ en un punto es la aplicación lineal que mejor aproxima a la función

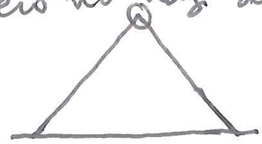
Definición

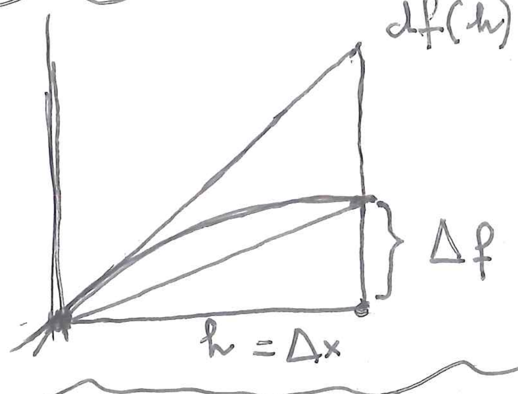
La aplicación lineal $df:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es la "diferencial de f" en el punto (x_0,y_0) sii existe

$$L=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(x_0+h,\,y_0+k)-f(x_0,y_0)-df(h,k)|}{|(h,k)|}=0$$

Para que exista la diferencial en $(0,0)$ es necesario, pero NO suficiente, que existan las derivadas parciales.

Ejemplo: Hay derivadas direccionales pero no hay diferencial





de existir la diferencial en $(0,0)$

$$df(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k$$

$$=\nabla f(0,0)\cdot(h,k)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Existen derivadas parciales y son continuas}} \Longrightarrow \boxed{\text{hay diferencial}}$$

$$\boxed{\text{hay diferencial}} \Longrightarrow \boxed{\text{hay derivadas en todas las direcciones}}$$

Las implicaciones recíprocas no son ciertas

— o — o — o — o — o —

En nuestro caso, de existir la diferencial, sería esta

$$df(h,k) = 0 \cdot h + \frac{1}{2} k$$

Calculamos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - df(h,k)|}{|(h,k)|} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left| \frac{k^3}{h^2+2k^2} - 0 - \frac{1}{2}k \right|}{\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|2k^3 - h^2 k - 2k^3|}{2(h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h^2 k|}{2(h^2+2k^2)\sqrt{h^2+k^2}}$$

Este límite no existe ya que depende del camino.

Escribimos (h, k) en coordenadas polares

$$\begin{cases} h = \rho \cos\theta \\ k = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{|\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta|}{2\rho^2(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta)\,\rho} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{|\cos^2\theta \sin\theta|}{2(1+\sin^2\theta)}$$

Esta cantidad depende del valor de θ

Por ejemplo

Si $\theta = 0 \to L = 0$

Si $\theta = \pi/4 \to L = \dfrac{(\sqrt{2}/2)^3}{2(1+\frac{1}{2})} = \dfrac{\frac{2\sqrt{2}}{8}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{12}$

Septiembre 2016

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = \cos(x) + y^2$$

¿Es diferenciable en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$? Si es así determine la diferencial

Si f tiene derivadas parciales continuas, entonces es diferenciable y la diferencial es la aplicación lineal cuya matriz asociada es el jacobiano.

[En el caso de campos escalares, el gradiente]

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Calculamos

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\cos(x) + y^2\right] = -\sin(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\cos(x) + y^2\right] = 2y$$

Estas derivadas parciales son funciones continuas por tanto, existe diferencial ~~en~~ el punto (x, y)

$$df(h,k) = (-\sin x, 2y) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Junio 2019

Sea la función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Sean los conjuntos

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} \leq 1 \right\}$$

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1 \right\}$$

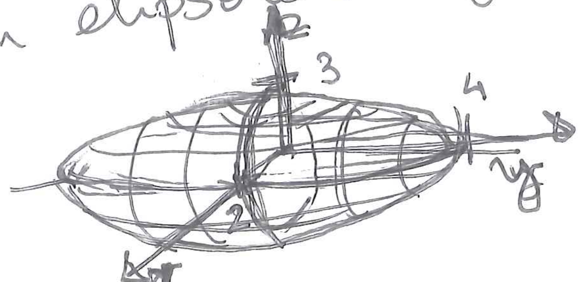
a) Determine los posibles puntos donde f alcanza extremos relativos en el conjunto D

b) Localice los posibles extremos relativos de la función f sobre S

c) ¿Se alcanzan los extremos absolutos dentro de D?

<u>Respuesta</u>

El conjunto D es el interior con su borde de un elipsoide. y S es el borde



13

La función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ es el cuadrado ~~de~~ de la distancia al origen

Este problema se podría resolver intuitivamente interpretando el significado de la función f, y de los conjuntos D y S

a) f alcanza un mínimo relativo en D en el origen

b) f alcanza extremos relativos de f en S ~~los~~ alcanza en $(\pm 2,0,0)$, $(0,\pm 4,0)$ y $(0,0,\pm 3)$.

(Piensa en ~~un~~ una esfera que va creciendo desde el origen)

Cada una de las esferas son superficies de nivel

$$f(x,y,z) = cte$$

El gradiente de f, $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ representa un vector perpendicular a la superficie de nivel

Los <u>extremos relativos</u> de una función escalar $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable son alguno de sus puntos críticos

puntos críticos son los que anulan la diferencial. Es decir,

$$\nabla f = \vec{0} \iff \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0,0,0)$$

En este caso

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

Los puntos críticos pueden ser de distinta naturaleza:
- Máximo relativo
- mínimo relativo
- punto de silla

La naturaleza de los puntos críticos se determinan estudiando el segundo término del desarrollo de Taylor de f

El desarrollo de taylor en $(0,0,0)$ de f es

$$f(h_1,h_2,h_3) = f(0,0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0), \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ (h_1,h_2,h_3)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} + \cdots$$

En notación abreviada

gradiente Hessiano

$$f(h_1,h_2\,h_3) = \underbrace{\nabla f(0,0,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Función lineal} \\ [=0 \text{ en los puntos críticos}]}} + \underbrace{(h_1 h_2 h_3)\, H \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Forma} \\ \text{cuadrática}}}$$

Estudiamos la la naturaleza de la forma cuadrática (Hessiano)

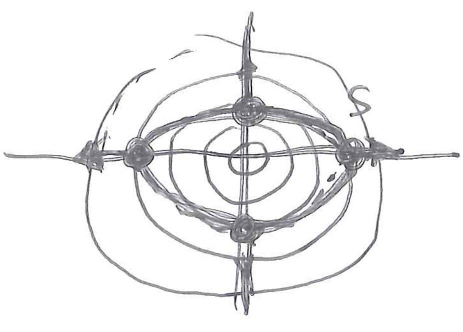
$$(h_1,h_2,h_3)\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 2h_1^2 + 2h_2^2 + 2h_3^2$$ (Es una forma cuadrática definida positiva)

Portanto, (0,0,0) es un <u>mínimo relativo</u>, ya que según nos alejamos del punto crítico (0,0,0) a un punto próximo (h_1, h_2, h_3), la función aumenta

b) Para hallar los máximos relativos de f en el conjunto S vamos a aplicar los <u>MULTIPLICADORES de LAGRANGE</u>.

La <u>idea geométrica</u> de los multiplicadores de Lagrange es que el los extremos el vector normal a S tiene la misma dirección que el ∇f en ese punto (que es la perpendicular a la superficie de nivel, y señala la dirección en la que f varía de manera máxima)



Explicación en $\mathbb{R}^2$

Multiplicadores de Lagrange

Resolvemos $\boxed{\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}}$

siendo la restricción $S \equiv \{g(x,y,z) = 0\}$

En nuestro caso $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \\ g(x,y,z) = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-1=0 \end{cases}$

$S \rightarrow$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \cdot \frac{1}{2} x \\ 2y = \lambda \cdot \frac{1}{8} y \\ 2z = \lambda \cdot \frac{2}{9} z \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9} = 1 \end{cases}$$

despejamos en las tres primeras ecuaciones

$$\begin{cases} x\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)=0 \\ y\left(2-\frac{\lambda}{8}\right)=0 \\ z\left(2-\frac{2\cdot\lambda}{9}\right)=0 \end{cases}$$

Como (x,y,z) no pueden ser simultaneamente 0 porque, en ese caso, no esta en S

Hay tres posibilidades:

1ª) $\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)=0 \Rightarrow \lambda=4$; $y=0$; $z=0$

2ª) $\left(2-\frac{\lambda}{8}\right)=0 \Rightarrow \lambda=16$; $x=0$; $z=0$

3ª) $\left(2-\frac{2\lambda}{9}\right)=0 \Rightarrow \lambda=18$; $x=0$, $y=0$

En cada uno de estos casos hay que verificar también la ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$

1) $\lambda=4$, $y=0$, $z=0$

$$\frac{x^2}{4}+0+0=1 \Rightarrow x=\pm 2$$

$$\Rightarrow (\pm 2, 0, 0)$$

2º) $\lambda=16$, $x=0$, $z=0$

$$0+\frac{y^2}{16}+0=1 \Rightarrow y=\pm 4$$

$$\Rightarrow (0, \pm 4, 0)$$

3) $\lambda = 18 \quad x = 0 \;,\; y = 0$

$$0 + 0 + \frac{z^2}{9} = 1 \Rightarrow z = \pm 3$$

$$\Rightarrow (0, 0, \pm 3)$$

Por tanto, sobre S hay seis puntos extremos relativos.

$\{(2,0,0), (-2,0,0), (0,4,0), (0,-4,0),$
$(0,0,3), (0,0,-3)\}$

Evaluando f en ellos:

$$f(\pm 2, 0, 0) = 4$$

$$f(0, \pm 4, 0) = 16$$

$$f(0, 0, \pm 3) = 9$$

~~Veamos si $x=0$ una curva en S es~~

~~$P = (0, y, z)$ en es curva $\frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$~~

~~$f(P) = y^2 + z^2 = 16 - \frac{16}{9}z^2 + z^2 = 16 - \frac{7}{9}z^2$~~

c) Como D es un conjunto compacto (cerrado y acotado) de $\mathbb{R}^3$ y f es una función con derivada continua, alcanza su máximo y su mínimo absolutos en D.

El mínimo absoluto de f en D se alcanza en $(0,0,0)$

El máximo absoluto de f en D se alcanza en $(0,4,0)$ y en $(0,-4,0)$.

(que son los puntos donde se alcanza el máximo en el borde)

Comentario:
Una función continua en un compacto el máximo o mínimo absolutos o son máximos o mínimos relativos o se alcanzan en el borde.

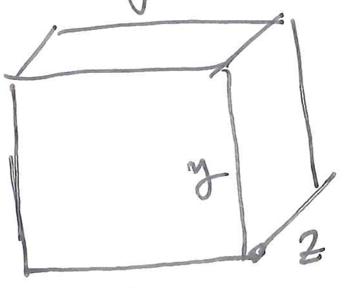
Junio 2011

Determine las dimensiones de un paralelepípedo regular de volumen V dado, de tal forma que su área sea mínima

Respuesta

Intuitivamente, la solución es un cubo.

Plantearemos el problema como un problema de hallar un extremo condicionado de una función (Multiplicadores de Lagrange)



$$A_{Lateral} = 2(xy + yz + xz)$$

Hay que minimizar

$$\begin{cases} f(x,y,z) = xy + yz + xz \\ xyz - V = 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ $\boxed{\text{condición } g(x,y,z) = 0}$

Aplicamos los multiplicadores de Lagrange

$$\boxed{\begin{cases}\nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0\end{cases}} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ g = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}y+z = \lambda y z & (1) \\ x+z = \lambda x z & (2) \\ y+x = \lambda x y & (3) \\ xyz = V\end{cases}$$

De las ecuaciones (1), (2) y (3) se deduce

$$2(x+y+z) = \lambda(yz + xz + xy)$$

$$\frac{(1)}{(2)} \Rightarrow \frac{y+z}{x+z} = \frac{\lambda y z}{\lambda x z} = \frac{y}{x} \Rightarrow$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow$

$\Rightarrow ad = bc$

$$\Rightarrow \cancel{xy} + xz = \cancel{xy} + yz$$

$$\Rightarrow xz = yz \Rightarrow \boxed{x = y}$$

$$\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{y+z}{y+x} = \frac{\lambda yz}{\lambda xy} = \frac{z}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xy + \cancel{xz} = yz + \cancel{xz}$$

$$\Rightarrow xy = yz \Rightarrow \boxed{x = z}$$

Así pues $\quad x = y = z$

Como $x \cdot y \cdot z = V$

$$\Rightarrow x = y = z = \sqrt[3]{V}$$

Junio 2017

Sea la función dada por

$$f(x,y,z) = x^2 - y + 2z$$

y consideremos que está definida sobre S la esfera de ecuación

$$x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

a) ¿Debe alcanzar f extremos absolutos sobre S? Si es así, indique cómo podemos localizar estos extremos absolutos. Justifique la respuesta

b) Determine los posibles puntos donde f alcanza extremos (absolutos y relativos) restringida al conjunto S

c) Indique en qué puntos se alcanzan los extremos absolutos

a) S es un conjunto cerrado y acotado de $\mathbb{R}^3$
f es una función continua.

$\Rightarrow$ f alcanza sus valores máximo y mínimo en S

Para hallar el máximo y el mínimo hay que buscar los extremos relativos entre los puntos críticos en S

$$\nabla f = (0, 0, 0)$$

y luego hay que buscar los extremos en el borde de S

ya que los extremos absolutos, que no son relativos, se alcanzan en el borde

Para hallar los extremos de la función f restringida al borde de S se utilizan los MULTIPLICADORES de LAGRANGE

(para usar Todo esto es necesario que f ~~tenga~~ derivadas continuas)

b) 1) Buscamos los puntos críticos de f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (0,0,0)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2 = 0 \end{array}\right\}$$

No hay solución

$\Rightarrow$ No hay extremos relativos

2) Buscamos los extremos en el borde de S utilizando los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} 2x = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 2 = 2\lambda z \end{array}\right. \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x(1-\lambda) = 0 \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ z = \frac{1}{\lambda} \end{array}\right. \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right.$$

De la primera ecuación

$$x(1-\lambda)=0$$

Se deducen dos posibilidades $x=0$, $1-\lambda=0$

* Si $x=0$

$$y^2+z^2=1$$

$$\frac{1}{4\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^2}=1 \Rightarrow \frac{1+4}{4\lambda^2}=1 \Rightarrow \lambda^2=\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

~~Esta~~ da origen los siguientes puntos

Para $\lambda=\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow P_1=\left(0,\frac{-1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

Para $\lambda=\frac{-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow P_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

* Si $\lambda=1$

$$y=-1/2,\quad z=1$$

$x^2+\frac{1}{4}+1=1 \Rightarrow x^2=-1/4$ Imposible

Para hallar la naturaleza de P_1 y P_2 evaluamos la función en ellos

$$f(P_1) = f\left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$$ (MÁXIMO ABSOLUTO de f en S)

$$f(P_2) = f\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$$ (MÍNIMO ABSOLUTO de f en S)

Junio 2019

Sean $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x,y) = (y-1,\ xe^y)$$

$$g(x,y) = \cos(xy)$$

Se pide estudiar si $g\circ f$ es diferenciable y en caso de que lo sea, se pide determinar su diferencial

Comentario: hay que interpretar la definición de las funciones como reglas. No poner la atención en el nombre de las variables, sino la regla que indican

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}
$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-1 \\ xe^y \end{pmatrix} \longmapsto \cos\left((y-1)\cdot xe^y\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$(g \circ f)$ es una función diferenciable porque es composición de funciones diferenciables

Para hallar la diferencial de $g \circ f$ podemos hacerlo de dos maneras

1º <u>Directamente</u>

Si sabemos que

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \cos\left((y-1) \cdot x\, e^{y}\right)$$

la diferencial es la aplicación lineal $d(g \circ f) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tiene por matriz el gradiente

$$\nabla(g \circ f) = \left(\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x} , \frac{\partial (g \circ f)}{\partial y} \right) =$$

$$= \left(-\sin\left((y-1)\, x e^{y}\right)(y-1) e^{y} , -\sin\left((y-1) x e^{y}\right) \left[x e^{y} + x (y-1) e^{y} \right] \right)$$

2º Utilizando la regla de la cadena

Recordatorio

$\boxed{\text{Regla de la cadena}}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^p \end{tikzcd}$$

$$\vec{x}_0 \longmapsto \vec{y}_0 \longmapsto \vec{z}_0$$

$y_0 = f(\vec{x}_0)$ $\qquad$ $z_0 = g(\vec{y}_0) = g(f(\vec{x}_0))$

Regla de la cadena en $\mathbb{R}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$x \longmapsto u(x) \to f(u(x))$$

La diferencial es la aplicación lineal que mejor aproxima la función en un punto

$$\boxed{f(\vec{x}+\vec{h}) = f(\vec{x}) + Df(x)(\vec{h})}$$

La expresión de una aplicación lineal. es una matriz

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}, & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

(matriz Jacobiana)

$$\boxed{D(g\circ f)(\vec{x}_0) = Dg(y_0) \cdot Df(x_0)}$$

(producto de matrices)

En este caso

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$\vec{y}_0 = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-1 \\ x e^y \end{pmatrix}$$

Calculamos ~~del~~ jacobiano de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$g(\alpha, \beta) = \cos(\alpha \cdot \beta)$

$$Dg\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha}, \frac{\partial g}{\partial \beta} \right) =$$

$$= \left(-\sin(\alpha\beta)\beta \;,\; -\sin(\alpha\beta)\alpha \right)$$

Calculamos el jacobiano $Dg\begin{pmatrix} y-1 \\ xe^y \end{pmatrix}\begin{matrix} \leftarrow \alpha \\ \leftarrow \beta \end{matrix}$

$$Dg(\vec{y}_0) = Dg\begin{pmatrix} y-1 \\ xe^y \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\sin\left((y-1)xe^y\right) xe^y \;,\; -\sin\left((y-1)xe^y\right)(y-1) \right)$$

Calculamos el jacobiano de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta-1\\ \alpha e^{\beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\alpha,\beta)\\ f_2(\alpha,\beta)\end{pmatrix}$$

$$Df\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta}\\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1\\ e^{\beta} & \alpha e^{\beta}\end{pmatrix}$$

$$Df\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\\ e^{y} & x e^{y}\end{pmatrix}$$

El jacobiano de $g \circ f\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ es el producto de dos matrices.

$$D(g\circ f)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \left(-\sin((y-1)xe^{y})xe^{y},\ -\sin((y-1)xe^{y})(y-1)\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1\\ e^{y} & xe^{y}\end{pmatrix}$$

$$= \Big(-\sin\big((y-1)\,x e^y\big)(y-1)\,e^y \,,$$

$$-\sin\big((y-1)\,x e^y\big) x e^y - \sin\big((y-1)\,x e^y\big)\,(y-1)\cdot x e^y \Big)$$

$$= \Big(-\sin\big((y-1)x e^y\big)(y-1)\,e^y \,,\; -\sin\big((y-1)x e^y\big)\big[x e^y + (y-1)\,x e^y\big] \Big)$$

que, como se ve, coincide con el resultado obtenido por el otro método.

Junio 2016

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

las funciones dadas

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \cos(y) \\ e^x + y \end{pmatrix}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y^2$$

Determina la diferencial de $g \circ f$

<u>Respuesta</u>: (Es parecido al anterior)

- <u>Directamente</u>

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^2 \cos y \\ e^x + y \end{pmatrix} \longmapsto x^2 \cos y + (e^x + y)^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto g\left(f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = g \circ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La diferencial de $(g \circ f): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una aplicación lineal. Su matriz es

$$D(g \circ f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g \circ f}{\partial x}, \frac{\partial g \circ f}{\partial y}\right)$$

$$D[g\circ f] = \left(2x\cos(y) + 2e^{x}(e^{x}+y),\ -x^2\sin(y) + 2(e^{x}+y)\right)$$

- Usando Jacobianos y la regla de la cadena

Recordatorio

REGLA DE LA CADENA

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$$

$$\vec{x}_0 \longmapsto \vec{y}_0 \longmapsto \vec{z}_0$$

$$\boxed{D(g\circ f)(\vec{x}_0) = Dg(\vec{y}_0)\cdot Df(\vec{x}_0)}$$

En nuestro caso, $f\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha^2\cos(\beta)\\ e^{\alpha}+\beta\end{pmatrix}$

$$Df\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_1}{\partial \beta}\\ \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha\cos(\beta) & -\alpha^2\sin(\beta)\\ e^{\alpha} & 1\end{pmatrix}$$

En nuestro caso, $g\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \alpha+\beta^2$

$$Dg\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \left(\frac{\partial g}{\partial \alpha},\ \frac{\partial g}{\partial \beta}\right) = (1,\ 2\beta)$$

particularizando $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$, $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix}x^2\cos(y)\\ e^{x}+y\end{pmatrix}$

$$D(g\circ f)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = Dg\begin{pmatrix}x^2\cos(y)\\ e^{x}+y\end{pmatrix}\cdot Df\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} =$$

$$= \left(1,\ 2(e^x+y)\right)\begin{pmatrix} 2x\cos(y) & -x^2\sin(y) \\ e^x & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(2x\cos(y)+2e^x(e^x+y),\ -x^2\sin(y)+2(e^x+y)\right)$$

que es el mismo resultado
que el obtenido anteriormente

Junio 2018

Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$

b) Calcule, si existen, las derivadas parciales de f en $(0,0)$ e indique si f es diferenciable en $(0,0)$

c) Determine los puntos críticos de f en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y estudie si son extremos relativos de f.
¿Es el punto $(0,0)$ un extremo relativo de f

a) La función f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ya que es cociente de funciones continuas que no anulan el denominador

Para estudiar la continuidad de f en $(0,0)$ tenemos que comprobar si

$$¿\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0 ?$$

Escrito en términos $\varepsilon - \delta$

¿ Dado un $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que

$$0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| < \varepsilon ?$$

Recordatorio

$$\boxed{\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{y}_0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0 \text{ tal que } 0<|\vec{x}-\vec{x}_0|<\delta \Rightarrow |f(\vec{x})-\vec{y}_0|<\varepsilon}$$

Esto se comprueba escribiendo los puntos en coordenadas polares

$$|f(\vec{x})-0| = \left| \frac{\rho^2\cos^2(\theta)}{\rho} \right| \leq \rho$$

(Esta cantidad se puede hacer tan pequeña como se quiera

Por consiguiente, la función f, también es continua en (0,0)

b) Vamos a calcular las derivadas parciales en (0,0) usando la definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$$

ten en cuenta:

$\sqrt{h^2} = |h|$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{\sqrt{h^2}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|}$$

Este límite no existe, ya que

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{|h|} = 1 \quad ; \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{h}{|h|} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{|h|} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{\sqrt{h^2}} - 0}{|h|} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h|h|} = 0$$

COMO NO EXISTEN las DERIVADAS PARCIALES en (0,0) $\Longrightarrow$ f no es diferenciable en (0,0)

c) La función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ por ser cociente de funciones diferenciables que no anulan el denominador, luego en $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ son puntos críticos los que anulan $\nabla f=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2x\sqrt{x^2-y^2}-x^2\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{2x(x^2+y^2)-x^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-x^2\cdot\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{-x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

El sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} x^3+2xy^2=0 \\ x^2y=0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación se deduce que hay dos posibilidades $x=0$, ó $y=0$

→ Si $x=0$ tambien se verifica la primera ecuación independientemente del valor de y. Por tanto, son puntos críticos todos los ~~del~~ eje Y (salvo el origen)

→ Si $y=0$ se verifique la
para que también
primera ecuación tiene que ser
$x^3=0$, es decir $x=0$

Es decir el punto $(0,0)$, que hay que descartarlo, ya que no estamos contemplando el $(0,0)$ en donde f no es diferenciable

← puntos críticos $[Df=0]$

observemos que la función

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

restringida al eje y, salvo el el $(0,0)$, es constantemente igual a 0

como $f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} > 0$ fuera del eje y

resulta que los puntos críticos son MÍNIMOS

Siguiendo el mismo razonamiento el punto $(0,0)$ es un mínimo ya que

$$f(0,0) = 0 < f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\forall (x,y) \neq (0,0)$$

Junio 2022 modelo A

$\boxed{2}$ Calcular, si existe el siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^4}{x^2+y^2},\ (x+1)\frac{\ln(y+1)}{y} \right)$$

Estudiaremos que ocurre cuando nos aproximamos a $(0,0)$ por diferentes caminos

- Cuando $x=0$

$$\left(\frac{x^4}{x^2+y^2},\ (x+1)\frac{\ln(y+1)}{y} \right) \xrightarrow[\substack{x=0 \\ \text{(función solo de } y)}]{} \left(\frac{0}{y^2},\ \frac{\ln(y+1)}{y} \right) \to$$

$$\xrightarrow[y\to 0]{} (0,1)$$

$$\left[\lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = \frac{0}{0} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y+1} = 1 \right] \text{(Regla L'Hopital)}$$

- Cuando $y=0$

$$\left(\frac{x^4}{x^2+y^2},\ (x+1)\frac{\ln(y+1)}{y} \right) \xrightarrow[y=0]{} \left(\frac{x^4}{x^2},\ (x+1)\cdot 1 \right)$$

¡ojo! (En realidad no está definida la función en esa recta $y=0$)

$$\xrightarrow[x\to 0]{} (0,1)$$

→ Sospechamos que el límite buscado es $(0,1)$ (Razonamiento heurístico).

(Razonamiento heurístico) y es un infinitésimo $\neq 0$

→ Cuando

$$\frac{\ln(y+1)}{y} \approx \frac{1}{y+1}$$

$$L \approx \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^4}{x^2+y^2} , \frac{x+1}{y+1} \right)$$

si consideramos coordenadas polares

$$x = r\cos\theta \quad ; \quad y = r\sin\theta$$

$$L = \lim_{r\to 0} \left(\frac{r^4\cos\theta}{r^2} , \frac{r\cos\theta+1}{r\sin\theta+1} \right) =$$

$$= \left(r^2\cos\theta , \frac{r\cos\theta+1}{r\sin\theta+1} \right) = (0, 1)$$

Ya que que
$$\begin{cases} \lim_{r\to 0} r^2\cos\theta = 0 \\ \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta+1}{r\sin\theta+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1 \end{cases}$$

Comentario: el límite sería $(0,1)$ si obviamos que la función no está definida para $y=0$ y para

$$1+y \leq 0 \Rightarrow y \leq -1$$

[esta última condición no nos importa porque no está en las proximidades de $(0,0)$]